

Symbolisen ja numeerisen laskennan ohjelmat
opiskelijan apuna

Markku Silén

Opinnäytetyö
Tekniikka ja liikenne
Tietotekniikan insinööri, AMK

2015

Tekniikka ja liikenne
Tietotekniikan insinööri, AMK

Tekijä	Markku Silén	Vuosi	2015
Ohjaaja	Veikko Keränen		
Toimeksiantaja	Veikko Keränen		
Työn nimi	Symbolisen ja numeerisen laskennan ohjelmat opiskelijan apuna		
Sivu- ja liitemäärä	92 + 46		

Työn tarkoituksena on etsiä lähinnä opiskelijoiden matematiikan ja matemaattisten aineiden opiskelun tarpeisiin sekä sisällöllisesti että taloudellisesti sopivia matemaattisia tietokoneohjelmia. Ohjelmien valinnan kriteereinä ovat tarkoituksenmukaisuus, sujuva käyttö ja asennuksen sekä de facto -standardien mukainen notaatio. Tärkeä kriteeri on laajennettu monialustaisuus, jolla tässä tarkoitetaan monipuolisen käyttöjärjestelmäsopivuuden lisäksi myös ohjelman tukea erilaisille tietojenkäsittelylaitteille ja tietoverkossa tapahtuvalle laskennalle.

Liitteessä on nimetty noin 200 erilaista ja eri tarkoituksiin sopivaa matemaattista tietokoneohjelmaa. Jokaisen ohjelman asennus ja kevyt käyttö on testattu yksinkertaisilla ohjelmaan sopivilla operaatioilla. Järjestelmäalustana on käytetty Microsoft Windowsia, Ubuntun Linuxia ja Applen iOS:iä. Suurin osa asennetuista ja testatuista ohjelmista jää tässä sopimattomuutensa vuoksi kokonaan käsittelemättä. Muutamia ohjelmia käsitellään tarkastikin.

Työssä esitellään mielestäni sopivimpia ohjelmavaihtoehtoja erilaisilla yksinkertaisilla matemaattisilla operaatioilla ja tuodaan monipuolisesti esiin niiden ominaisuuksia ja soveltuvuutta matematiikan opiskelun apuna. Huomiota kiinnitetään siihen, miten opiskelija voisi ilman ohjausta käyttää ohjelmaa esimerkiksi kotonaan tai muualla kuin oppilaitoksessa vaikkapa tehtävien tekoon. Myös oletus niiden sopivuudesta matemaattisten aineiden opetukseen on vaikuttanut ohjelmien valintaan.

School of
Name of Degree programme

Author	Markku Silén	Year	2015
Supervisor	Veikko Keränen		
Commissioned by	Veikko Keränen		
Subject of thesis	Symbolic and numerical computation programs		
Number of pages	92 + 46		

The primary motivation for this study rises from the apparent lack of appropriate and economically suitable mathematical computer programs for students. The aim was to survey the situation of the existing mathematical software suitable for student use. Here suitable means that software is easy to install, easy to use fluently and usable by the means of acceptability. It also means support for cross platforms and support for different devices and apparatus, like e.g. Web use.

The installation and light use of about 200 mathematical programs were tested. The programs are listed in the appendix. Microsoft Windows, Ubuntu Linux and Apple iOS were used as platforms. The testing was performed with two home computers and one tablet computer.

As a result, this thesis presents the most suitable software for studying, but also for teaching mathematics.

Key words

Numerical computation, symbolic computation, CAS

SISÄLLYS

1 JOHDANTO	5
2 MATEMAATTISET TIETOKONEOHJELMAT	8
2.1 Ohjelmistoselvitys	8
2.2 Matemaattisten tietokoneohjelmien luokittelu	9
2.2.1 Numeeriset ja symboliset laskentaohjelmat	10
2.2.2 Vuorovaikutteisen geometrian ohjelmat	13
2.2.3 Taulukkolaskentaohjelmat.....	16
2.2.4 Yleiskäyttöiset matemaattiset tietokoneohjelmat.....	17
2.2.5 Eryityiskäyttöiset matemaattiset tietokoneohjelmat.....	20
2.2.6 Laskimet ja matemaattiset muistikirjaohjelmat	21
2.2.7 Ilmaiskäyttöiset matemaattiset ohjelmat.....	24
3 MATEMAATTISTEN TIETOKONEOHJELMIEN TARKASTELU.....	24
3.1 Tietokonealgebrajärjestelmät.....	25
3.2 Numeeriset järjestelmät	49
3.3 Vuorovaikutteisen geometrian ohjelmat.....	61
3.4 Tilasto-ohjelmistot.....	71
3.5 Matemaattiset WEB-palvelut.....	78
4 POHDINTA.....	86
LÄHTEET	88
LIITTEET	92

1 JOHDANTO

Henkilökohtaisten yleiskäyttöisten tietokoneiden (Lauckner & Lintner 2001, 12) käyttö eri ammattialoilla ja kulttuurin aloilla on lisääntynyt voimakkaasti viime vuosikymmeninä. Erityiskäyttöisistä tietokoneista (Lauckner & Lintner 2001, 11), kuten taskulaskimista, tarkkuusvaaioista ja erilaisista mittareista, on siirrytty yleiskäyttöisiin tietokoneisiin, jotka soveltuvat monipuolisesti erilaisiin tehtäviin. Harvasta työstä tai oppilaitosten opintokokonaisuuksista selvittää enää ilman tällaisia monipuolisiin tehtäviin sopivia tietokoneita. Työpaikoilla ei enää käytetä taskulaskimia ainakaan jokapäiväisessä rutiinilaskennassa, vaan siihen käytetään erilaisia yleisiä tai erityisiä tietokonelaskentaan tarkoitettuja ohjelmia. Ylioppilastutkintolautakunnankin suhtautuminen erilaisiin laskemisen apuvälineisiin on muuttunut. Vuonna 2012 kaikkien erilaisten laskimien käyttö tuli sallituksi yo-kokeissa. "...laskinohje ei määrittele sitä, mikä on laskin. Symboliset toiminnot tulivat (laskimissa) sallituiksi ..." (Kivelä 2012, 1). Ylioppilastutkintolautakunta on ilmoittanut, että koko ylioppilastutkinto suoritetaan sähköisesti vuodesta 2019 alkaen (Ylioppilastutkintolautakunta 2013, 1). Matematiikan koe on viimeinen ylioppilastutkintoon kuuluva sähköistettävä koe. Eveliina Hietakymi olettaa pro gradu -työnsään, että syynä on opiskelijoiden totuttaminen tietokoneella käytettäviin merkin-töihin (Hietakymi 2014, 7). Tästä poiketen oletan kuitenkin Digabin DigabiOS-järjestelmässä (Digabi 2015a, 1) toimivaan Abitti-järjestelmään (Ylioppilastutkintolautakunta 2015, 1) ja sen ohjelmistoihin (Digabi 2015b, 1) tutustuneena, ettei ongelmana ole erilaisiin tietokoneisiin ja sen notaatiojärjestelmiin tottuneen nuorison korkea oppimiskynnys, vaan ylioppilastutkintojärjestelmän muutoksen suunnittelun ja toteuttamisen ongelmallisuus ja toimintakulttuurin muutos.

Matemaattiset tietokoneohjelmat ovat kehittyneet numeerisen laskennan ohjelmista lausekkeita ymmärtäviin symbolisen laskennan ohjelmistoihin, CAS, Computer Algebra System (Kivelä 2012, 52). CAS-järjestelmät ovat kehittyneet niin paljon, että niitä voitaisiin kutsua matemaattisiksi asiantuntijajärjestelmiksi, kuten matematiikan lehtori Ari Lehtonen kutsuu Maximan järjestelmätyyppiä Jyväskylän yliopiston syksyn 2013 symbolisen laskennan luentomonisteessaan (Lehtonen 2013, 1).

Omassa ammattikorkeakouluopiskelussani olen huomannut, kuinka käytännön opiskelu on eriytynyt itse opetustapahtumasta niin, ettei opiskelijalla aina ole mahdollisuutta kysyä neuvoja tai pyytää ohjaajaa tai opettajaa osoittamaan järjkeviä menetelmiä opiskelutehtävien ratkaisemiseksi tarpeeksi nopeasti.

Etenkin erilaisiin ammattialoihin (esimerkiksi terveysala, maanmittaus-, rakennus- ja tietotekniikka) liittyvät matematiikan ja fysiikan ongelmat ovat sellaisia, joissa opiskelija on usein sidottu raskaisiin ja kalliisiin, erityisesti hänen opiskeluorganisaationsa suosimiin ja käyttämiin tietojärjestelmäratkaisuihin. Tällaisten matemaattisten tietojärjestelmien lupa- ja lisenssimenettely sekä käyttömahdollisuudet ja hinta ovat usein esteenä järjestelmän käytölle, rajoittaen sekä ajallisesti että paikallisesti opiskelijan mahdollisuuksia suunnitella ja toteuttaa opiskeluaan ja päämääriään tehokkaasti. Laadukkaat ilmaiskäyttöiset ohjelmat tuovat opiskeluun sosiaalista tasa-arvoisuutta.

Opinnäytetyössä halutaan tuoda apua ohjelmien käytön ongelmiin kartoittamalla yleisimmät, helposti saatavat ja arvioni mukaan toimivimmat ilmaiskäytössä olevat yleisten ja joidenkin erityisten matemaattisten ongelmien ratkaisuun tarkoitetut ohjelmat. Matemaattisten ongelmien ratkaiseminen yleiskäyttöisellä tietokoneella olevalla laskentaohjelmistolla taskulaskimen sijasta tuo monenlaisia etuja. Näistä voidaan mainita leikepöydän käyttö, erilaiset tulostus- ja muotoilumahdollisuudet, tietokoneverkon käytön mahdollisuudet, laitteiden kirjon väheneminen ja erilaisten sovellusten yhteistyön helpottaminen sekä usein monipuoliset, käyttöä helpottavat ja tehostavat opetukselliset ominaisuudet.

Tarkoituksena on ensisijaisesti etsiä ja löytää esiteltäväksi ja vertailtavaksi muutama erilainen yleiskäyttöinen geometriaan, symboliseen ja numeeriseen laskentaan ja joihinkin erityistehtäviin soveltuvia ohjelmia. Niiden on oltava hyväksyttäviä, sujuvasti asennettavia ja käytettäviä käyttökelpoisia sovelluksia, joita opiskelija ja opettajakin voivat helpokosti käyttää tehokkaasti ja monipuolisesti hyödykseen. Työssä pyritään esittämään karkea kuva valittujen ohjelmien toiminnasta

ja toimintakyvyn laajuudesta erilaisissa matemaattisissa ongelmissa ja esitystavoissa erilaisin esimerkein. Sopivuskriteerit tarkentunevat aihetta tutkittaessa.

2 MATEMAATTISET TIETOKONEOHJELMAT

P.H.M. Drijvers esittää väitöskirjassaan Learning Algebra in a Computer Algebra Environment, että vaikka tietokonealgebraympäristöjen rutiinien käytön ja käsitteellisen ymmärtämisen rakentumisen välillä on tiettyjä jännitteitä, näyttää tietokonealgebrajärjestelmien käyttö voivan edistää algebrallista ymmärrystä. Se kuitenkin vaatii opetuksen suunnittelua nykyisestä poikkeavalla tavalla (Drijvers 2003).

Olen omassa opiskelussanikin huomannut tietokonealgebrajärjestelmien käytön ristiriitaisuuden matematiikan opiskelussa. Ensinnäkin valmiiden rutiinien käyttö voi estää syventymisen siihen, mitä ohjelmat oikeastaan tekevät. Toisaalta ohjelmien käyttö voi tehostaa ymmärrystä siitä, mitä ohjelmat tekevät ja auttaa näkemään miten ne tekevät. Matematiikan opiskelu tietokoneohjelmien työvälineitä käyttämällä voi antaa opiskelijalle näkemyksen matematiikasta kokonaisuutena. Matemaattiset tietokoneohjelmat ovat laajentaneet opiskelijan mahdollisuuksia käyttää ja harrastaa matematiikkaa sekä sisällöllisesti että keinollisesti.

Matemaattiset tietokoneohjelmistot ovat yleistymisestään lähtien olleet pääasiassa matematiikan harrastajien sekä oppilaitosten ja opettajien sekä eräitten ammattiryhmien, kuten insinöörien työvälineitä ja kehityskohteita. Matemaattisten tietokoneohjelmistojen kehittyminen on kuitenkin luonut mahdollisuuden ”tavallisellekin ihmiselle” tutustua matematiikan iloihin. Tämä pätee myös yleisesti opiskelijoihin. Hyvänä esimerkkinä tutustumisen arvoisesta ohjelmistosta voidaan mainita GeoGebra (Hohenwarter M & al. 2015a, 1). Sen avulla voi kuka tahansa saada käsityksen käytännön laskemisesta tietokoneen avulla, mutta myös syvällisemmästä matematiikasta.

2.1 Ohjelmistonselvitys

Tietoa matemaattisista tietokoneohjelmista etsittiin lähinnä WEB-hakujen avulla sekä erilaisista luetteloista, kuten Simo K. Kivelän Aalto-yliopiston matematiikka-

sivuilla ylläpitämästä ohjelmaluettelosta (Kivelä 2008, 1) ja tietokonealgebraa käsittelevästä teoksesta *Computer Algebra Handbook* (Grabmeier, Kaltofen & Weispfenning 2012).

Noin 200 matemaattiseen laskentaan tarkoitettun tietokoneohjelman tai ohjelman osan nimeä on luetteloituna taulukoksi (Liite 1). Taulukkoon on lisätty tiedot ohjelman nimestä, verkko-osoitteesta, tyypistä, lisenssityypistä, versionumerosta, käytettävästä alustasta, kehittäjä tiedoista ja dokumentaation sijainnista, mikäli sellainen oli saatavilla. Jokaisen sovelluksen asennuksen helppous ja toiminnallisuus tutkittiin yhdellä tai kahdella asennuksella ja yksinkertaisella tehtävällä sekä tapauskohtaisesti iOSilla, Linuxilla ja Windowsilla (Liite 1, kohta *sujuvuus*).

Käytetyt käyttöjärjestelmät olivat 64-bittinen Windows 7 ja 64-bittinen Ubuntu 14.04. Lisäksi erilaisia sovellusalustoja olivat iPad, Java, Python, Virtualbox ja HTML skriptikielinen sekä erityiset WEB-sovellukset ja erilaiset emulaattorit. Sovelluksien mahdollisten käyttöalustojen kirjo oli vielä laajempi sisältäen mm. Androidin, X, W, M, WCE, iOS, FreeBSD, BSD, Arm, Android, IBMmf, oVMS Alpha, iOS, TINspire, Solaris, Emacs, Ux, Aix, Irix, Cyanogenmod, CP/M, TRS-DOS, Apple II, DOS, HTML5:n, BSD:n, sekä isäntäohjelmat, kuten Mathematica on sovelluspaketeilleen.

2.2 Matemaattisten tietokoneohjelmien luokittelu

Matemaattiset tietokoneohjelmat voidaan luokitella numeerisiin, symbolisiin ja vuorovaikutteisiin geometrisiin, avaruusgeometrisiin, stokastisiin sekä taulukkolaskentaohjelmiin ja muihin matematiikan erityisalojen tietokonesovelluksiin (Kortenkamp, Weigand & Weth 2005, 10). Muitakin luokittelutapoja on. Ohjelmat voidaan esimerkiksi luokitella tietokoneelle asennettaviin ja verkkosivulla toimiviin tai käytön ilmaisuuden ja maksullisuuden mukaan tai ne voidaan luokitella lisenssiperustaisesti. Ne voidaan myös luokitella yleismatemaattisiin tai erityistä tarvetta tai matematiikan osa-aluetta varten laadittuihin ohjelmiin. On tärkeää huomata, että suurin osa olemassa olevista matemaattisista ohjelmistoista voidaan luokitella samaan aikaan moneen eri luokkaan kuuluviksi, kuten GeoGebra.

GeoGebra-ohjelmistolla on geometrisen toiminnallisuutensa lisäksi laajahko tietokonealgebraallinen matemaattinen suorituskyky, joten sen luokittelu vuorovaikutteisiin geometrisiin tietokoneohjelmiin ei ole yksiselitteistä, pikemminkin historiallisista syistä johtuvaa.

Opinnäytetyön kohteina ovat erityisesti opiskelijan näkökulmasta mielenkiintoiset monipuoliset ilmaiskäyttöiset matemaattiset tietokoneohjelmat: tietokonealgebraohjelmat, matemaattiset muistikirjat ja vuorovaikutteisen geometrian ohjelmat. Työssä käsitellään lisäksi muitakin ohjelmatyyppejä.

2.2.1 Numeeriset ja symboliset laskentaohjelmat

Numeerinen laskenta eroaa symbolisesta laskennasta siinä, että viimeksi mainittu lasketaan täsmällisesti ja sen tulokset ovat täsmällisiä. Täsmällisyysvaatimuksesta johtuen algebran sovittaminen prosessointitavaltaan numeeriseen tietokoneeseen on vaativa tehtävä. Tehtävässä käytetään algoritmikirjastoja. Yleisesti käytössä oleva ja tärkeimpien symbolisten laskentaohjelmistojen käyttämä algoritmikirjasto on vapaasti käytettävissä oleva GMP (GNU Project GMP 2015, 1), joka operoi kokonais-, rationaali- ja liukuluvuilla. Tietokonealgebra on symbolisten algoritmien ratkaisu- ja toteutusmenetelmien kokonaisuus. Tietokonealgebra perustuu täsmälliseen tietokoneella manipuloitavaan finiittisten ja infiittisten matemaattisten olioiden finiittiseen ilmaisuun (Grabmeier, Kaltofen & Weispfenning 2012, 2).

Symbolisen ja numeerisen algebraohjelmiston ero voidaan nähdä esittämällä ohjelman ratkaistavaksi symbolisen algebran ongelma ja tutkimalla ohjelman kykyä tunnistaa lausekkeissa käytettävät symbolit, operaatiot ja operaattorit sekä tutkimalla ongelman ratkaisukykyä ja tuloksen täsmällisyyttä, muotoa ja esitystapaa. Tietokonealgebra -järjestelmät on käytännön käsitteenä laaja: se voi pitää sisälleen hyvinkin erilaisia järjestelmiä. Tietokonealgebra -järjestelmät voivat olla laajoja ja monialaisia, kuten Wolfram Alpha Knowledge Engine tai dynaamisen geometrian ja algebran toisiinsa liittäviä sovelluksia kuten GeoGebra. Englanninkielinen Wikipedia kertoo haulla *Symbolic Computation* (Wikipedia 2015a, 1), että

symbolinen matematiikka eroaa tietokonealgebrasta. Ero on siinä, että ensin mainitun näkökulma on matemaattinen ja toiseksi mainittu on tietojärjestelmätieteen käsite. Simo K. Kivelä kertoo Aalto-yliopiston symbolisen laskennan kurssinsa esitteessä, että symbolinen laskenta on (matemaattisten) lausekkeiden käsittelyä (Kivelä 2014, 1).

Numeerisella laskennalla pyritään löytämään yksinkertaisten lausekkeiden avulla menetelmällisesti hallittuja sopivan tarkkuuden likiarvoratkaisuja (Grabmeier, Kaltofen & Weispfenning 2012, 109). Numeeristen menetelmien käyttö on yleistä ja tarpeellista luonnontieteissä, tekniikassa ja insinööritieteissä.

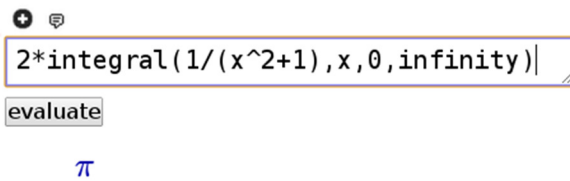
Esimerkkiongelmiana esitetään alla eräs piin ilmaisu (1). Tällä pyritään tuomaan selvästi esille numeerisen ja symbolisen laskennan ero.

$$2 \cdot \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{(x^2+1)} \right) dx = \pi \quad (1)$$

missä

\int	on	integraalioperaattori,
x	on	muuttuja,
dx	on	ohje integrandin integroimisesta x :n suhteen,
0	on	integroitivälin alku, nolla,
∞	on	integroitivälin loppu, ääretön.

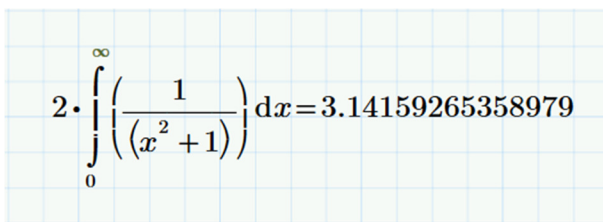
Laskutoimitus suoritettuna määrätyn integraalin avulla Sagen versiolla 6.5 (SageMath Project 2015, 1). Ilmaisu on muotoiltu ohjelmalle sopivaksi (Kuva 1). Sage-ohjelmisto näyttää kykenevän tässä laskutoimituksessa symboliseen laskentaan.



2*integral(1/(x^2+1),x,0,infinity)|
evaluate
 π

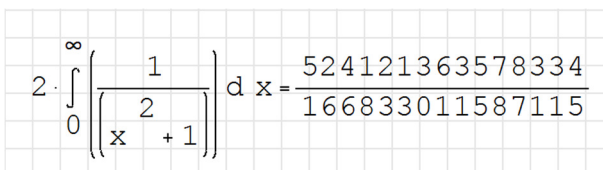
Kuva 1.

Alla kuvataan sama tehtävä suoritettuna PTC Mathcad Express Prime 3.1 -ohjelmistolla (Kuva 2) ja SMath Studio Desktop 0.97 ohjelmistolla (Kuva 3):



$$2 \cdot \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{(x^2 + 1)} \right) dx = 3.14159265358979$$

Kuva 2.



$$2 \cdot \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{(x^2 + 1)} \right) dx = \frac{524121363578334}{166833011587115}$$

Kuva 3.

Kuvista 2 ja 3 voidaan nähdä, että tehtävä voidaan esittää molemmille ohjelmille ladotussa muodossa matemaattisia symboleita käyttäen. MathCad Express Primen ilmaisversiossa tuloksen voi esittää vain desimaaliesityksenä (Kuva 2). Maksullisessa ohjelmaversiossa voidaan ohjevalikon mukaan valita symbolinen esitysmuoto. SMath Studio Desktop -version laskenta esittää integroinnin tuloksen jakolaskuna pyrkien täsmällisyyteen, vaikka laskennan tulos määrättiin etukäteen valikkoasetuksista esitettäväksi symbolisesti (Kuva 3). Jakolaskun osamäärä laskettuna WolframAlpha®-järjestelmällä (Wolfram Group LLC 2015a, 1) on 15 desimaalin tarkkuudella 3,141592653589749..., ja piin arvo samalla tarkkuudella 3,141592653589793...

Ero syntyy 14. desimaalin kohdalla. Se tarkoittanee, että SMath Studio Desktopin numeerinen laskenta kykenee tässä tapauksessa 13 desimaalin tarkkuuteen.

Tähän on huomautettava, että SMath Studio Desktop pystyy joissain versioissaan myös esittämään kyseisen integroinnin tuloksen symbolisena Maxima-liitännäisen avulla, mikäli Maxima on asennettuna ja hakemistopolusta löydettävissä tai osoitettavissa. Maxima-liitännäinen tarjoaa algoritmi- ja funktiokirjastonsa SMath Studio Desktopin käyttöön syötteellä Maxima().

SMath Studio Desktop ei täten näytä olevan symbolinen laskentaohjelma, vaan pikemmin eräänlainen monipuolinen numeerisen laskennan apuväline ja matemaattinen muistikirjasovellus. MathCad Express Prime näyttää olevan symbolinen laskentaohjelma ja Sage sekä Maxima sen sijaan ovat symbolisia laskentaohjelmia. Ohjelmien tavassa käsitellä numerotarkkuuksia on myös eroja. Toiset ohjelmat erottelevat desimaalitarkkuuden numerotarkkuuksista ja toiset jättävät jomman kumman huomiotta.

2.2.2 Vuorovaikutteisen geometrian ohjelmat

Vuorovaikutteisen geometrian ohjelmilla (IGS) tarkoitetaan sellaisia sovelluksia, joilla voidaan luoda muokattavia geometrisia rakenteita. Vaikka DGE ja DGS tarkoittavat suurin piirtein samaa kuin IGS, on nimien alkuosa eli Dynamic Geometry Geometer's Sketchpadille (KCP Technologies 2015,1) rekisteröity tavaramerkki. Vuorovaikutteisen geometriaohjelman avulla voidaan kuvata asiantilojen muutosta tai vaikka kinematiikkaa (Labs 2007/2008, 1–3). Vuorovaikutteiset geometrian ohjelmat luokitellaan vielä 2D, 3D ja useampiulotteisia avaruuksia käsitteleviin. Arkkitehtoniset geometriaohjelmat tai CAGD-ohjelmat (Tietokoneavusteinen geometrinen suunnittelu, Computer Aided Geometric Design) eivätkä muut CAD-tyyppiset ohjelmat kuulu tähän ryhmään (Wikipedia 2015b, 1).

Java-pohjaiselle GeoGebra-ohjelmiston Windows-versiolle 5.0.134.0 esitettiin seitsemän ympyrän piirtämistehtävä, jossa kuusi ympyrää sijoitetaan keskusym-

pyrän ympärille niin, että keskusympyrä sivuaa kuutta ympyrää. Jokainen keskusympyrän ulkopuolella oleva ympyrä sivuaa kahta vierusympyräänsä sekä keskusympyrää. Tiedot syötettiin ympyrän yhtälöillä (2–8):

$$\text{ens: } (x)^2 + (y)^2 = (\pi)^2 \quad (2)$$

$$\text{toi: } (x)^2 + (y - 2\pi)^2 = (\pi)^2 \quad (3)$$

$$\text{kol: } (x - \frac{7}{4}\pi)^2 + (y - \pi)^2 = (\pi)^2 \quad (4)$$

$$\text{nel: } (x - \frac{7}{4}\pi)^2 + (y + \pi)^2 = (\pi)^2 \quad (5)$$

$$\text{vii: } (x)^2 + (y + 2\pi)^2 = (\pi)^2 \quad (6)$$

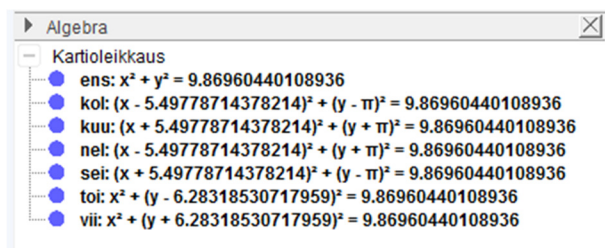
$$\text{kuu: } (x + \frac{7}{4}\pi)^2 + (y + \pi)^2 = (\pi)^2 \quad (7)$$

$$\text{sei: } (x + \frac{7}{4}\pi)^2 + (y - \pi)^2 = (\pi)^2 \quad (8)$$

missä

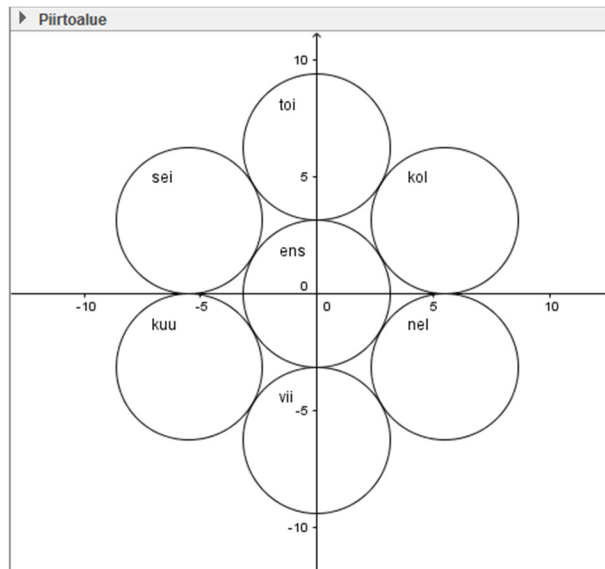
<i>ens, toi, kol, nel, vii, kuu ja sei</i>	ovat	ympyröiden nimiä,
<i>x ja y</i>	ovat	muuttujia,
<i>π</i>	on	ympyrän säde.

GeoGebra muutti yhtälöt itselleen sopivaan muotoon algebraikkunaansa (Kuva 4):



Kuva 4.

GeoGebra esittää tässä (Kuva 4) piin vakiona, mutta muuttaa kerrotun piin arvon esityksen numeeriseksi. Piirtoalueelle kuva muodostui seuraavasti (Kuva 5):



Kuva 5.

Tässä esitetään samalla ohjelmalla erään funktion (10) sini-integraalin kuvaaja (Kuva 6). GeoGebra määrittelee sinIntegral-funktion (9) Wolfram-kielen (Wolfram Language) mukaisesti (Wolfram MathWorld 2015, 1).

$$\text{Si}(z) \equiv \int_0^z \frac{\sin(t)}{t} dt \quad (9)$$

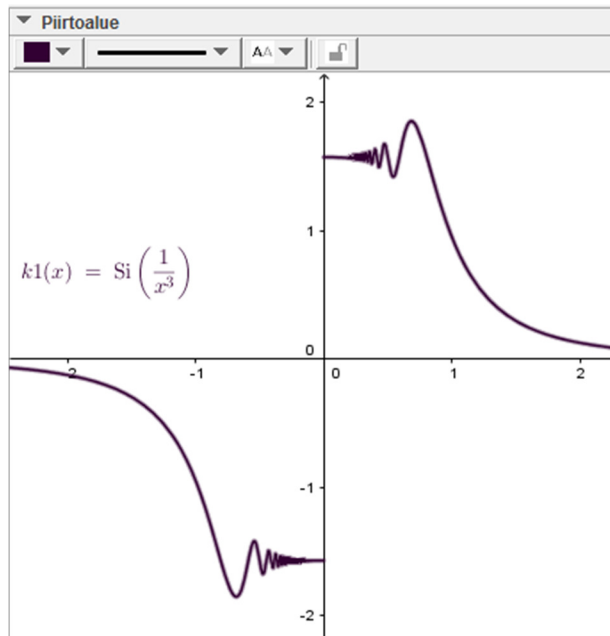
missä

Si	on	sini-integraalifunktio,
z	on	funktion muuttuja, kuvaa kompleksilukualuetta
\equiv	on	identtisyuden osoitin,
\int_0^z	on	integraali nollasta tetaan,
$\frac{\sin(t)}{t}$	on	integroitava lauseke,
dt	ilmoittaa	integroitavan muuttujan.

$$k1(x) = \text{Si}\left(\frac{1}{x^3}\right) \quad (10)$$

missä

$k1$	on	funktion nimi,
x	on	funktion muuttuja,
Si	on	sini-integraali,
$\frac{1}{x^3}$	on	muuttujan arvo.



Kuva 6.

2.2.3 Taulukkolaskentaohjelmat

Taulukkolaskentaohjelmat ovat kaksikulotteisia taulukoita, joihin voidaan syöttää erilaista dataa, numeroarvoja ja laskukaavoja. Taulukkolaskentaohjelmia voidaan pitää ruutupaperin dynaamisena metafora. Soluihin voidaan viitata suoraan tai suhteellisesti. Viimeksi mainittu ominaisuus tekee taulukkolaskentaohjelmista erittäin käytännöllisiä ja sopivia sekä arkiseen taloudenpitoon että tieteellisesti vaativiin tehtäviin ja tarkoituksiin. Yksi ensimmäisistä taulukkolaskentaohjelmista, VisiCalc (Bricklin 2015a,1), oli aikansa suosikki ja vaikutti henkilökohtaisten tietokoneiden suosion kasvuun.

Gnumericin (The GNOME Project Gnumeric 2015, 1) alkuperäinen kehittäjä Miguel de Icaza halusi luoda kilpailukykyisen ilmaiskäyttöisen ja monipuolisen tau-

lukkolaskentaohjelmiston sekä toiminnoiltaan että rajapinnoiltaan. Gnumeric tekee yhteistyötä tilastomatemattisen R-projektin (R Development Core Team 2015, 1) kanssa saadakseen laskentatarkkuudesta kilpailuvaltin (Wikipedia 2015c, 1). Esitän tässä Dan Bricklinin sivuilla olevan Visicalc-laskelman jonkun henkilön taloudenpidosta vuodelta 1979 Gnumericilla toistettuna (Kuva 7).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	HOME BUDGET, 1979								
2	MONTH			NOV.	DEC.				TOTAL
3	SALARY			2500,00	2500,00				30000,00
4	OTHER								
5									
6	INCOME			2500,00	2500,00				30000,00
7									
8	FOOD			400,00	400,00				4800,00
9	RENT			350,00	350,00				4200,00
10	HEAT			110,00	120,00				575,00
11	REC.			100,00	100,00				1200,00
12	TAXES			1000,00	1000,00				12000,00
13	ENTERTAIN			100,00	100,00				1200,00
14	MISC			100,00	100,00				1200,00
15	CAR			300,00	300,00				3600,00
16									
17	EXPENSES			2460,00	2470,00				28775,00
18									
19	REMAINDER			40,00	30,00				1225,00
20	SAVINGS			30,00	30,00				360,00

Kuva 7. (mukaillen Bricklin 2015b,1)

Kuvasta 7 nähdään, että taulukkoon voidaan vaivatta lisätä kuukausia ja meno- ja tuloeriä. Virheellisen arvon muuttaminen solussa oikeaksi korjaa myös summat automaattisesti.

2.2.4 Yleiskäyttöiset matemaattiset tietokoneohjelmat

Yleiskäyttöiset matemaattiset tietokoneohjelmat voidaan määritellä niin, etteivät ne ole vain yhtä tarkoitusta varten määriteltyjä, erityiskäyttöisiä matemaattisia ohjelmia. Yleiskäyttöisten matemaattiseen ohjelmien määrittely ei kuitenkaan voi olla täsmällistä, koska voi olla niin, että erityiskäyttöön tarkoitettua ohjelmaa voidaan käyttää johonkin toiseen tarkoitukseen menestyksellisesti (Grabmeier, Kaltofen & Weispfenning 2012, 261). Määrittelyksi riittänee suhteellinen ymmärrys siitä, että yleiskäyttöisellä matemaattisella tietokoneohjelmalla tarkoitetaan moneneen ja monenlaiseen tehtävään sopivaa.

Tässä työssä laajennetaan yleiskäyttöisen matemaattisen ohjelman käsitettä kattamaan myös erilaiset järjestelmäalustat, kuten eri käyttöjärjestelmät ja laitteistot

sekä toimivuuden ”paikallisena” eli henkilökohtaisella tietojenkäsittelylaitteella että verkkolaitteella. Tällä tarkoitetaan sitä, että ohjelma kattaa kohdotehtävänsä lisäksi yleisesti käytössä olevat laitteet ja menetelmät.

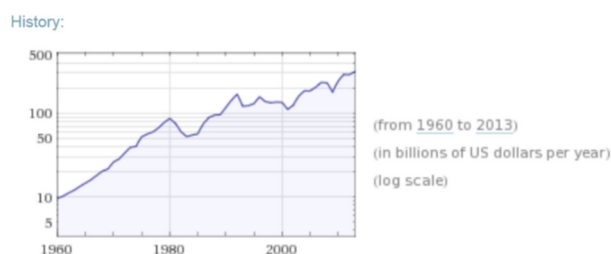
WolframAlpha® on ilmoituksensa mukaisesti ”Computational Knowledge Engine” eli laskennallinen tietokone, tai täsmällisemmin käännettynä laskennallinen tiedon tarjoaja. Sen ala kattaa laskennallisten ominaisuuksien lisäksi tietoja matematiikasta ja luonnontieteistä urheiluun ja musiikkiin ja moneen muuhun kulttuurin alueeseen. Syötin WolframAlpha® -järjestelmälle tehtäväksi laskea Ruotsin ja Suomen nimellisen bruttokansantuotteen erotus merkkijonolla (11):

$$GDP\ Sweden - GDP\ Finland \quad (11)$$

tulokseksi saatiin Maailmanpankin arvio vuodelle 2013 (12):

$$\$579.7\ billion - \$267.3\ billion = \$312.4\ billion\ (per\ year) \quad (12)$$

Tuloksena esitetään Suomen ja Ruotsin bruttokansantuotteiden erotusarvio vuodelta 2013: 312,4 miljardia dollaria. Tämän päivän (18.7.2015) dollarin kurssin (0.923361034) mukaan Ruotsin nimellinen bruttokansantuote oli tuona vuonna noin 296,8 miljardia euroa suurempi kuin Suomen bruttokansantuote. Lisäksi WolframAlpha® tarjosi dynaamisen logaritmisen kuvaajan maiden bruttokansantuotteiden erotuksesta vuosien 1960 ja 2013 välillä (Kuva 8):



Kuva 8. (WolframAlpha 2015, 1)

Vaikka WolframAlpha® on käsittelemänsä datan laajuudessa ja monipuolisuudessa edelläkävijä ja verrattavissa suuriin hakukonejärjestelmiin laskennallisen

toiminnallisuutensa laajuudessa, ei sillä ole henkilökohtaiselle tietojenkäsittelyvälineille tarkoitettuja paikallisia rinnakkaisjärjestelmiä. Tällaiset rinnakkaisjärjestelmät lienevätkin vielä mahdottomia WolframAlphan sisältämän suuren tiedon määrän vuoksi. Wolfram Researchilla on kuitenkin erilaisia, lähinnä maksullisessa Mathematica-ohjelmassaan erilaisia käyttöliittymiä ja sovelluksia kuten Mathematica-Online, joilla voidaan etsiä tietoa yhtä laajasti kuin WolframAlphan avulla.

GeoGebra, Mathcad (PTC, Inc. 2015, 1), Mathematica (Wolfram Group LLC 2015b,1), Maple (Waterloo Maple Inc. 2015, 1), Maxima (MIT Project MAC 2015, 1) ja Sage (SageMath Project 2015, 1) tarjoavat yleiskäyttöisinä ohjelmina laskentapalveluitaan sekä paikallisesti että verkossa.

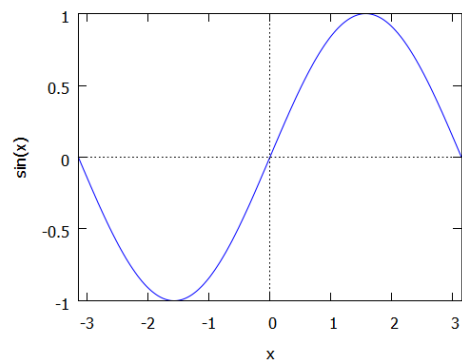
wxMaxima on Maximan graafinen käyttöliittymä. wxMaximalla sinikäyrän piirtäminen tehdään komennolla (13):

$$\text{plot2d}(\sin(x), [x, -\%pi, \%pi]); \quad (13)$$

missä

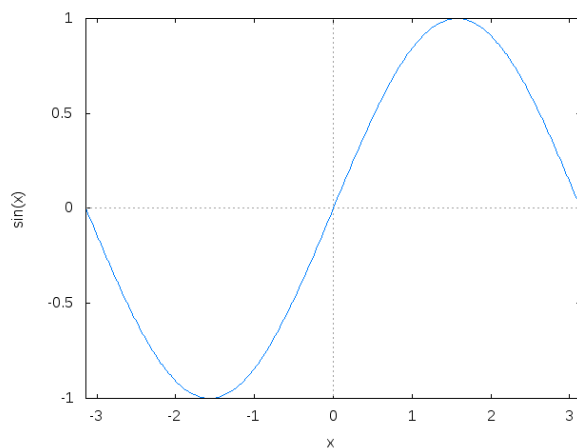
<i>plot2d</i>	on	funktion kuvaajan luontikomento,
<i>sin</i>	on	trigonometrinen sinifunktio,
<i>x</i>	on	muuttuja,
<i>-%pi</i> sekä <i>%pi</i>	ovat	funktion muuttujan rajat $-\pi$ ja π .

Tulos esitetään kuvaajana (kuva 9)



Kuva 9.

Maximan WEB-laskentapalvelulle (verkko-osoitteessa <http://maxima-online.org>) kaaviontekokomento esitetään täsmälleen samalla tavalla kuin wxMaximalle ja tuloskaaviokin (Kuva 10) on samantapainen kuin wxMaximalla (kuva 9).



Kuva 10. (Maxima-Online 2015, 1)

Maxima-ohjelmistoperhe on paitsi laskenta-alueeltaan myös opiskelijan käytännön laskentatarpeiden kannalta monipuolisesti alustariippumaton. Tällä tarkoitan sitä, ettei Maximaa ole sidottu yhteen käyttöjärjestelmään tai paikallisesti asennetun ohjelman käyttöön.

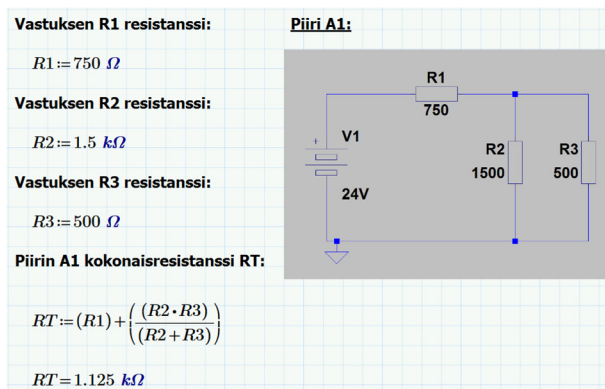
2.2.5 Erityiskäyttöiset matemaattiset tietokoneohjelmat

Erityiskäyttöisillä matemaattisilla tietokoneohjelmilla tarkoitetaan johonkin matematiikan erityisalaan liittyviä ohjelmia tai sovelletun matematiikan ohjelmia jollain

tieteen, taiteen tai tekniikan alalla. Tällaisia matematiikan erityisaloja ovat esimerkiksi kombinatoriikka (ACE), lukuteoria (ALGEB), rinnakkaislaskenta (Cannes), finiittiset ryhmät (C-Meataxe), kommutatiivinen algebra (CoCoA), algebran algoritmit (FELIX), ryhmäteoria (GAP), Lie-ryhmät (LIE). Soveltavan matematiikan alalta mainitaan kristallografiset ryhmät (CARAT). (Grabmeier, Kaltofen & Weispfenning 2012, 345–458).

Mathcad on yleinen tekniikassa ja luonnontieteissä käytetty laskentaohjelma. Se toimii pääosin numeerisena laskenta-alustana ja matemaattisena muistikirjana. Muilla tieteenaloilla, kuten tähtitieteessä, elektroniikassa, taloustieteissä, lääketieteessä ja arkkitehtuurissa on suuri määrä erilaisia ja eritasoisia matemaattisia apuvälineitä.

Esimerkkikuvassa (Kuva 11) on yksinkertainen sähköisen piirin kokonaisvastuksen laskuesimerkki. Piirin kuva on luotu LT spice IV:n versiolla 4.23d ja laskenta on tehty PTC Mathcad Express Prime 3.1-ohjelmiston avulla. R1 tarkoittaa ensimmäistä vastusta, R2 toista ja R3 kolmatta. RT on kokonaisvastus.



Kuva 11.

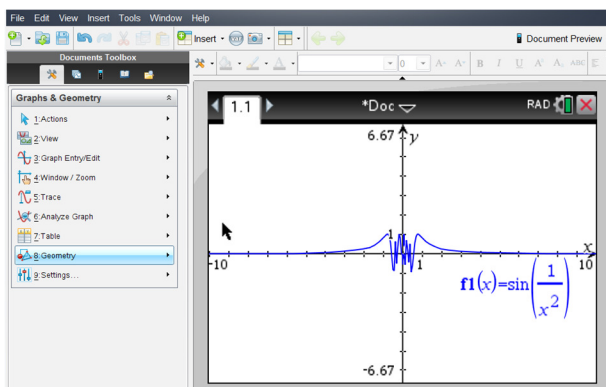
2.2.6 Laskimet ja matemaattiset muistikirjaohjelmat

Laskimella tarkoitetaan tässä työssä lähinnä henkilökohtaisessa tietokoneessa toimivia ohjelmallisia järjestelmiä, joiden käyttäminen on vertauskuvallista suhteessa perinteisiin mekaanisiin tai elektroniisiin laskimiin tai kynään ja paperiin. Laskimia on erilaisia: toiset suoriutuvat yksinkertaisesta aritmetiikasta ja toiset

monimutkaisestakin matemaattisesta tehtävänannosta. Jotkut laskimet pystyvät tuottamaan graafisia esityksiä ja geometrisia kuvioita. Henkilökohtaisessa tietokoneessa toimivalla laskinohjelmalla on käytössään yleensä myös käyttöjärjestelmäpalveluita, kuten paperille tulostaminen, leikepöytä jne. Esimerkkinä laskinohjelmista esitän tässä kaksi erityyppistä sovellusta: TI-Nspire™ CX CAS Student Softwaren (Texas Instruments 2015, 1) ja MyScript Calculator Handwritingin (Vision Objects 2015, 1).

Texas Instrumentsin valmistama laskinohjelmisto on monipuolinen, opiskelijalle sopiva tietokonealgebrajärjestelmä. Tässä työssä käytetty ohjelmisto on aikarajoitettu kokeiluversio. Ohjelmistolle annettiin tehtäväksi kuvata graafisesti (Kuva 12) funktio (14).

$$\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad (14)$$



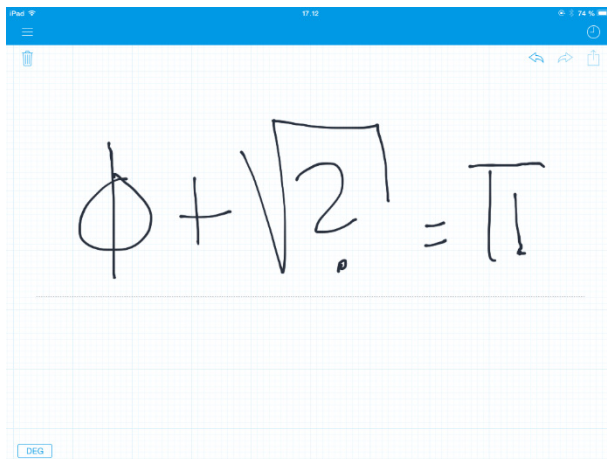
Kuva 12.

MyScript Calculator on käsinkirjoittamiseen ja kirjoituksen tunnistamiseen perustuva ilmaiskäyttöinen laskinsovellus erilaisille mobiililaitteille ja kosketusnäytöille. MyScript Calculatorille esitettiin sormella kirjoittamalla (Kuva 13) pyyntö ratkaista tuntematon tekijä yhtälöstä (15):

$$\varphi + \sqrt{?} = \pi \quad (15)$$

missä

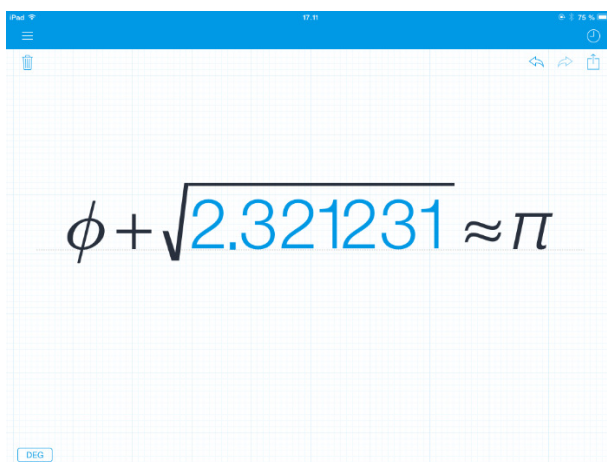
φ	on	suhdeluku, $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$, 1,61803 ...
$\sqrt{\quad}$	on	neliöjuuren symboli,
π	on	piin vakio, 3,14159 ...,
?	on	tuntematon.



A screenshot of the MyScript Calculator app on an iPad. The screen shows a handwritten equation: $\phi + \sqrt{2} = \pi$. The symbols are drawn in black ink on a light blue grid background. At the bottom left, there is a small button labeled 'DEG'.

Kuva 13.

MyScript Calculator ratkaisi ongelman seuraavasti (Kuva 14) ja esitti tuntemattoman tekijän likiarvoksi 2,321231:



A screenshot of the MyScript Calculator app on an iPad. The screen shows the equation $\phi + \sqrt{2.321231} \approx \pi$. The number 2.321231 is highlighted in blue, indicating it is the result of the calculation. At the bottom left, there is a small button labeled 'DEG'.

Kuva 14.

Matemaattiset muistikirjaohjelmat ovat sovelluksia, joihin voidaan tallentaa matemaattisten operaatioiden lisäksi tekstiä ja grafiikkaa. Tallennettuja operaatioita

voidaan muokata ja suorittaa uudelleen myöhempänä ajankohtana. Tällainen toiminnallisuus on monin tavoin hyödyllinen opiskelijalle. Se auttaa jaksottamaan erilaisten tehtävien tekoa ja auttaa esimerkiksi esityksien luomisessa (Grabmeier, Kaltofen & Weispenning 2012, 322–323). Matemaattisen muistikirjan ominaisuuksia on esimerkiksi MathCadissä (Kuva 11).

2.2.7 Ilmaiskäyttöiset matemaattiset ohjelmat

Ohjelmiston käytön hinta tai ilmaisuus on sidoksissa sen lisenssiin ja tyyppiin. Omistaja voi tarjota ohjelmistonsa ilmaiseen käyttöön tietyn ajaksi (Wolfram Mathematica) esimerkiksi tutustumista varten. Ohjelmisto voidaan myös jakaa ilmaiseksi, riisuttuna versiona, jolloin ohjelmasta on poistettu tiettyjä ominaisuuksia. PTC Mathcad Prime on tällainen ohjelmisto.

Sellaiset lisenssityypit, kuten Public Domain, Freeware, Apache, MPL, BSD, ja GPL eri versioineen ymmärretään yleisesti ilmaisiksi ja ilmaiskäyttöisiksi. Yhteistä näille lisenssityypeille on se, että niitä voidaan ilman taloudellisia sitoumuksia käyttää, kopioida, muokata ja jakaa edelleen. Ilmainen ja vapaa ohjelmisto eroaa ilmaisesta ohjelmistosta siten, että ilmaista ohjelmistoa ei välttämättä saa tutkia tai muokata vapaasti. Opiskelijalle tällaiset lisenssityypit voivat olla eriasteisen ilmaisuutensa ansiosta mielenkiintoisia.

Sage, Maxima ja sen graafinen käyttöliittymä wxMaxima ovat GPL-lisenssin alaisia ohjelmistoja. GeoGebra on lisenssityypiltään GGN-CLA, GPL CC-BY-NC-SA eli se on avoimen lähdekoodin ilmaiskäyttöinen ohjelmisto ei-kaupallisille käyttäjille. Se on kuitenkin tarkoitettu lähinnä yksityiseen ja opetuskäyttöön (Hohenwarter & al 2015b, 1).

3 MATEMAATTISTEN TIETOKONEOHJELMIEN TARKASTELU

Tässä on valittu tarkasteltavaksi muutama matemaattinen ohjelmisto tietyin kriteerein. Tärkeitä kriteereitä ovat suoraviivainen ja tietokoneen käyttöjärjestelmän

tapainen käyttö ilman ohjelmantekijöiden omaperäisiä käyttölogiikoita, asennuksen yksinkertaisuus ilman erillisiä lähdekooditiedostojen kääntämisiä sekä käytön ilmaisuus ja lisenssityyppi. Kriteerit täyttivät ainakin pääosin tietokonealgebrajärjestelmäluonteiset Maxima- ja Sage-ohjelmistot, numeeriseen laskentaan tarkoitettu Scilab-ohjelmisto, lähinnä geometriaan keskittyvä GeoGebra, yleislaskentaympäristö Wolfram Alpha, tilasto-ohjelmisto PSPP, taulukkolaskentaohjelmisto Gnumeric, matemaattinen muistikirjasovellus SMath Studio Desktop, WEB-palvelut Derivative Calculator ja Integral Calculator sekä mobiililaitteisiin tarkoitettu MyScript Calculator.

Käyttöjärjestelmät, kuten MathBuntu, on jätetty pois tarkastelusta sen vuoksi, että se sisältää kokoelman matemaattisia tietokoneohjelmia, jotka voidaan erikseen asentaa yleisiin Linux- ja Windows-järjestelmiin varsin vaivattomasti. Myös erilaiset sovellukset, jotka ovat lähinnä ohjelmointikieliä (kuten Julia, R ja Python muunneltuihin) jätettiin pois tarkastelusta. LibreOffice-toimisto-ohjelmapaketin jätin pois sen vuoksi, että ohjelmisto ei kokonaisuudessaan ollut matematiikkaan ja laskemiseen tarkoitettu. Rinnakkaislaskenta algoritmisuunnitteluineen ja menetelmineen olisi ollut tähän työhön liian laaja aihe mukaan otettavaksi.

3.1 Tietokonealgebrajärjestelmät

Ohjelmien toiminnot esitellään pääpiirteittäin. Maximan ja Sagen toimintaa tutkitaan muutaman matemaattisen ongelman avulla sekä matemaattisesta että opiskelijatyön näkökulmasta. Sagen merkistön saamiseksi suomalaiseksi oli siirryttävä Sagen komentorivikäyttöliittymään painamalla Ctrl+F1. Oletuskirjautuminen tehdään käyttäjänimellä sage ja salasananalla sage. .xinitrc-tiedostoon ylimmälle riville oli lisättävä komento *setxkbmap=fi*.

Ensiksi tutkittiin ohjelmien kykyä laskea sarjan summa (16):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{7}\right)^n \quad (16)$$

missä

Σ	on	summan symboli,
n	on	muuttuja,
$n = 0$	on	muuttujan n alaraja, nolla,
∞	on	muuttujan n yläraja, positiivinen ääretön,
$\frac{5}{7^n}$	edustaa	yhteenlaskettavien termien lauseketta.

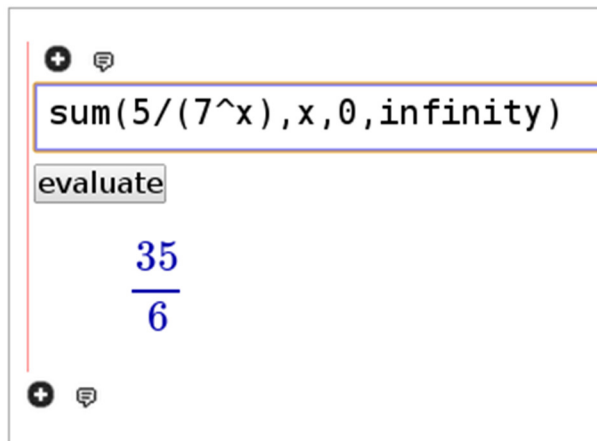
wxMaximalle Windows 7:ssä syöte (16) esitetään muodossa `ev(sum(5/(7^n),n,0,inf), simpsum);` (Kuva 15).

```
(%i1) ev(sum(5/(7^n),n,0,inf),simpsum);
(%o1) 35/6
```

Kuva 15.

Kuvassa 15 on syötetty Maximan "input 1" -riville (%i1) komennon, jossa `ev` on evaluointimuotoa määrittävä funktio ja sen määreenä on `simpsum`, joka pyrkii yksikertaistamaan eli simplifioimaan summan. `Sum` on summafunktion nimi, `(5/(7^n))` on summattava lauseke, `n` on käytettävä muuttuja, `0` on muuttujan n alaraja ja `inf` yläraja. Tulokseksi output 1:ssä (%o1) saatiin $35/6$.

Sama tehtävä (16) Oraclen VM VirtualBoxissa CentOS:iin esiasennetulla Sagen levykuvalla (`sage-6.7.ova`) ja syötteellä `sum(5/(7^x),x,0,infinity)` antoi saman tuloksen kuin Maximallakin suoritettuna (Kuva 16).



Kuva 16.

Syöttömuoto (16) on muuten samanlainen kuin Maximankin (Kuva 15), sillä poikkeuksella, että Sage tulostaa vastauksen murtolukumuodossa ilman erillistä evaluointimäärittystäkin (vrt. Kuva 15), muuttujaksi kelpasi muuttujan n sijasta vain muuttuja x ja ääretön ilmaistiin "infinity" Maximankin "inf"-ilmauksen sijasta.

Molempien järjestelmien kieli ja notaatio ovat helposti ymmärrettäviä ja ne ovat lähellä toisiaan. Seuraavassa taulukossa (Taulukko 1) on muutamia yleisiä matemaattisia toimintoja notaatioineen aakkosjärjestyksessä kummallakin sovelluksella ratkaistuna. Esitetyissä taulukoissa i on imaginaariyksikkö.

Matemaattiset ohjelmat laskevat annettujen ja käytössä olevien algoritmien, eivätkä matematiikan aksiomaattisen järjestelmän mukaisesti. Ainakin GeoGebra, Maxima, Sage ja Wolfram Alpha laskevat tehtävästä neliöjuuri luvusta yksi jaetuna imaginaariyksiköllä tulokseksi -1 , vaikka tuloksena pitäisi olla joukko, joka koostuu alkioista -1 ja 1 .

Taulukko 1.

Toiminto	Esimerkki	Maxima	Sage
alkulukutestaus	<code>isprime(97)</code>	<code>primep(97); = true</code>	<code>is_prime(97) = True</code>
delta-funktio	$\delta(1)$	<code>x: 1\$if x = 0 then inf else 0;</code> <code>= 0</code>	<code>dirac_delta(1)</code> <code>= 0</code>
derivaatta	$\frac{d}{dx}x^2$	<code>diff(x^2, x);</code> <code>= 2x</code>	<code>diff(x^2, x)</code> <code>= 2x</code>

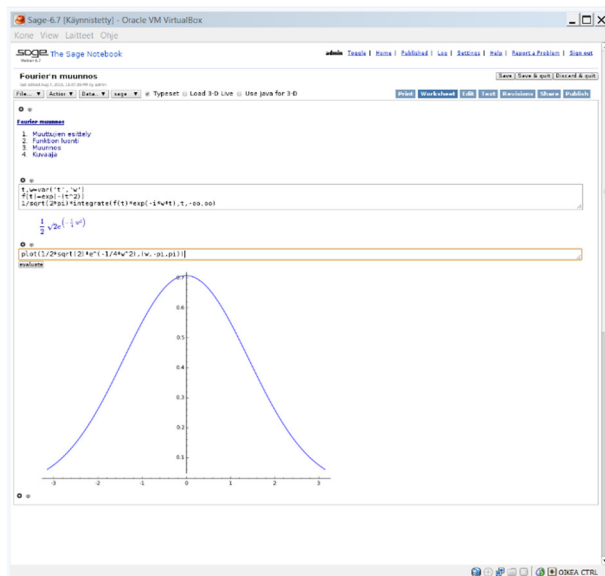
determinantti	$\det \begin{bmatrix} e & \pi \\ i & 7 \end{bmatrix}$	determinant(matrix([%e,%pi],[%i,7])); = $7e - i\pi$	$\det(\text{matrix}([\text{e}, \text{pi}], [\text{i}, 7])))$ = $-i\pi + 7e$
differenssi	$\Delta(f(n+1) = f(n))$	load(solve_rec)\$ A: $f[n-1] = f[n]$ \$ solve_rec(A, f[n]); = $f_n = \%k_1$	(maxima) load(solve_rec)\$ A: $f[n-1] = f[n]$ \$ solve_rec(A, f[n]); = $f_n = \%k[1]$
differentiaaliyh- tälö	$y' - 2y = 0$	ode2('diff(y, x) - 2 * y = 0, y, x); = $y = \%ce^{2x}$	$x = \text{var}('x'); y = \text{function}('y', x)$ desolve(diff(y, x) - 2 * y, y) = Ce^{2x}
epäyhtälö	$a \leq b$	$a <= b; = a <= b$	$a = \text{var}('a'); b = \text{var}('b'); a <= b$ = $a \leq b$
erotus	$1 - 2$	$1 - 2;$ = -1	$1 - 2$ = -1
Fast Fourier- muunnos	FFT(-i, 1)	load(fft)\$fft([-%i, 1]); = $[0.5 - 0.5 \cdot \%i, -0.5 \cdot \%i - 0.5]$	(maxima) load(fft)\$fft([-%i, 1]); = $[0.5 - 0.5 \cdot \%i, -0.5 \cdot \%i - 0.5]$
for	for $i = 1$ to 10 do $a + i$	a: 0\$for $i: 1$ thru 10 do a: $a + i$ \$a; = 55	$a = 0$ for i in range(1,11): $a = a + i$ a = 55
Fourier-muunnos	$F_t(e^{-t^2})$	$f(t) := \%e^{-(t^2)}$ $1/\text{sqrt}(2 \cdot \%pi) \cdot \text{integrate}(f(t) \cdot$ $\exp(-\%i \cdot w \cdot t), t, -\text{inf}, \text{inf});$ $= \frac{e^{-\frac{\omega^2}{4}}}{\sqrt{2}}$	$t, w = \text{var}('t', 'omega')$ $f(t) = \exp(-(t^2))$ $1/\text{sqrt}(2 * pi) * \text{integrate}(f(t)$ $* \exp(-i * w * t), t, -\text{oo}, \text{oo})$ $= \frac{1}{2} \sqrt{2} e^{(-\frac{1}{4}\omega^2)}$
funktion luonti	$f(x) = x^2$	$f(x) := x^2$	$f(x) = x^2$
Heaviside-funktio	$\theta(-1)$	-	$\text{heaviside}(-1) = 0$
hyperbolinen ko- sini	$\cosh(0)$	$\cosh(0);$ = 1	$\cosh(0)$ = 1
hyperbolinen sini	$\sinh\left(\frac{\pi}{e}\right)$	$\sin(\%pi/\%e);$ = $\sinh(\%e^{(-1)}\pi)$	$\sinh(\text{pi}/e)$ = $\sinh(\pi e^{(-1)})$
hyperbolinen tan- gentti	$\tanh\left(\frac{i\pi}{2}\right)$	$\tanh((\%i \cdot \%pi)/2);$ = ∞	$\tanh((i * \pi) / 2)$ = ∞
if then else	$a = 1, b = 2$ if $a < b$ then b else a	a: 1\$b: 2\$if $a < b$ then b else a ; = 2	$a = 1; b = 2$ if $a < b$: print b else: print a = 2
integraali	$\int 2x \, dx$	$\text{integrate}(2 * x, x);$ = x^2	$\text{integrate}(2 * x, x)$ = x^2
itseisarvo	$ i $	$\text{abs}(\%i);$ = 1	$\text{abs}(i)$ = 1
jakoäännös	modulo(10,3)	$\text{mod}(10,3);$ = 1	$\text{mod}(10,3)$ = 1

kaksikantainen logaritmi	$\log_2(1024)$	<code>float(log(1024)/log(2));</code> = 10.0	<code>log(1024,2)</code> = 10
kattofunktio	<code>ceiling(pi)</code>	<code>ceiling(%pi)</code> = 4	<code>ceil(pi)</code> = 4
kertoma	7!	7!; = 5040	<code>factorial(7)</code> = 5040
konvoluutio	<code>convolve([1][2])</code>	[1 · 2] = [2]	<code>convolution([1], [2])</code> = [2]
kosekanti	$\csc\left(\frac{\pi}{4}\right)$	<code>csc(%pi/4);</code> = $\sqrt{2}$	<code>csc(pi/4)</code> = $\sqrt{2}$
kosini	$\cos\left(\frac{2}{\pi}\right)$	<code>cos(2/%pi);</code> = $\cos\left(\frac{2}{\pi}\right)$	<code>cos(2/pi)</code> = $\cos\left(\frac{2}{\pi}\right)$
kotangenti	$\cot\left(\frac{\pi}{4}\right)$	<code>cot(%pi/4);</code> = 1	<code>cot(pi/4)</code> = 1
Käänteinen Fast Fourier-muunnos	$\text{FFT}^{-1}(0.5 - 0.5i, -0.5i - 0.5)$	<code>load(fft)\$inverse_fft([0.5 - 0.5 * %i, -0.5 * %i - 0.5])</code> = [-1.0%i, 1.0]	(maxima) <code>load(fft)\$inverse_fft([0.5 - 0.5 * %i, -0.5 * %i - 0.5])</code> = [-1.0%i, 1.0]
Käänteinen Fourier-muunnos	$F_t^{-1}\left(\frac{e^{-\frac{\omega^2}{4}}}{\sqrt{2}}\right)$	$F(w) := (e^{-w^2/4})/\sqrt{2}$ $1/\sqrt{2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} F(w) \cdot \exp(-i \cdot w \cdot t), w, -\text{inf}, \text{inf});$ = e^{-t^2}	$w, t = \text{var}('omega', 't')$ $F(w) = \exp(-w^2/4)/\sqrt{2}$ $1/\sqrt{2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} F(w) \cdot \exp(-i \cdot w \cdot t), w, -\text{oo}, \text{oo})$ = e^{-t^2}
käänteinen Laplace-muunnos	$\mathcal{L}_t^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right)$	<code>ilt(1/(s+1), s, t);</code> = $\%e^{-t}$	<code>inverse_laplace(1/(s+1), t, s)</code> = $e^{(-t)}$
Laplace-muunnos	$\mathcal{L}_t(e^{-t})$	<code>laplace(%e^(-t), t, s);</code> = $\frac{1}{s+1}$	$s = \text{var}('s'); t = \text{var}('t');$ $= \exp(-t); f.laplace(t, s)$ = $\frac{1}{s+1}$
lattiafunktio	<code>floor(pi)</code>	<code>floor(%pi)</code> = 3	<code>floor(pi)</code> = 3
listan luonti	<code>makelist(pi/e, 1,2)</code>	L: [%pi/%e, 1,2]; = L = [$e^{-1}\pi$, 1,2]	L = [pi/e, 1,2] L = [πe^{-1} , 1,2]
logaritmi	<code>log(e)</code>	<code>log(%e)=1</code>	<code>log(e)=1</code>
matriisin luonti	$M = \begin{bmatrix} e & \pi \\ i & 7 \end{bmatrix}$	M: <code>matrix([%e, %pi], [%i, 7]);</code> = $\begin{bmatrix} e & \pi \\ i & 7 \end{bmatrix}$	M = <code>matrix([e, pi], [i, 7])</code> M = $\begin{pmatrix} e & \pi \\ i & 7 \end{pmatrix}$
n:s juuri	$\sqrt[4]{16}$	<code>nthroot(16,4);</code> = 2	$16^{(1/4)}$ = 2
neliöjuuri	$\sqrt{2}$	<code>sqrt(2);</code> = $\sqrt{2}$	<code>sqrt(2)</code> = $\sqrt{2}$
n-kantainen logaritmi	$\log_3(9)$	<code>float(log(9)/log(3))</code> = 2.0	<code>log(9,3)</code> = 2
numeerinen arvo	<code>numerical(gamma)</code>	<code>float(%gamma);</code> = 0.5772156649015329	<code>float(euler_gamma)</code> = 0.577215664902
osamäärä	$\frac{\sqrt{1}}{i}$	<code>sqrt(1)/%i;</code> = -%i	<code>sqrt(1)/i</code> = -i

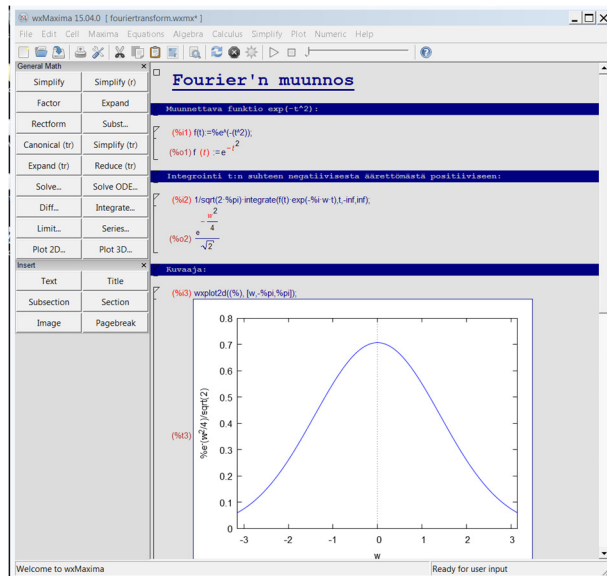
yksinkertaistus	$\text{simplify}((x + 2) * (x - 2))$	$\text{ratsimp}((x + 2) * (x - 2));$ $= x^2 - 4$	$\text{simplify}((x + 2) * (x - 2))$ $= (x + 2) * (x - 2)$
-----------------	--------------------------------------	---	---

wxMaxima ja SageMath ovat molemmat graafisia käyttöliittymiä matemaattisille ohjelmistoille. Siinä missä wxMaxima käyttää vain Maxima-ohjelmistoa laskentaansa SageMathilla voidaan käyttää sekä Sage-järjestelmää että useita muita matemaattisia ohjelmistoja. Näitä ovat Gap, Gp, Maxima, Python, R ja Singular. SageMathilla voidaan hyödyntää myös muutamia muita tietokonejärjestelmän käytössä olevia asennettuja ohjelmia: Axiom, Fricas, Kash, Macaulay2, Magma, Maple, Mathematica, Matlab, Mupad ja Octave. Lisäksi Sagessa voidaan käyttää kuvauskieliä LaTeX ja HTML matemaattisen esityksen ulkoasun muokkaamiseen sekä Pythonin eri variaatioita sekä myös eräitä muita ohjelmointikieliä laskemiseen.

wxMaxima ja SageMath ovat molemmat myös matemaattisina muistikirjaohjelmina toimivia ja siten osaltaan sopivia opetus- ja opiskelukäyttöön. Molempiin voidaan syöttää matematiikkaa tukevaa tekstiä, kaavoja ja molemmilla voidaan muodostaa kaavioita ja kuvaajia sekä liittää kuvia. Niiden käyttöliittymät ovat kuitenkin erilaisia. Sagen käyttöliittymä (Kuva 17) on pelkistetty soluista rakentuva, komennoilla ja hiirellä ohjattava. wxMaximan käyttöliittymä (Kuva 18) on sekä valikko- että komentopainike- ja komento-ohjattava.



Kuva 17.



Kuva 18.

Kummankaan käyttöliittymän kielivalikoimassa ei ole (vielä) suomea. Oletuskie-
 lenä molemmissa on englanti. wxMaximan graafisen muistikirjakäyttöliittymän li-
 säksi siinä voidaan käyttää Maximan komentorivipohjaista käyttöliittymää ja al-
 gebralaskinta osoitteessa <http://maxima-online.org>. Maxima-online.org mahdol-
 listaa myös laskutoimituksen jakamisen kautta tallentamalla sen tietokan-
 taansa. Esimerkkinä tästä on Fourier-muunnoslaskelma osoitteessa [http://ma-
 xima-online.org/?inc=r50379946](http://ma-

 xima-online.org/?inc=r50379946). Laskelma voidaan myös tulostaa kuvatiedos-
 toksi tai tuoda wxMaxima-muodossa paikallisesti tarkasteltavaksi. Sagen muisti-
 kirjakäyttöliittymän lisäksi siinä on komentoriviliittymä, pilvipalvelu ja solupalvelin.
 WEB-osoitteessa <https://sagecell.sagemath.org> olevan solupalvelimen avulla
 voidaan luoda laskelmiin väliaikaisia tai pysyviä linkkejä, kuten Maximan verkko-
 palvelussakin. Esimerkkinä tästä on väliaikaislinkki eräästä laskelmasta osoit-
 teessa <https://sagecell.sagemath.org/?q=ccazsh>.

Sagen matemaattisten toimintojen ohjaus on komentorivipohjaista. Sagen käyt-
 töä helpottaa kattava ohjetiedosto ja WEBin laaja materiaaliarjonta sekä etenkin
 sarkaimella täydentäminen. Sarkaimen käyttö keskeneräisessä komennossa tuo
 valikossa näkyviin mahdolliset vaihtoehdot ja mahdollistaa oikean komennon ja
 kieliasun käytön. wxMaximan valikkorakenne jaottelee matemaattisen sisältönsä

yhtälöihin (Equations), algebraan (Algebra), differentiaali- ja integraalilaskentaan (Calculus), yksinkertaistuksiin (Simplify), kaavioihin (Plot) ja numeerisiin toimintoihin (Numeric) (Taulukko 2). Valikkojen lisäksi käyttäjän apuna on valinnainen komentorivipainikenäyttö (Kuva 18).

Taulukko 2.

Equations	Algebra	Calculus
Solve...	Generate Matrix...	Integrate...
Solve (to_poly)...	Generate Matrix from Expression...	Risch Integration...
Find Root	Enter Matrix...	Change Variable...
Roots of Polynomial (bfloat)	Invert Matrix	Differentiate...
Roots of Polynomial (Real)	Characteristic Polynomial...	Find Limit...
Solve Linear System...	Determinant	Find Minimum...
Solve Algebraic System...	Eigenvalues	Get Series...
Eliminate Variable	Eigenvectors	Pade Approximation...
Solve ODE...	Adjoint Matrix	Calculate Sum...
Initial Value Problem (1)...	Transpose Matrix	Calculate Product...
Initial Value Problem (2)...	Make List...	Laplace Transform...
Solve ODE with Laplace...	Apply to List...	Inverse Laplace Transform...
At Value...	Map to List...	Greatest Common Divisor...
	Map to Matrix...	Least Common Multiple...
		Divide Polynomials...
		Partial Fractions...
		Continued Fraction
Simplify	Plot	Numeric
Simplify Expression	Plot 2d...	Toggle Numeric Output
Simplify Radicals	Plot 3d...	To Float
Factor Expression	Plot Format...	To Bfloat
Factor Complex		To Numeric
Expand Expression		Set Precision...
Expand Logarithms		
Contract Logarithms		
Factorials and Gamma		
Trigonometric Simplification		
Complex Simplification		
Substitute...		
Evaluate Noun Forms		
Toggle Algebraic Flag		
Add Algebraic Equality...		
Modulus Computation...		

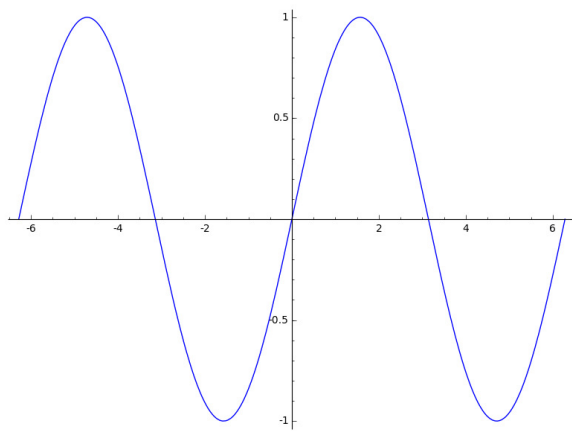
Perusfunktioiden kuvaajien piirtäminen näytölle ja osaksi sivua (eng. worksheet) on Sagella yksinkertaista. Esimerkkinä esitetään siniaallon kuvaajan piirtäminen (17).

```
plot(sin, -2 * pi, 2 * pi) (17)
```

missä

plot	on	kuvaajan piirtokäskey,
sin	on	kuvattava funktio,
-2 * pi	on	kuvaajan vasen raja,
2 * pi	on	kuvaajan oikea raja.

Kuvaaja piiryy seuraavasti (Kuva 19).



Kuva 19.

Sama kuvaaja saadaan osaksi asiakirjaa wxMaximalla aikaan syötteellä (18):

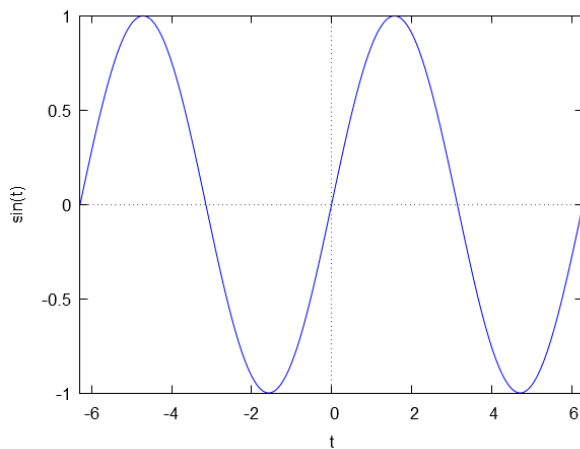
```
wxplot2d(sin(t), [t, -2 * pi, 2 * pi]) (18)
```

missä

wxplot2d	on	kuvaajan piirtokäskey,
----------	----	------------------------

\sin	on	kuvattava funktio,
t	on	muuttuja,
$-2 \cdot \pi$	on	kuvaajan vasen raja,
$2 \cdot \pi$	on	kuvaajan oikea raja.

wxMaximan piirtämä siniaallon kuvaaja (Kuva 19) on kaavioalueella varsin samankaltainen kuin Sagellakin piirretty kuvaaja (Kuva 20).



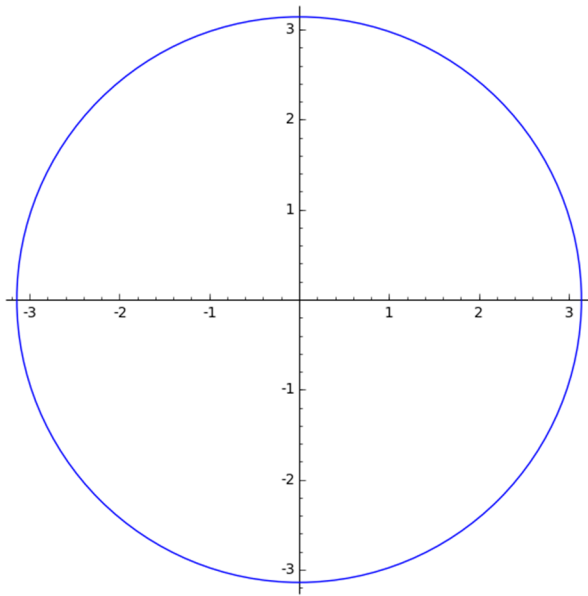
Kuva 20.

Sagessa säteeltään yhden pituinen ympyrä (Kuva 21) voidaan piirtää komennolla (19).

`circle((0,0),1)` (19)

missä

<code>circle</code>	on	ympyrän piirtokäske,
<code>(0,0)</code>	on	origo,
<code>1</code>	on	säteen pituus.



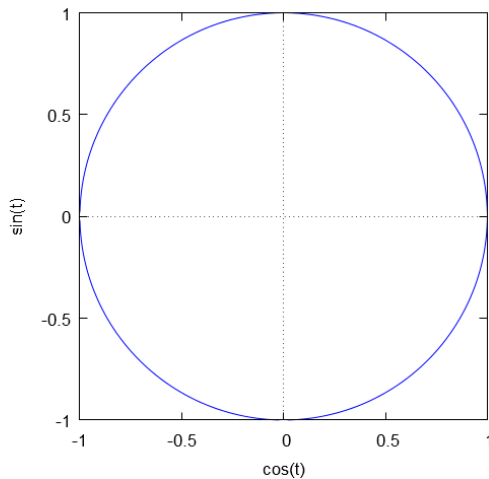
Kuva 21.

Säteeltään yhden pituinen ympyrä (Kuva 22) voidaan wxMaximassa piirtää parametrisesti wxplot2d-funktiolla (20).

```
wxplot2d([parametric, cos(t), sin(t), [t, -%pi, %pi], [same_xy]])$ (20)
```

missä

wxplot2d	on	kuvaajan piirtokäske,
parametric	on	kuvattava funktio,
cos(t) ja sin(t)	ovat	käyrän x- ja y-komponentit,
t	on	parametri,
-%pi	on	kuvatun alueen vasen raja,
%pi	on	kuvatun alueen oikea raja,
same_xy	on	esityksen symmetriavaatimusmääre,
\$	on	komennon loppumerkki.



Kuva 22.

Sagessa voidaan käyttää plot-komennon sijaan muiden muassa arc-, ellipse-, line-, circle- ja polygon -komentoja erilaisten käyrien, ympyröiden ja monikulmioiden piirtoon (The Sage Development Team 2015, 50). wxMaximassa samankaltainen toiminnallisuus saavutetaan lataamalla Draw-lisäosa. Draw-lisäosan avulla voidaan piirtää wxdraw2d- tai wxdraw3d-komentojen parametreina esimerkiksi ellipsi (ellipse), monikulmio (polygon), suorakulmio (rectangle), nelikulmio (quadrilateral), kolmio (triangle) ja vektori (vector) (Dodier 2015, 50).

Hiukan monimutkaisemman kaksiulotteisen kuvaajan piirto perusasetuksilla voidaan Sagella toteuttaa varsin yksinkertaisesti (21). Tässä käytetään esimerkkinä hieman muokattuna Maximian käsikirjassa (Sourceforge 2015, 1) olevaa perhoskuviota (Kuva 23).

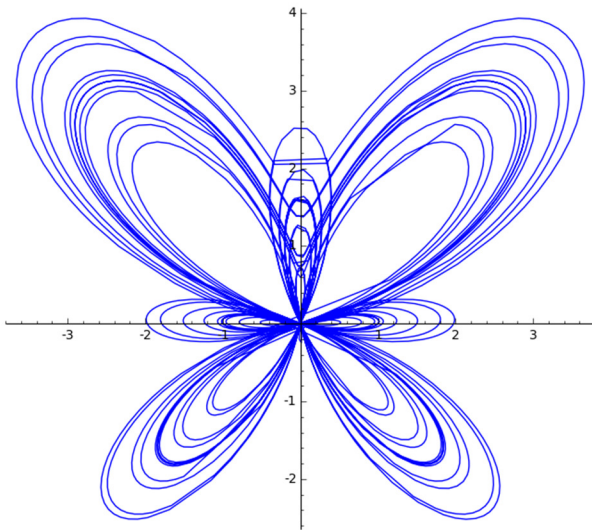
$$t = \text{var}('t'); r = (\exp(\cos(t)) - 2 * \cos(4 * t) - \sin(t/12)^3)$$

$$\text{parametric_plot}((r * \sin(t), r * \cos(t)), (t, -12 * \text{pi}, 12 * \text{pi})) \quad (21)$$

missä

t on parametri,
 r on funktion nimi,
 $(\exp(\cos(t)) - 2 * \cos(4 *$

$t) - \sin(t/12)^3$ on funktio,
`parametric_plot` on piirtokomento,
 $r * \sin(t)$ ja $r * \cos(t)$ ovat käyrän x - ja y -komponentit,
 $-12 * \pi$ ja $12 * \pi$ ovat piirtoalueen rajat.



Kuva 23.

wxMaxima piirtää perhosen (22) kuvan (Kuva 24) hieman tarkemmin kuin Sage, mikä voidaan kuvia tarkastelemalla ja vertaamalla todeta.

```

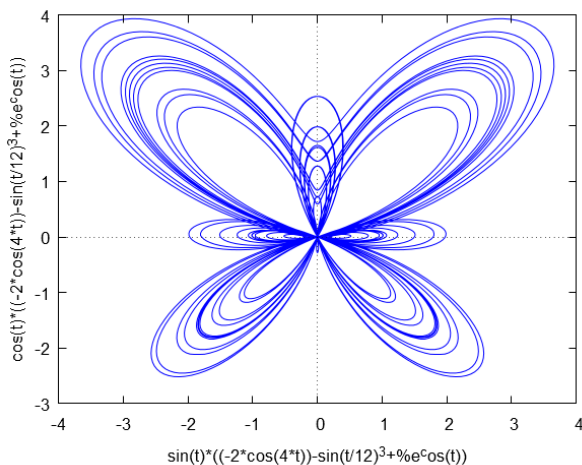
r: (exp(cos(t)) - 2 * cos(4 * t) - sin(t/12)^3)$
wxplot2d([parametric, r * sin(t), r * cos(t), [t, -12 * %pi, 12 *
%pi]])$
  
```

(22)

missä

t on parametri,
 $\$$ on toimintakäsky,
 r on funktion nimi,
 $(\exp(\cos(t)) - 2 * \cos(4 * t) - \sin(t/12)^3)$ on funktio,
`wxplot2d` on piirtokomento,
`parametric` on parametrisen piirtämisen määrä,

$r * \sin(t)$ ja $r * \cos(t)$ ovat käyrän x - ja y -komponentit,
 $-12 * \%pi$ ja $12 * \%pi$ ovat piirtoalueen rajat.



Kuva 24.

Molemmilla järjestelmillä voidaan myös piirtää kolmiulotteisia kuvaajia ja kaavi-
 oita (Kuvat 25 ja 26). Pallon kuvaaja voidaan tuottaa Sagella syötteellä (23)

```
var('x,y'); parametric_plot3d((sin(x) * cos(y), sin(x) *  
sin(y), cos(x)), (x, 0,2 * pi), (y, 0,2 * pi))
```

 (23)

missä

<code>var('x,y')</code>	on	muuttujien x ja y esittely,
<code>;</code>	on	käskyerotin ja
<code>parametric_plot3d</code>	on	kuvaajan piirtokäske,
<code>sin(x)*cos(y),</code>		
<code>sin(x)*sin(y) ja</code>		
<code>cos(x)</code>	ovat	käyrän komponentteja,
<code>(x,0,2*pi)</code>	on	muuttujan x kuvaajan piirtoalue,
<code>(y,0,2*pi)</code>	on	muuttujan y kuvaajan piirtoalue.

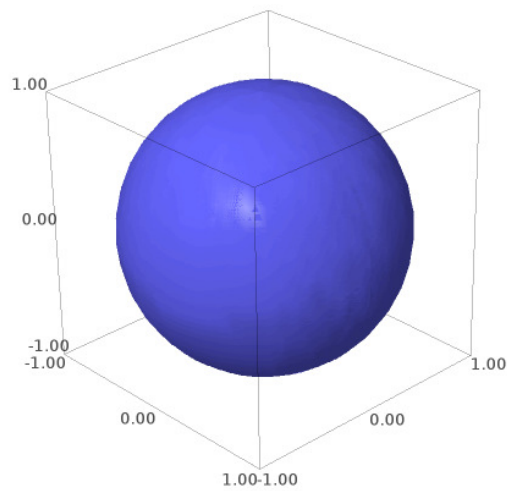
ja wxMaximalla syötteellä (24)

```
wxplot3d( [sin(x) · cos(y), sin(x) · sin(y), cos(x)], [x, 0,2 ·
%pi], [y, 0,2 · %pi], [same_xyz] );
```

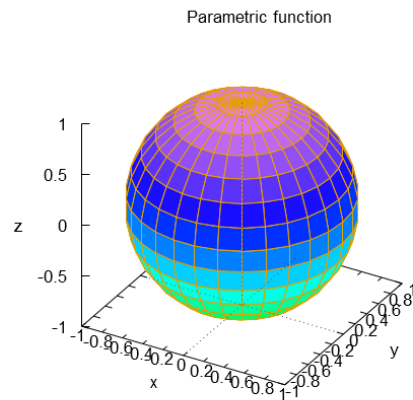
(24)

missä

wxplot3d	on	kuvaajan piirtokäsky,
sin(x) · cos(y),		
sin(x) · sin(y) ja		
cos(x)	ovat	käyrän komponentteja,
(x,0,2·%pi)	on	muuttujan x kuvaajan piirtoalue,
(y,0,2· %pi)	on	muuttujan y kuvaajan piirtoalue,
same_xyz	on	esityksen symmetriavaatimusmääre.



Kuva 25.



Kuva 26.

Alla esitetään Sagella yksinkertainen vektoripiirtoesimerkki (Kuva 27). Vektorikuvaus on seuraavanlainen (25):

```
VA = vector([55,0,0])
```

```
VB = vector([0,50,0])
```

```
VC = vector([0,0,45])
```

```
A = plot(VA, thickness = 5, color = 'blue')
```

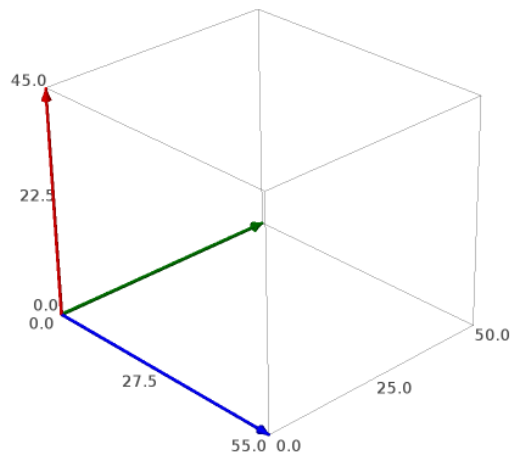
```
B = plot(VB, thickness = 5, color = 'green')
```

```
C = plot(VC, thickness = 5, color = 'red')
```

```
show(A + B + C, aspect_ratio = 1) (25)
```

missä

VA, VB ja VC	ovat	vektoreita,
A, B ja C	ovat	vektorien graafisia esityksiä,
show	on	esityskomento,
aspect_ratio	ilmaisee	esityssuhteen.



Kuva 27.

wxMaximan vektorikuvaajan (Kuva 28) syöte (26):

```
load(draw)$
```

```
A: vector([0,0,0], [55,0,0])$
```

```
B: vector([0,0,0], [0,50,0])$
```

```
C: vector([0,0,0], [0,0,45])$
```

```
wxdraw3d(line_width = 2, color = blue, A, color = green, B,  
color = red, C)$
```

(26)

missä

A, B ja C

ovat

vektoreita,

wxdraw3d

on

kolmiulotteisen kuvaajan piirtokäske,

line_width

määrää

kuvaajan viivan leveyden,

color

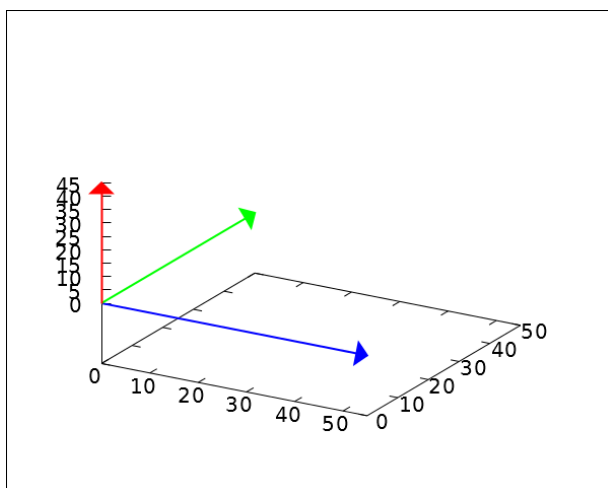
määrää

kuvaajan viivan värin,

\$

on

toimintokäske.



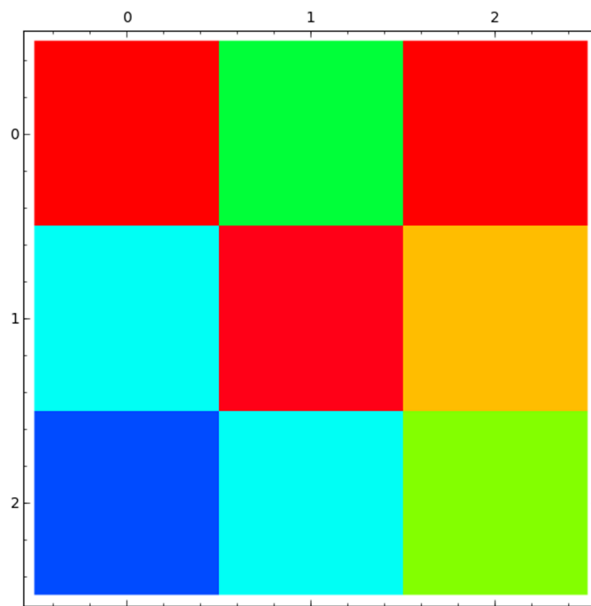
Kuva 28.

Matriisien värikoodattu kaaviointi on mahdollista Sageissa ja wxMaximassa eri periaattein. Sage käyttää matriisin kaavion piirtämiseen `matrix_plot`-funktiota, kun taas wxMaximassa se toteutetaan `draw`-kirjaston sisältämällä `image`-funktiolla. Esimerkkinä esitän piin yhdeksästä ensimmäisestä desimaalista muodostetun matriisin Sageilla (27) (Kuva 29):

```
matrix_plot(matrix([[1,4,1], [5,9,2], [6,5,3]]), cmap = 'hsv')      (27)
```

missä

<code>matrix_plot</code>	on	matriisin kuvaajan piirtokäsky,
<code>matrix</code>	on	matriisin luontifunktio,
<code>[]</code>	ovat	listan muodostavat hakasulut,
<code>[[[]]]</code>	ovat	matriisin muodostavat hakasulut,
1,4,1,5,9,2,6,5 ja 3	ovat	matriisin alkioita,
<code>cmap = 'hsv'</code>	ilmaisee	käytettävän väripaletin.



Kuva 29.

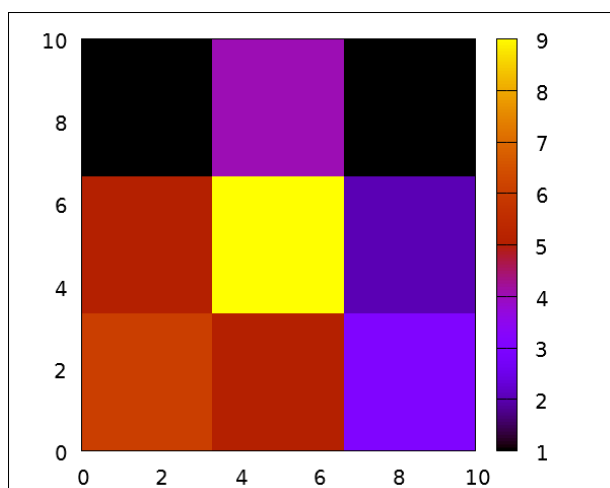
wxMaximassa samankaltainen kuvaaja (Kuva 30) esitetään seuraavasti (28):

```
load(draw)$m1: matrix([1,4,1], [5,9,2], [6,5,3]);
wxdraw2d(image(m1,0,0,10,10))$
```

(28)

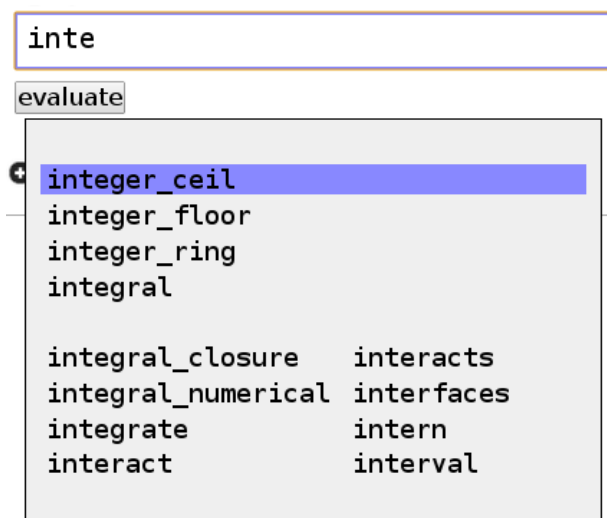
missä

load(draw)	on	graafisen kirjaston latauskäsky,
\$	on	komennon suorituskäsky,
m1	on	muuttuja,
:	on	muuttujan arvon asetuskäsky,
matrix	on	matriisin luontikäsky,
[1,4,1], [5,9,2] ja		
[6,5,3]	ovat	matriisin muodostavia listoja eli rivejä,
wxdraw2d	on	kaksiulotteisen kuvaajan piirtokäsky,
image	on	kuvanmuodostuskäsky,
0,0,10 ja 10	ovat	muuttujien ala- ja ylärajat.



Kuva 30.

Sagen ohje- ja dokumentaatiovalikosta avautuu HTML-sivu, jossa on Sage Notebook sovelluksen peruskäyttöohjeet sekä linkit ohjattuun opetussisältöön (Tutorial), aiheittain luokiteltuihin opetussisältöihin (Thematic Tutorial), käsikirjaan (Reference Manual), kehittäjän oppaaseen (Developer Guide), matemaattisten rakenteiden muodostamisohjeisiin (Constructions), pikaoppaaseen (Fast Static Versions of Documentation) ja keskustelupalstatukeen (Help via Internet Chat (IRC)). Erilaiset SageMathiin liittyvät WEB-haut tuottavat runsaasti linkkejä erilaisiin oppimateriaaleihin. Myös YouTube-palvelussa on kymmeniä opetusvideoita Sagen käyttöön aloittelijan tarpeista erikoistuneen käyttäjän tarpeisiin. Lisäksi Sagen käyttöä helpottaa ja nopeuttaa sanojen täydentäminen sarkaimen avulla. Sarkaimella täydentäminen auttaa esimerkiksi integrointifunktion nimen ja käytettävän etsimisessä. Kirjoittamalla "inte" Sagen laskentasoluun ja painamalla sarkainpainiketta saatiin esiin kelluva lista inte-alkuisia varattuja sanoja (Kuva 31).



Kuva 31.

Sen jälkeen hiirellä valittiin napsauttamalla kohta integrate, kirjoitettiin aukeava kaarisulje ja painettiin sarkainnäppäintä. Luettavaksi saatiin kattava ohje ja erilaisia integrointiin liittyviä esimerkkejä. Tarpeisiin sopiva esimerkki tuotiin leikepöydän kautta Sagen soluun ja arvot vaihdettiin.

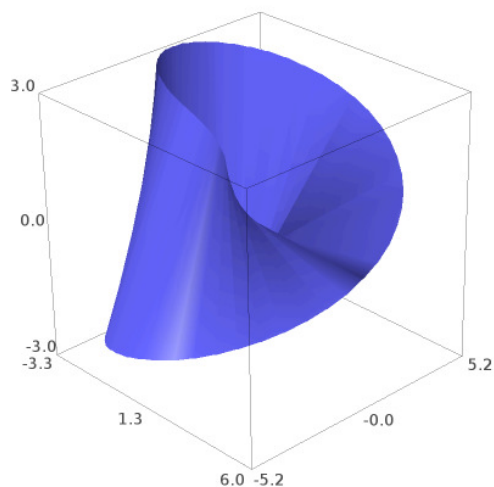
Möbiuksen nauhan kuvaajan tulostusta varten etsittiin tietoa olion matemaattisista perusteista saksankielisestä Wikipediasta (Wikipedia 2015d, 1). Tässä käytettiin ohjelman Help-valikkoa, vaikka Sagen käyttöliittymässä olisi voitu kirjoittaa haettu sana jatkettuna yhdellä tai kahdella kysymysmerkillä. Ohjelman sisäisellä asiakirjahauulla: `search_doc(mobius)` oltaisiin myös voitu käyttää. Tässä kuitenkin edettiin GUI-tyylisesti hiirtä käyttämällä. Valikkoa Reference Manual ja edelleen Graphics-otsikon alla olevaa 3D Graphics linkkiä napauttamalla saatiin näkyville Parametric Surface -linkki. Siitä avautuessa ikkunassa annettiin selaimelle käsky etsiä dokumentista haettua merkkijonoa `Ctrl+F` näppäinyhdistelmän avulla ja kirjoittamalla "mobius". Syöte "mobius" esiintyi asiakirjassa 24 kertaa. Ensimmäiset kaksi osumaa olivat koodin osia, eivätkä matemaattisen objektin toiminnallisia selityksiä. Kolmas osuma kertoi, että ohjelmaluokassa `sage.plot.plot3d.parametric_surface` oli MobiusStrip-niminen graafinen olio. Selvitys kertoi myös, että olio täytyy ennen käyttöä tuoda sovellukseen `import`-käsityllä ja sen parametrejä ovat *r*, *width* ja *twists*. Ohjesivun toimivan esimerkkiohjelmalistauksen (29) ensimmäisellä rivillä tuodaan MobiusStrip-olio, toisella rivillä

luodaan säteeltään kolmen mittainen ja leveydeltään kolmen mittainen Mobiuksen nauha (Kuva 32) ja kolmannella se näytetään. Oletuksena luotavassa oliossa on yksi kierre:

```
from sage.plot.plot3d.parametric_surface import MobiusStrip
M = MobiusStrip(3,3)
M.show() (29)
```

missä

from	on	kirjaston latauskäsky,
sage.plot.plot3d.		
parametric_surface	on	kirjastoluokka,
import	on	tuontikäsky,
MobiusStrip	on	graafinen olio,
M	on	muuttuja,
MobiusStrip	on	olion instanssin luontikäsky,
(3,3)	ovat	nauhan säteen ja leveyden arvot,
.show()	on	instanssin esityskomento.



Kuva 32.

wxMaximan ohjeistoa esitellään Kleinin pullo -esimerkin avulla. Matemaattiset ohjeet on saatu saksankielisestä Wikipediasta (Wikipedia 2015e, 1). Ensin valittiin Help-valikko ja sieltä Maxima help, koska wxMaxima Help sisältää vain graafisen käyttöliittymän ohjeistoa. Hakusanaksi asetettiin klein ja käsikirjan luvusta 12 löytyi esiintymä, joka paikannettiin asiakirjan sisäisellä haulla käyttäen Ctrl+F1-näppäinyhdistelmää. Kleinin pullolle (Kuva 33) ei ollut omaa graafista oliotaan tai luontifunktiota, mutta tulostusesimerkki (30) oli kuitenkin olemassa:

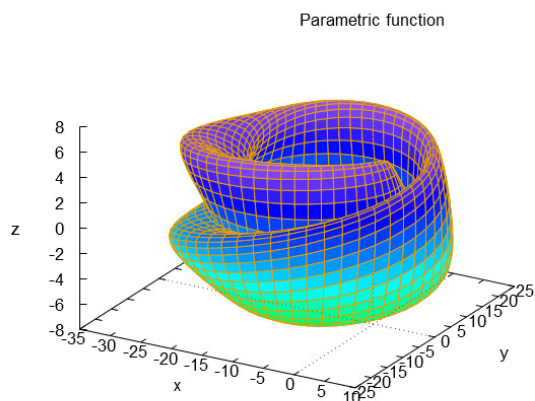
```

expr_1: 5 * cos(x) * (cos(x/2) * cos(y) + sin(x/2) * sin(2 * y) + 3) -
-10$
expr_2: - 5 * sin(x) * (cos(x/2) * cos(y) + sin(x/2) * sin(2 * y) +
3)$
expr_3: 5 * (-sin(x/2) * cos(y) + cos(x/2) * sin(2 * y))$
plot3d ([expr_1, expr_2, expr_3], [x, -%pi, %pi], [y, -%pi, %pi],
[grid, 50, 50])$
(30)

```

missä

expr_1, expr_2 ja expr_3 ovat		matemaattisia ilmauksia, tässä parametrejä
plot3d	on	gnuplot-piirtäjän kutsu,
x ja y	ovat	muuttujia,
-%pi ja %pi	ovat	muuttujien x ja y ala- ja ylärajat,
grid	on	rasterin tarkkuus x:lle ja y:lle, 50 ja 50,
\$	on	toteutuskäsky.



Kuva 33.

Sekä Sagen että wxMaximan kolmiulotteisten olioiden kuvaajat ovat ohjelmis- saan ”hiirellä pyöriteltäviä” eli eri näkökulmista tarkasteltavissa. Maximan käy- tössä oleva GnuPlot eroaa wxMaximan omasta kuvaajan piirtämisen ohjausko- mennosta näennäisesti siinä, että sen eteen ei kirjoiteta kirjainparia wx ja Gnuplo- tin tulosteet ovat wxMaximan asiakirjasta erillisiä ikkunoita, niin kutsuttuja kelluvia objekteja. Gnuplot on wxMaximan omaa kuvaajantulostuksenhallintaa monipuoli- sempi järjestelmä erilaisine säätö-, hallinta- ja vientimahdollisuuksineen.

3.2 Numeeriset järjestelmät

Numeerisiin järjestelmiin on valittu tarkasteltaviksi Scilab ja SMath Studio Desktop. Scilabista on tässä työssä käytössä versio 5.5.2 ja SMath Studio Desktopista versio 0.97.

Scilab on monipuolinen, MathWorksin Matlab-ohjelmaa osittain jäljittelevä, eten- kin erilaisille soveltavan matematiikan aloille soveltuva työ- ja opiskeluväline. Il- man lisäosia se sisältää numeerisen laskennan toiminnot ja moduuleilla (ATOMS) sitä voidaan laajentaa tai erikoistaa tietyille tieteenaloille. Ohjelman käyttöliittymässä ei ole valittavana suomea. Scilab sisältää omien toimintojensa lisäksi myös monia Matlabin innoittamina luotuja matemaattisia toimintoja. Ohjel- man notaatio on suunnilleen samanlainen kuin Maximan tai Sagenkin. Pii ilmais-

taan %pi, i%i ja niin edelleen. Puolipiste (;) on Scilabissa kaiuttamattoman käskyn merkki toisin, kuin esimerkiksi Maximassa, jossa sitä käytetään normaalina suorituskäskynä. Scilabissa on kuitenkin moduulien käytön lisäksi muitakin Maximasta ja Sagesta eroavia ominaisuuksia. Laskutoimitukset voidaan tehdä suoraan konsoliin eli graafisessa ympäristössä olevaan ikkunaan, josta ne jäävät päivämäärän mukaiseen muokattavaan historiaan. Laskutoimitukset voidaan myös kirjoittaa muokkaimella, tallentaa ja erikseen ladata .sce- ja .sci -tiedostoista. Scilab sisältää tuen erilaisille differentiaalioperaatioille, integroinnille, lineaarialgebralle, interpolaatiolle, CACSD:lle (tietokoneavusteisten hallintajärjestelmien suunnittelu), polynomiaaleille, signaaliprosessoinnille, tilastolliselle matematiikalle, geneettisille algoritmeille, kokonaislukumatematiikalle, erilaisille yleisille ohjelmointi- ja kuvauskielille, äänitiedostojen käsittelylle, laskentataulukoille, sydänsignaaleille, satelliittilaskennalle jne. ATOMS-moduulit tuovat oman lisänsä ohjelman monipuolisuuteen. Scilabissa, kuten Sagenkin ohjelmistossa, on avustava sarkaintäyttöominaisuus.

Scilabin muokkaimen käyttöesimerkki. Erään kolmion alan laskentarutiinin luominen (31):

$$\frac{1}{2}ab * \sin(\gamma) \tag{31}$$

missä

a	on	sivun a pituus,
b	on	sivun b pituus,
$\sin(\gamma)$	on	kulman γ sini.

Muokkain avataan syöttämällä konsoliin komento editor(). Muokkaimeen luodaan tarvittava määrä muuttujia, a kolmion sivun a pituudelle, b kolmion sivun b pituudelle, g kulman gamma asteille ja A kolmion alalle. Muuttujat a, b ja A asetetaan rutiinin käyttäjän syötettäväksi input-funktion avulla ja sinin ottamiseen astein ilmoitettavasta kulmasta käytetään Scilabin sind-funktiota. Viimeiselle riville kirjoi-

tetaan muuttujan A esityskäskyn `disp(A)` ja siihen tuloksen ymmärtämistä helpottavan selitteen "Ala = " (Ohjelmalistaus 1). Rutiini tallennettiin nimellä `kolmion_ala.sce` ja muokkain suljettiin.

```
a=input("Sivun a pituus? ")
b=input("Sivun b pituus? ")
g=input("Kulman g asteet? ")
A=1/2*a*b*sind(g)
disp(A, "Ala = ")
```

(Ohjelmalistaus 1)

`kolmion_ala.sce` suoritettiin valitsemalla tiedoston nimi kelluvasta valikosta "Execute in Scilab" eli suorita Scilabissa ja syötettiin tarvittavat arvot (Kuva 34).

```
-->exec('C:\Users\Mateto\Documents\Scilab\kolmion_ala.sce',-1)
Sivun a pituus? 30
Sivun b pituus? 20
Kulman gamma asteet? 37

Ala =

    180.54451

-->
```

Kuva 34.

Seuraavassa taulukossa esitetään muutama Scilab-funktion toiminto (Taulukko 3).

Taulukko 3.

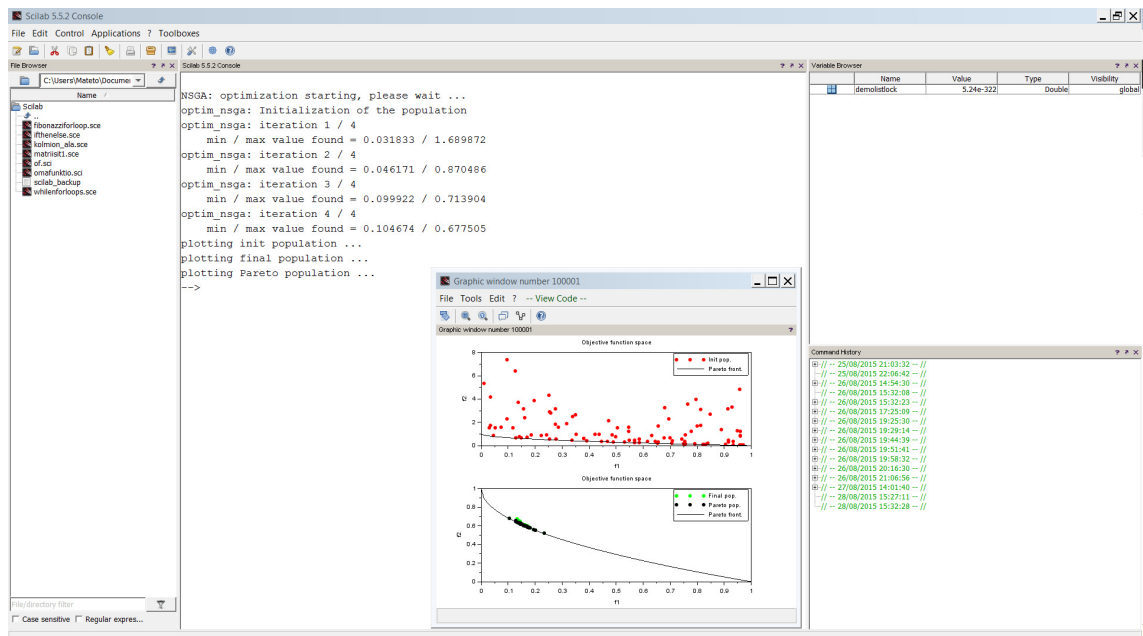
Toiminto	Esimerkki	Scilab
alkulukutarkastus	<code>isprime(97)</code>	<code>number_isprime(97)</code> = T
derivaatta	<code>diff(1)</code>	<code>derivat(1)</code> = 0.
determinantti	$\det \begin{bmatrix} e & \pi \\ i & 7 \end{bmatrix}$	<code>det([%e,%pi ; %i,7])</code> = 19.027973 - 3.1415927i
erotus	$1 - 2$	$1 - 2$ = -1.

for	for $i = 1$ to 10 do $a + i$	$a = 0;$ for $i = 1:10$ $a = a + i;$ end disp(a) =55.
funktion luonti	$f(x) = x^2$	function $[x] = f(a)$ $x = a^2;$ endfunction
hyp. kosini	cosh(0)	cosh(0) = 1.
hyp. sini	$\sinh\left(\frac{\pi}{e}\right)$	sinh(%pi/%e) = 1.4307522
hyp. tangentti	$\tanh\left(\frac{i\pi}{2}\right)$	tanh((%i * %pi)/2) = 1.633D + 16i
if then else	$a = 1, b = 2$ if $a < b$ then b else a	$a = 1; b = 2;$ if $a < b$ then disp(b) else disp(a) = 2
integraali	$\int (\sin(x), x) dx$	$x0 = 0; x1 = 0:1;$ X = integrate('sin(x)', 'x', x0, x1); disp(X) = 0. 0.4596977
itseisarvo	i	abs(%i) = 1.
jakoäännös	modulo(10,3)	modulo(10,3) = 1.
kaksikantainen logaritmi	$\log_2(1024)$	log2(1024) = 10.
kattofunktio	ceiling(π)	ceil(%pi) = 4.
kertoma	7!	factorial(7) = 5040.
konvoluutio	convolve([1][2])	conv(1,2) = 2.
kosekantti	$\csc\left(\frac{\pi}{4}\right)$	csc(%pi/4) = 1.4142136
kosini	$\cos\left(\frac{2}{\pi}\right)$	cos(2/%pi) = 0.8041098
kotangentti	$\cot\left(\frac{\pi}{4}\right)$	cotg(%pi/4) = 1.
lattiafunktio	floor(π)	floor(%pi) = 3.
listan luonti	makelist($\frac{\pi}{e}, 1, 2$)	L = list(%pi/%e, 1, 2, 3)= L(1) = 1.1557273, L(2) = 1., L3 = 2.
luonnollinen logaritmi	log(e)	log(%e) = 1.

matriisin luonti	$M = \begin{bmatrix} e & \pi \\ i & 7 \end{bmatrix}$	$M = [\%e \%pi; \%i 7]$ $= M = \begin{pmatrix} 2.7182818 & 3.1415927 \\ i & 7. \end{pmatrix}$
n:s juuri	$\sqrt[n]{16}$	$\text{nthroot}(16,4)$ $= 2.$
neliöjuuri	$\sqrt{2}$	$\text{sqrt}(2)$ $= 1.4142136$
n-kantainen logaritmi	$\log_3(9)$	$\log(9)/\log(3)$ $= 2.$
numeerinen arvo	$\text{numerical}(\pi)$	π $= 3.1415927$
osamäärä	$\frac{\sqrt{1}}{i}$	$\text{sqrt}(1)/\%i$ $= -i$
pienin yhteinen jaettava	$\text{lcm}(7,10)$	$\text{lcm}([7, 10])$ $= 70$
potenssi	$e^{\pi i}$	$\%e^{(\%pi * \%i)}$ $= -1. + 1.225D - 16i$
ristitulo	$[1,2,3] \times [4,5,6]$	$A = [1\ 2\ 3]$ $B = [4\ 5\ 6]$ $\text{cross}(A,B)$ $= -3. \ 6. \ -3.$
sekantti	$\sec(\pi)$	$\sec(\%pi)$ $= -1.$
sini	$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$\sin(\%pi/4)$ $= 0.7071068$
pistetulo	$[1,2,3] \cdot [4,5,6]$	$a = [1\ 2\ 3]$ $b = [4\ 5\ 6]$ $a * b'$ $= 32.$
summa	$1 + 2$	$1 + 2$ $= 3.$
suurin yhteinen tekijä	$\text{gcd}(7,10)$	$\text{gcd}([7,10])$ $= 1$
tangentti	$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$\tan(\%pi/6)$ $= 0.5773503$
tekijöihin jako	$\text{factorize}(2^8 - 1)$	$\text{factor}(2^8 - 1)$ $= 3. \ 5. \ 17.$
transpoosi	$\begin{bmatrix} e & \pi \\ i & 7 \end{bmatrix}^T$	$[\%e \%pi; \%i 7]'$ $= \begin{pmatrix} 2.7182818 & -i \\ 3.1415927 & 7. \end{pmatrix}$
tulo	$i \cdot i$	$\%i * \%i$ $= -1.$
yksinkertaistus	$\text{simplify}((x + 2) * (x - 2))$	$x = \text{poly}(0, 'x');$ $[a] = \text{simp}((x + 2) * (x - 2))$ $= a = -4 + x^2$

Käyttöliittymänsä (Kuva 35) osalta Scilab on keskeisen komentorivipohjaisen las-
kentaikkunan lisäksi muokattava kokoelma graafisia ikkunoita ja valikoita. Scilab

on saatavilla Windowsin lisäksi erilaisiin Linuxeihin ja Mac OS X:ään. SciLabilla on myös useita WEBissä toimivia laskentasivustoja, esimerkiksi <http://cloud.scilab.in/>.



Kuva 35. Scilabin käyttöliittymä

Scilabin ohjevalikko sisältää laajan teemoittain järjestetyn hierarkisen apuhakemiston esimerkkeineen. Ohjeen käytöstä esimerkkinä esitetään sellaisen funktion etsiminen, jonka avulla saadaan listattua alkuluvut haluttuun ylärajaan asti. Etsintä voi edetä seuraavasti: Avataan kysymysmerkillä nimetty ohjevalikko ja valitaan siitä ”Scilab Help”-kohta. Sen jälkeen valitaan suurennuslasin kuvalla varustettu komentopainike, jotta voidaan etsiä ratkaisua hakusanojen avulla. Valitaan hauksi ”prime”-merkkijono ja esiintulevasta etsintätulosikkunasta edelleen kohta 7, Prime Numbers. Prime Numbers otsikon alla on linkki number_primes selitteellä ”Computes the list of all primes up to n”. Ohje kertoo, että funktiota voidaan käyttää kahdella tavoin – joko etsintämenetelmävalinnalla tai ilman. Tässä halutaan esittää hakutoiminto mahdollisimman yksinkertaisesti. Funktio toimii ohjeen (32) mukaan.

$$\text{result} = \text{number_primes}(n) \quad (32)$$

missä

result	on	tulosmuuttuja,
=	on	muuttujan sijoituskomento,
number_primes	on	alkulukujen etsintäfunktio,
(n)	on	alkulukujen etsinnän ylärajan paikkamerkki.

Tehtävä syötettiin Scilabin konsoliin muodossa (33):

$$\text{alkuluvut} = \text{number_primes}(100) \quad (33)$$

Katso selitys kohdasta (32)

ja tulokseksi saatiin lista lukuja välilyönneillä eroteltuina: alkuluvut = 2. 3. 5. 7. 11. 13. 17. 19. 23. 29. 31. 37. 41. 43. 47. 53. 59. 61. 67. 71. 73. 79. 83. 89. 97.

Scilabin ohjevalikossa on myös temaattisia demonstraatioita ohjelman käytön opettelemisesta Xcos-hybridisimulaattorin käyttöön ja WEB-linkkejä erilaisille Scilab-ohjesivustoille kuten Scilab Wikiin.

Scilabin oppimiskynnys on kokemuksen mukaan hieman korkeampi kuin Sagen tai wxMaximan, johtuen ehkä Scilabin matemaattisen sisällön soveltavasta luonteesta. Samasta syystä Scilab saattaisi olla erityisesti insinööritieteiden opiskelijoiden käyttöön tehokas työkalu.

Andrey Ivashovin luoma SMath Desktop Studio on PTC:n Mathcad-ohjelmiston kaltainen matemaattinen, osin symbolinen matemaattinen muistikirjaohjelmisto. Kuvauksen (Andrey Ivashov 2015,1) mukaan muistikirjasovellus on vapaasti käytettävä matemaattinen ohjelmisto. Se on WYSIWYG (What You See Is What You Get) muokkain. Ohjelman asiakirja muistuttaa näytöllä voimakkaasti siitä paperille tulostettua kopiota. Ohjelmisto on käytettävissä 38 kielellä, myös suomeksi. Ohjelmasta on myös WEB-versio, SMath Studio in the Cloud. Taulukossa esitellään muutamia SMath Studion toimintoja (Taulukko 4).

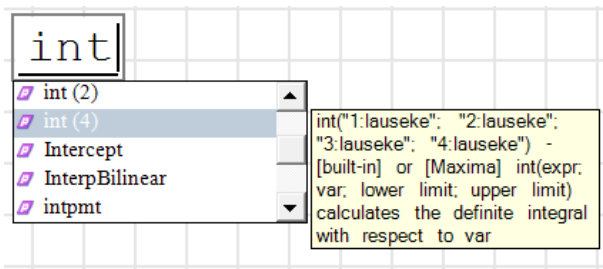
Taulukko 4.

Toiminto	Esimerkki	SMath Studio Desktop
delta-funktio	$\delta(1)$	Dirac(1) = 0
derivaatta	$\frac{d}{dx} x^2$	$\frac{d}{dx} (x^2)$ = $2 \cdot x$
determinantti	$\det \begin{bmatrix} e & \pi \\ i & 7 \end{bmatrix}$	$ (e \ \pi; i \ 7) $ = $19,02797 - 3,14159 \cdot i$
erotus	$1 - 2$	$1 - 2 = -1$
for	for $i = 1$ to 10 do $a + i$	$a := 0$ for $i \in 1..10$ $a := a + i$ $a = 55$
funktion luonti	$f(x) = x^2$	$f(x) := x^2$
Heaviside-funktio	$\theta(-1)$	heaviside(-1) = 0
hyp. kosini	cosh(0)	ch(0) = 1
hyp. sini	$\sinh\left(\frac{\pi}{e}\right)$	sh $\left(\frac{\pi}{e}\right)$ = 1,43075
hyp. tangenti	$\tanh\left(\frac{i\pi}{2}\right)$	th $\left(\frac{i \cdot \pi}{2}\right)$ = $-1 \cdot 10^{15} \cdot i$
if then else	$a = 1, b = 2$ if $a < b$ then b else a	$a := 1$ $b := 2$ if $a < b = 2$ b else a
integraali	$\int x^2 dx$	$\int x^2 dx$ = $\int x^2 dx$
itseisarvo	i	i = 1
jakoäännös	modulo(10,3)	mod(10;3) = 1
kaksikantainen lo- garitmi	$\log_2(1024)$	$\log_2(1024)$ = 10
kattofunktio	ceiling(π)	Ceil(π) = 4
kertoma	7!	7! = 5040
kosekanti	$\csc\left(\frac{\pi}{4}\right)$	cosec $\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1,41421$

kosini	$\cos\left(\frac{2}{\pi}\right)$	$\cos\left(\frac{2}{\pi}\right) = 0,80411$
kotangentti	$\cot\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$\text{ctg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$
lattiafunktio	$\text{floor}(\pi)$	$\text{Floor}(\pi) = 3$
listan luonti	$\text{makelist}\left(\frac{\pi}{e}, 1, 2\right)$	$L := \text{mat}\left(\frac{\pi}{e} \quad 1 \quad 2\right)$
logaritmi	$\log(e)$	$\ln(e)$ $= 1$
matriisin luonti	$M = \begin{bmatrix} e & \pi \\ i & 7 \end{bmatrix}$	$M := \begin{pmatrix} e & \pi \\ i & 7 \end{pmatrix}$
n:s juuri	$\sqrt[4]{16}$	$\sqrt[4]{16}$ $= 2$
neliöjuuri	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$ $= 1,41421$
n-kantainen logaritmi	$\log_3(9)$	$\log_3(9)$ $= 2$
osamäärä	$\frac{\sqrt{1}}{i}$	$\frac{\sqrt{1}}{i}$ $= -i$
potenssi	$e^{\pi i}$	$e^{\pi i} - 1$
raja-arvo	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{x^3}\right)$	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{x^3}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2}\right)$
ristitulo	$[1,2,3] \times [4,5,6]$	$a := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $b := \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ $a \times b$ $= \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$
sekantti	$\sec(\pi)$	$\sec(\pi)$ $= -1$
sini	$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ $= 0,70711$
pistetulo	$[1,2,3] \cdot [4,5,6]$	$a := (1 \quad 2 \quad 3)$ $b := \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ $a \cdot b$ $= (32)$
summa	$1 + 2$	$1 + 2 = 3$
tangentti	$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$\text{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right)$ $= 0,57735$
transpoosi	$\begin{bmatrix} e & \pi \\ i & 7 \end{bmatrix}^T$	$\begin{pmatrix} e & i \\ \pi & 7 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} 2,71828 & 3,14159 \\ i & 7 \end{pmatrix}$
tulo	$i \cdot i$	$i \cdot i$ $= -1$

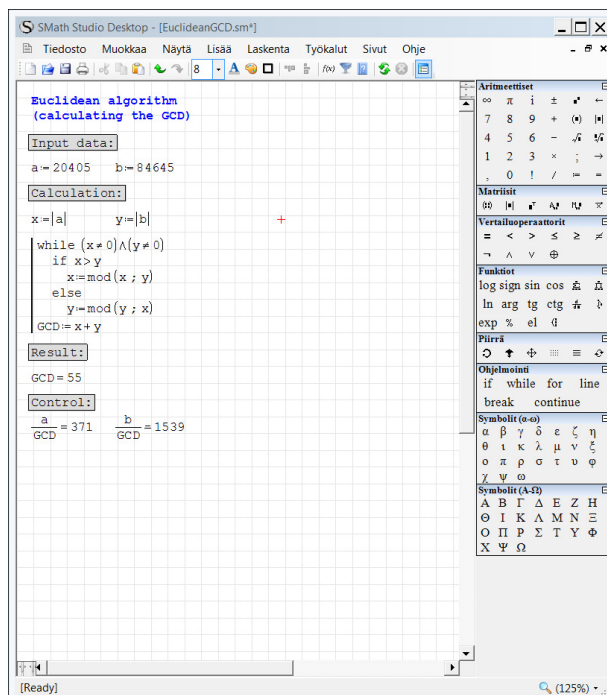
yksikkösievennys	$SI\left(8 \frac{kg}{A \cdot s^2}\right)$	$8 \cdot UoM\left(\frac{kg}{A \cdot s^2}\right)$ $= 8 T$
------------------	---	---

SMath Studio Desktopissa on avustava syöttö eli se ehdottaa käyttäjän kirjoituksen mukaan erilaisia vaihtoehtoja. Merkkijonon int kirjoittaminen tuo esiin englanninkielisen kelluvan valikon ohjelman sisältämistä int-alkuisista varatuista sanoista (Kuva 36). Keltaisella pohjalla olevasta tekstistä käy ilmi, että SMath Studio Desktop käyttää hyväkseen myös Maximian laskentatehoa ja -algoritmeja.



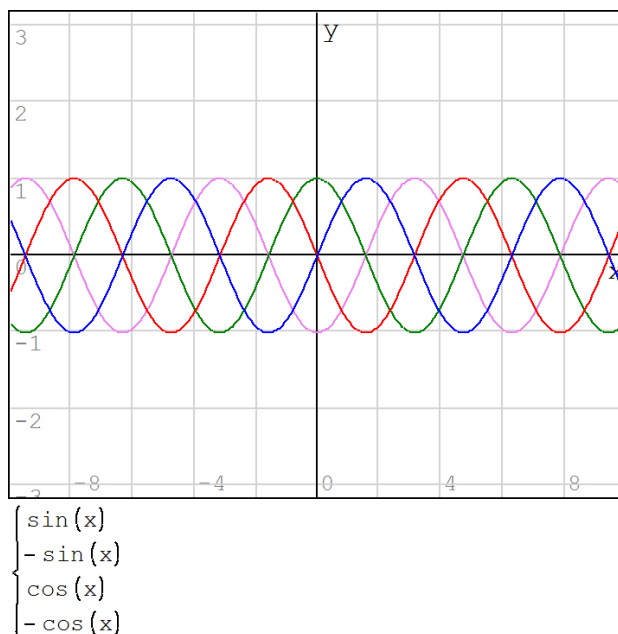
Kuva 36.

Ohjelman käyttöliittymä on graafinen (Kuva 37) valikko- ja työkaluriveineen. Siinä on myös sivupaneeli, jossa on yleisiksi ajateltuja ohjelmatoimintoja.



Kuva 37.

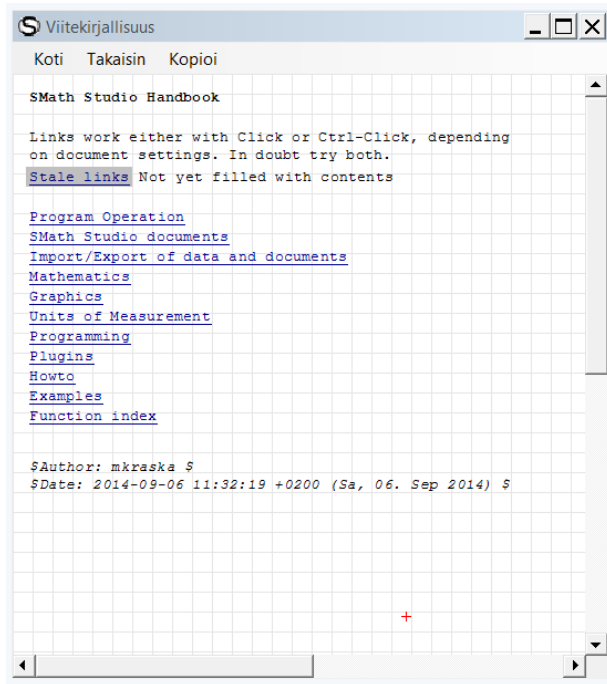
SMath Studio Desktopin kuvaajien piirtoesimerkkinä esitetään lyhyesti kaksiulotteisten sini- ja kosinikäyrien piirto negatiivisina ja positiivisina (Kuva 38).



Kuva 38.

Ohjelmiston ohjeistusta kokeillaan informaation siirron nopeustarpeen määrittelyongelmalla: ”Riittääkö 50 Mbit/s yhteysnopeus kaksikerroksisen ja kaksipuolisen DVD:n sisällön siirtoon tunnin aikana?”. Kyseinen DVD:n tallennuskapasiteetti on 17,08 gibitavua. Kysymyksessä on siten varsin yksinkertainen informaation määrä jaettuna ajalla tyypinen laskutoimitus.

Muuttuja info esiteltiin ja siihen liitettiin annettu arvo: Info:=17,08gib ja painettiin sarkainpainiketta, jotta ohjelma hyväksyisi yksiköksi gibitavun. Aikamuuttuja esiteltiin ja sille annettiin arvo kirjoittamalla ”Aika:=1h”. Tässä kohdassa SMath Studion yksiköt eivät olleet SI-järjestelmän mukaisia, vaan ”h” oli ohjelmassa liitetty Planckin vakioon. Tunnin (h) symbolia etsittiin ohjevalikosta kohdasta viitekirjallisuus, joka avasi näytölle listan (Kuva 39) ohjeaiheista. Linkki ”Units of Measurement” avattiin ohjeiden mukaisesti. Ilmeni, että tunnin symboli on sovelluksessa hr.



Kuva 39.

Symboli h muutettiin symboliksi hr ja suoritettiin laskutoimitus (34):

$$\frac{\text{Info}}{\text{Aika}} = 4,07545 \cdot 10^7 \frac{\text{bit}}{\text{s}} \quad (34)$$

missä

Info	on	informaation määrän muuttuja,
Aika	on	ajan pituuden muuttuja,
$4,07545 \cdot 10^7$	on	laskennan tulos,
$\frac{\text{bit}}{\text{s}}$	on	informaation siirron yksikkö.

Kokeilujen tuloksena kävi ilmi, että valitsemalla laskutoimitus hiirellä napsauttamalla, sen loppuun ilmestyi paikkamerkiksi musta laatikko (Kuva 40). Musta laatikkoon syötettiin sitten haluttu yksikkö Mbit/s. Yksikkömuunnoksen teko onnistui siten kirjoittamalla laatikkoon uuden yksikön tunnus.

$$\frac{\text{Info}}{\text{Aika}} = 4,07545 \cdot 10^7 \frac{\text{bit}}{\text{s}}$$

Kuva 40.

Lopullinen laskutoimitus antoi tarvittavaksi siirtonopeudeksi 40,8 Mbit/s (Kuva 41), joka tarkoittaa myöntävää vastausta ongelmaan. Viidenkymmenen Mbps:n nopeus riittää nimellisesti kyseisen DVD:n siirtonopeudeksi.

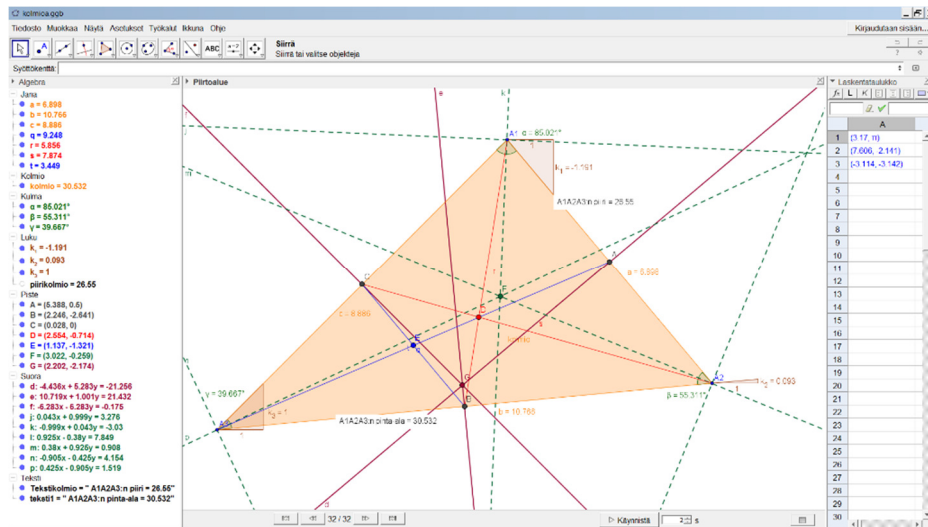
$$\frac{\text{Info}}{\text{Aika}} = 40,75447 \frac{\text{Mbit}}{\text{s}}$$

Kuva 41.

3.3 Vuorovaikutteisen geometrian ohjelmat

GeoGebra on erilaisista valinnaisista ikkunoista koostettava matemaattinen ohjelmisto. Valittavana on algebraikkuna, laskentataulukkoikkuna, CAS-ikkuna, kolme piirtoalueikkunaa, joista kaksi kaksiulotteista ja yksi kolmeulotteista piirtoa varten. Lisäksi asiakirjan koostamisen vaiheet voidaan esittää omassa ikkunas- saan animaation tekoa tms. varten. Käyttöliittymä sisältää myös todennäköisyys- laskurin ja syöttökentän. GeoGebran sovellukset toimivat keskenään dynaami- sesti. Differentiaalilaskentaan ja integrointiin tarkoitettu CAS ja numeeriseen las- kentaan tarkoitettu algebraikkuna viestivät sekä keskenään että eri kuvaajaikku- noiden ja laskentataulukkoikkunan ja tilastoikkunan kanssa. Tästä seuraa myös se, että funktion kuvaajan pisteen siirto kaksiulotteisessa kuvaajaikkunassa vai- kuttaa algebra- ja CAS-ikkunoissa oleviin funktion määritelmiin ja päinvastoin. Ik- kunoiden yhteistyö toimii kaikkien GeoGebran ikkunoiden välillä.

Ohjelman käyttöliittymä (Kuva 42) on erilainen kuin esimerkiksi Sagessa, jossa toimitaan yhden ikkunan puitteissa. GeoGebra on laskentaominaisuuksiensa li- säksi eräänlainen RAD-tyyppinen (Rapid Application Development, nopea sovel- luskehitys) ohjelmointiympäristö.



Kuva 42.

Taulukossa 5 GeoGebran algebra- ja CAS-ikkunoiden merkintätapoja yleisten matemaattisten toimintojen avulla.

Taulukko 5.

Toiminto	Esimerkki	GeoGebra Algebra	GeoGebra CAS
alakovartiiili	$Q_1(1,2,3)$	$L = \{1,2,3\};$ Alakovartiiili[L] $a = 1$	$L = \{1,2,3\};$ Alakovartiiili[L] $\rightarrow 1$
alkulukutarkastus	isprime(97)	OnkoAlkuluku[97] $a = \text{true}$	OnkoAlkuluku[97] $\rightarrow \text{true}$
alkutekijät	alkutekijät(78)	Alkutekijät[78] lista1 = {2,3,13}	Alkutekijät[78] $\rightarrow \{2,3,13\}$
anova	ANOVA({1,2}, {3,4})	$L1 = \{1,2\};$ $L2 = \{3,4\};$ ANOVA[{L1, L2}] lista1 = {0.106,8}	$L1 = \{1,2\};$ $L2 = \{3,4\};$ ANOVA[{L1, L2}] $\rightarrow \{0.106,8\}$
arkuskosini	acos(0)	acos(0) = $a = 1.571$	acos(0) $\rightarrow \frac{1}{2}\pi$
arkussini	asin(1)	asin(1) $a = 1.571$	asin(1) $\rightarrow \frac{1}{2}\pi$
arkustangenti	atan(1)	atan(1) $a = 0.785$	atan(1) $\rightarrow 0.785$
asymptootti	asymptootti($x^2 - 2y^2 = 3$)	Asymptootti[$x^2 - 2y^2 = 3$] $a = -1.225x + 1.732y = 0$ $a_1 = -1.225x - 1.732y = 0$	Asymptootti[$x^2 - 2y^2 = 3$] \rightarrow $-1.225x + 1.732y = 0$
derivaatta	$\frac{d}{dx} x^2$	Derivaatta[x^2] $f(x) = 2x$	Derivaatta[x^2] $\rightarrow 2x$

determinantti	$\det \begin{bmatrix} e & \pi \\ i & 7 \end{bmatrix}$	$M = \{\{e, \pi\}, \{i, 7\}\}$ Determinantti[M] a määrittelemätön	$M: = \{\{e, \pi\}, \{i, 7\}\}$ Determinantti[M] $\rightarrow 7e - i\pi$
differentiaaliyh- tälö	$y' - 2y = 0$	-	RatkaiseDY[y' - 2y = 0] $\rightarrow c_1 e^{2x}$
e:n potenssifunk- tio	$\exp(i)$	$\exp(i)$ $z_1 = 0.54 + 0.841i$	$\exp(i)$ $\rightarrow e^i$
edeltävä alkuluku	prevprime(78)	EdeltäväAlkuluku(78) $a = 73$	EdeltäväAlkuluku(78) $\rightarrow 73$
eksponentti-in- tegraali	$Ei(\sqrt{2})$	expIntegral(sqrt(2)) $a = 3.048$	expIntegral(sqrt(2)) $\rightarrow Ei(\sqrt{2})$
eksponenttija- kauma	$E(e, e)$	Eksponenttijauma(e, e) $f = 0.999$	Eksponenttijauma(e, e) $\rightarrow 1 - e^{-ee}$
erotus	$1 - 2$	$1 - 2$ tai Summa[{1, -2}] $a = -1$	$1 - 2$ tai Summa[{1, -2}] $\rightarrow -1$
esiintymistiheys	freq({1,2,2})	$L = \{1,2,2\}$ Frekvenssi(L) lista1 = 3.048	$L: = \{1,2,2\};$ Frekvenssi(L) $\rightarrow \{1,2\}$
etäisyys	$s((0,0), (1,1))$	Etäisyys((0,0), (1,1)) $a = 1.414$	Etäisyys((0,0), (1,1)) $\rightarrow \sqrt{2}$
funktion luonti	$f(x) = x^2$	$f(x) := x^2$ $f(x) = x^2$	$f(x) := x^2$ $\rightarrow f(x) := x^2$
funktion rajaus	$f(x) = (x^2, -\pi, \pi)$	Funktio[x ² , -π, π] $f(x) = x^2$ ($-3.142 \leq x \leq \pi$)	Funktio[x ² , -π, π] $\rightarrow \text{Jos}[-\pi \leq x \leq \pi, x^2]$
geometrinen kes- kiarvo	$x_g\{1,2,2\}$	$L = \{1,2,2\}$ GeometrinenKeskiarvo(L) $a = 1.587$	$L: = \{1,2,2\};$ GeometrinenKeskiarvo(L) $\rightarrow 1.587$
harmoninen kes- kiarvo	$x_h\{1,2,2\}$	$L = \{1,2,2\}$ HarmoninenKeskiarvo(L) $a = 1.5$	$L: = \{1,2,2\};$ HarmoninenKeskiarvo(L) $\rightarrow 1.5$
hyperbolinen ar- kussini	$\text{asinh}(1)$	$\text{asinh}(1)$ $a=0.881$	$\text{asinh}(1)$ $\rightarrow \ln(\sqrt{2} + 1)$
hyperbolinen ar- kustangentti	$\text{atanh}(1)$	$\text{atanh}(1)$ $a = \infty$	$\text{atanh}(1)$ $\rightarrow \infty$
hyperbolinen ko- sekantti	$\text{csc}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\text{cosech}(\text{sqrt}(2)/2)$ $a = 1.303$	$\text{cosech}(\text{sqrt}(2)/2)$ $\frac{1}{\sinh\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$
hyperbolinen ko- sini	$\text{cosh}(1)$	$\text{cosh}(1)$ $a = 1.543$	$\text{cosh}(1)$ $\rightarrow \text{cosh}(1)$
hyperbolinen ko- tangenti	$\text{coth}(1)$	$\text{coth}(1)$ $a = 1.313$	$\text{coth}(1)$ $\rightarrow \frac{1}{\tanh(1)}$
hyperbolinen se- kantti	$\text{sech}(0)$	$\text{sech}(0)$ $a = 1$	$\text{sech}(0)$ $\rightarrow 1$
hyperbolinen sini	$\text{sinh}(1)$	$\text{sinh}(1)$ $a = 1.175$	$\text{sinh}(1)$ $\rightarrow \text{sinh}(1)$

hyperbolinen tangentti	$\tanh(1)$	$\tanh(1)$ a = 0.762	$\tanh(1)$ → $\tanh(1)$
if then else	a = 1, b = 2 if a < b then b else a	a = 1 b = 2 Jos[a < b, b, a] c = 2	a = 1 b = 2 Jos[a < b, b, a] → 2
imaginaariosa	$\text{im}(e^{-i})$	imaginaariosa($\exp(-i)$) a=-0.841	imaginaariosa($\exp(-i)$) → $-\sin(1)$
integraali	$\int x^2 dx$	integraali[x^2] f(x) = 0.333x ³	integraali[x^2] → $\frac{1}{3}x^3 + c_1$
iteraatio	for i = 1 to 10 do a + i	Summa[Iteraatiolista[x + 1, 0, 10]] a = 55	Summa[Iteraatiolista[x + 1, 0, 10]] → 55
itseisarvo	i	abs(i) a=1	abs(i) → 1
jakoäännös	modulo(10,3)	Jakoäännös[10,3] a = 1	Jakoäännös[10,3] → 1
kaksikantainen logaritmi	$\log_2(1024)$	log2(1024) a = 10	log2(1024) → $\frac{\ln(1024)}{\ln(2)}$
kantalukumuuunnos	muunna(10 ₁₀ , 10 ₂)	Kantaan[10,2] teksti1 = 1010	Kantaan[10,2] → 1010
kattofunktio	ceiling(π)	ceil(π) a = 4	ceil(π) → 4
kertoma	7!	7! a = 5040	7! → 5040
keskiarvo	$\bar{x}(1,2,2)$	Keskiarvo[1,2,2] a = 1.667	Keskiarvo[1,2,2] → 1.667
keskihajonta	keskihajonta(1,2,2)	Keskihajonta[{1,2,2}] a = 0.471	Keskihajonta[{1,2,2}] → $\frac{\sqrt{2}}{3}$
keskinormaali	keskinormaali{(0,0), (1,1)}	Keskinormaali[(0,0), (1,1)] a: -x - y = -1	Keskinormaali[(0,0), (1,1)] → y = -x + 1
keskipiste	keskipiste{(0,0), (1,1)}	Keskipiste[(0,0)(1,1)] A = (0.5,0.5)	Keskipiste[(0,0), (1,1)] → $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
ketjumurtoluku	ketjumurtoluku(π)	t = Ketjumurtoluku[π] t = "3 + $\frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292+\dots}}}}$ "	Ketjumurtoluku[π] → 3 + $\frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292+\dots}}}}$
kokonaislukutarkastus	isinteger(97)	OnkoKokonaisluku[97] a = true	OnkoKokonaisluku[97] → true
kompleksijuuri	kompleksijuuri($2x^3 + x^2 + 1$)	Kompleksijuuri[$2x^3 + x^2 + 1$] z ₁ = -1 + 0i z ₂ = 0.25 - 0.661i z ₃ = 0.25 + 0.661i	Kompleksijuuri[$2x^3 + x^2 + 1$] → $\left\{-1, \frac{i\sqrt{7} + 1}{4}, \frac{-i\sqrt{7} + 1}{4}\right\}$

kosekantti	$\csc\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$\operatorname{cosec}(\pi/4)$ a = 1.414	$\operatorname{cosec}(\pi/4)$ $\rightarrow \sqrt{2}$
kosini	$\cos\left(\frac{2}{\pi}\right)$	$\cos(2/\pi)$ a = 0.804	$\cos(2/\pi)$ $\rightarrow \cos\left(\frac{2}{\pi}\right)$
kotangenti	$\cot\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$\cot\left(\frac{\pi}{4}\right)$ a = 1	$\cot\left(\frac{\pi}{4}\right)$ $\rightarrow 1$
kulma	kulma((0,0), (2,3), (2,0))	Kulma[(0,0), (2,3), (2,0)] $\alpha = 33.69^\circ$	Kulma[(0,0), (2,3), (2,0)] $\rightarrow \operatorname{acos}\left(3 \cdot \frac{\sqrt{13}}{13}\right)$
kuutiojuuri	$\sqrt[3]{8}$	$\operatorname{cbrt}(8)$ a = 2	$\operatorname{cbrt}(8)$ $\rightarrow 2$
käännepest	käännepest(x^3)	$f(x) = x^3$ Käännepest[f] A = (0,0)	$f(x) = x^3$ Käännepest[f] $\rightarrow (0,0)$
käänteinen Laplace-muunnos	$\mathcal{L}_t^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right)$	-	KäänteinenLaplace[1 / (s + 1), s, t] $\rightarrow e^{-t}$
Laplace-muunnos	$\mathcal{L}_t(e^{-t})$	-	Laplace[exp(-t), t, s] $\rightarrow \frac{1}{s+1}$
lattiafunktio	$\operatorname{floor}(\pi)$	$\operatorname{floor}(\pi)$ a = 3	$\operatorname{floor}(\pi)$ $\rightarrow 3$
leikkauspiste	leikkauspiste(x^2, x^3)	Leikkauspiste[x^2, x^3] A = (0,0) B = (1,1)	Leikkauspiste[x^2, x^3] $\rightarrow \{(0,0), (1,1)\}$
listan luonti	makelist($\frac{\pi}{e}, 1, 2$)	L: = { $\pi / e, 1, 2$ } L = { 1.156, 1, 2 }	L: = { $\pi / e, 1, 2$ } L = { $\frac{\pi}{e}, 1, 2$ }
lunnollinen logaritmi	$\log(e)$	$\log(e)$ a = 1	$\log(e)$ $\rightarrow 1$
luonnollinen logaritmi	$\ln(e)$	$\ln(e)$ a = 1	$\ln(e)$ $\rightarrow 1$
matriisin luonti	$M = \begin{bmatrix} e & \pi \\ i & 7 \end{bmatrix}$	M: = { { e, π }, { i, 7 } } M = { { 2.718, π }, { 0 + i, 7 } }	M: = { { e, π }, { i, 7 } } $\rightarrow M := \begin{bmatrix} e & \pi \\ i & 7 \end{bmatrix}$
mediaani	mediaani(1,2,3)	Mediaani[{1,2,3}] a = 2	Mediaani[1,2,3] $\rightarrow 2$
murto-osa	$\operatorname{fp}(\pi)$	MurtoOsa(π) a = 0.142	MurtoOsa(π) $\rightarrow \pi - 3$
n:s juuri	$\sqrt[n]{16}$	nJuuri(16,4) a = 2	nJuuri(16,4) $\rightarrow 2$
neliöjuuri	$\sqrt{2}$	$\operatorname{sqrt}(2)$ a = 1.414	$\operatorname{sqrt}(2)$ $\rightarrow \sqrt{2}$
nimittäjä	nimittäjä($\frac{1}{\sin(x)}$)	Nimittäjä[1/sin(x)] $f(x) = \sin(x)$	Nimittäjä[1/sin(x)] $\rightarrow \sin(x)$
n-kantainen logaritmi	$\log(e, 2)$	$\log(e, 2)$ a = 0.693	$\log(e, 2)$ $\rightarrow \ln(2)$

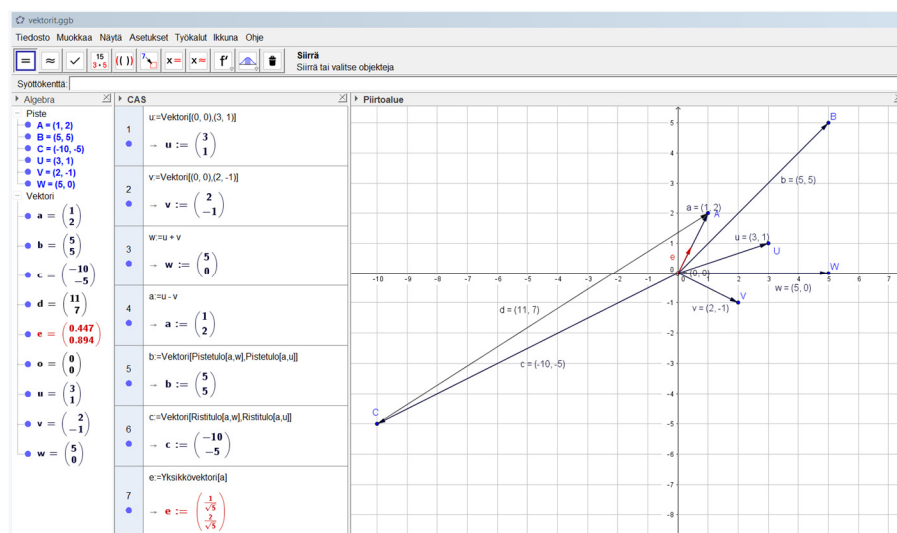
nollakohdat	nollakohta($2x^2 - 2$)	Nollakohta[$2x^2 - 2$] A = (-1,0) B = (1,0)	Nollakohta[$2x^2 - 2$] → {x = -1, x = 1}
osamurtohajotelma	pf($\frac{x-1}{x^2+3x+2}$)	Osamurtohajotelma((x-1)/(x^2+3x+2)) $f(x) = -\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x+2}$	Osamurtohajotelma((x-1)/(x^2+3x+2)) → $-\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x+2}$
osamäärä	$\frac{\sqrt{1}}{i}$	sqrt(1)/i $z_1 = 0 - i$	sqrt(1)/i → -i
osoittaja	osoittaja($\frac{1}{\sin(x)}$)	Osoittaja[1/sin(x)] f(x) = 1	Osoittaja[1/sin(x)] → 1
pienin yhteinen jaettava	PYJ(1023,4)	PYJ(1023,4) a = 4092	PYJ(1023,4) → 4092
pinta-ala	pinta - ala((-2, -1), (2,3)(4, -1))	PintaAla[(-2, -1), (2, 3), (4, -1)] a = 12	PintaAla[(-2, -1), (2, 3), (4, -1)] → 12
pistetulo	[1,2,3] · [4,5,6]	Summa[Pistetulo[{1,2,3}, {4,5,6}]] a = 32	Pistetulo[{1,2,3}, {4,5,6}] → 32
pituus annetulla välillä	pituus($x^2, -1, 1$)	Pituus[$x^2, -1, 1$] a = 2.958	Pituus[$x^2, -1, 1$] → $\frac{1}{4}(2\sqrt{5} - \ln(\sqrt{5} - 2)) - \frac{1}{4}$
polynomi annetuista pisteistä	poly((-2, -3), (-1, 1), (1,1), (4,2))	Polynomi[(-2, -3), (-1, -1), (1,1), (4,2)] f(x) = 0.033x ³ - 0.267x ² + 0.967x + 0.267	Polynomi[(-2, -3), (-1, -1), (1,1), (4,2)] → $\frac{1}{30}x^3 - \frac{4}{15}x^2 + \frac{29}{30}x + \frac{4}{15}$
polynomien aste	aste($2x^3 - x^2 + 1$)	Aste[$2x^3 - x^2 + 1$] a = 3	Aste[$2x^3 - x^2 + 1$] → 3
polynomien sovitus annettuihin pisteisiin	sovita(((2,4), (3,2), (4,1), (5,3), (6,1), (7,3), (8,3)), 6)	L = {(2,4), (3,2), (4,1), (5,3), (6,1), (7,3), (8,3)}; SovitaPolynomi[L, 6] f(x) = -0.074x ⁶ + 2.187x ⁵ - 26.09x ⁴ + 159.146x ³ - 520.836x ² + 861.667x - 557	L = {(2,4), (3,2), (4,1), (5,3), (6,1), (7,3), (8,3)} SovitaPolynomi[L, 6] → f(x) = -0.074x ⁶ + 2.188x ⁵ - 26.09x ⁴ + 159.146x ³ - 520.836x ² + 861.667x - 557
potenssi	$e^{\pi i}$	$e^{(\pi * i)}$ $z_1 = -1 + 0i$	$e^{(\pi * i)}$ → $e^{\pi i}$
raja-arvo	$\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{x}{x^3})$	RajaArvo[x / x ³ , 0] a = ∞	RajaArvo[x / x ³ , 0] → ∞
reaaliosa	re(e^{-i})	reaaliosa(exp(-i)) a=0.54	reaaliosa(exp(-i)) → cos(1)
ristitulo	[1,2,3] × [4,5,6]	Ristitulo[{1,2,3}, {4,5,6}] lista1 = {-3,6, -3}	Ristitulo[{1,2,3}, {4,5,6}] → {-3,6, -3}
satunnaisluku	satunnaisluku(1,10)	Satunnaisluku[1,10] a=5	Satunnaisluku[1,10] → 5
sekantti	sec(π)	sec(π) a = -1	sec(π) → -1
seuraava alkuluku	nPr(78)	SeuraavaAlkulu[78] a = 79	SeuraavaAlkulu[78] → 79

sievennä	sievennä $\left(\frac{78}{32}\right)$	Sievennä[78/32] $a = \frac{39}{16}$	SeuraavaAlkulu[78/32] $\rightarrow \frac{39}{16}$
signum	sgn(1)	sgn(1) $a = 1$	sgn(1) $\rightarrow 1$
sini	$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$\sin(\pi/4)$ $a = 0.707$	$\sin(\pi/4)$ $\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$
sini-integraali	Si(π)	sinIntegral(π) $a = 1.852$	sinIntegral(π) $\rightarrow \text{Si}(\pi)$
sulkujen poisto	$(x + 1) \cdot (x - 1)$	PoistaSulut[($x + 1$)($x - 1$)] $f(x) = x^2 - 1$	PoistaSulut[($x + 1$)($x - 1$)] $\rightarrow x^2 - 1$
summa	1 + 2	1 + 2 tai Summa[{1,2}] $a = 3$	1 + 2 tai Summa[{1,2}] $\rightarrow 3$
suoran suuntavektori	suunta(0,0), (3,1)	Suunta[Suora[(0,0), (3,1)]] $u = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$	Suunta[Suora[(0,0), (3,1)]] $\rightarrow (3,1)$
suurin yhteinen tekijä	SYT(1023,4)	SYT(1023,4) $a = 1$	SYT(1023,4) $\rightarrow 1$
tangentti	$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$\tan(\pi/6)$ $a = 0.577$	$\tan(\pi/6)$ $\rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}$
tekijöihin jako	factor[$2x^2 - 3x + 1$]	JaaTekijöihin[$2x^2 - 3x + 1$] $f(x) = (x - 1)(2x - 1)$	JaaTekijöihin[$2x^2 - 3x + 1$] $\rightarrow (x - 1)(2x - 1)$
transpoosi	$\begin{bmatrix} e & \pi \\ i & 7 \end{bmatrix}^T$	M: = {{ e , π }, { i , 7 }} Transponoi[M] lista1 = {{2.718,0 + i}, { π , 7}}	M: = {{ e , π }, { i , 7 }} Transponoi[M] $\rightarrow \begin{matrix} e & i \\ \pi & 7 \end{matrix}$
tulo	i · i	i * i tai Tulo[{i, i}] $z_1 = -1 + 0i$	i * i tai Tulo[{i, i}] $\rightarrow -1$
tyyppiarvo	tyyppiarvo(1,2,2)	Tyyppiarvo[{1,2,2}] lista1 = 2	Tyyppiarvo[{1,2,2}] $\rightarrow \{2\}$
ura pisteen kautta	ura($x - 2y$)(1,2)	Ura[x - 2y, (1, 2)] numeerinenIntegraali1 = Ura[x - 2y, (1, 2)]	Ura[x - 2y, (1, 2)] $\rightarrow \text{Ura}[x - 2y, (1, 2)]$
varianssi	varianssi(1,2,2)	Varianssi[{1,2,2}] $a = 0.222$	Varianssi[{1,2,2}] $\rightarrow \frac{2}{9}$
virhefunktio	$\text{erf}\left(\frac{1}{2}\right)$	$\text{erf}\left(\frac{1}{2}\right)$ $a = 0.52$	$\text{erf}\left(\frac{1}{2}\right)$ $\rightarrow \text{erf}\left(\frac{1}{2}\right)$
virtauskaavio	virtauskaavio($x - y$)	Virtauskaavio($x - y$) suuntakenttä1 = Virtauskaavio($x - y$)	Virtauskaavio($x - y$) $\rightarrow \text{ura1} = \text{Virtauskaavio}(x - y)$
Voronoin diagrammi annetuista pisteistä	voronoi((0,0), (2,1), (3,1.2))	L = {(0,0), (2,1), (3,1.2)}; Voronoi(L) kuvaaja1 = Voronoi[L]	L = {(0,0), (2,1), (3,1.2)}; Voronoi(L) $\rightarrow \text{ura1} = \text{Voronoi}[L]$
yksikkömatriisi	yksikkömatriisi(2,2)	M = Yksikkömatriisi(2) $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	M = Yksikkömatriisi(2) $\rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

yleinen logaritmi	$\lg(e)$	$\lg(e)$ $a = 0.434$	$\lg(e)$ $\rightarrow \frac{1}{\ln(10)}$
yläkvartiili	$Q_3(1,2,3)$	$L = \{1,2,3\}$; Yläkvartiili[L] $a = 3$	$L := \{1,2,3\}$; Yläkvartiili[L] $\rightarrow 3$
zeta-funktio	$\zeta(1)$	$\text{zeta}(1)$ $a = \infty$	$\text{zeta}(1)$ $\rightarrow \infty$
ääriarvot	$\text{Extremum}(x^2)$	$f(x) = x^2$ Ääriarvopisteet[f] $A = (0,0)$	$f(x) := x^2$ Ääriarvopisteet[f] $\rightarrow (0,0)$

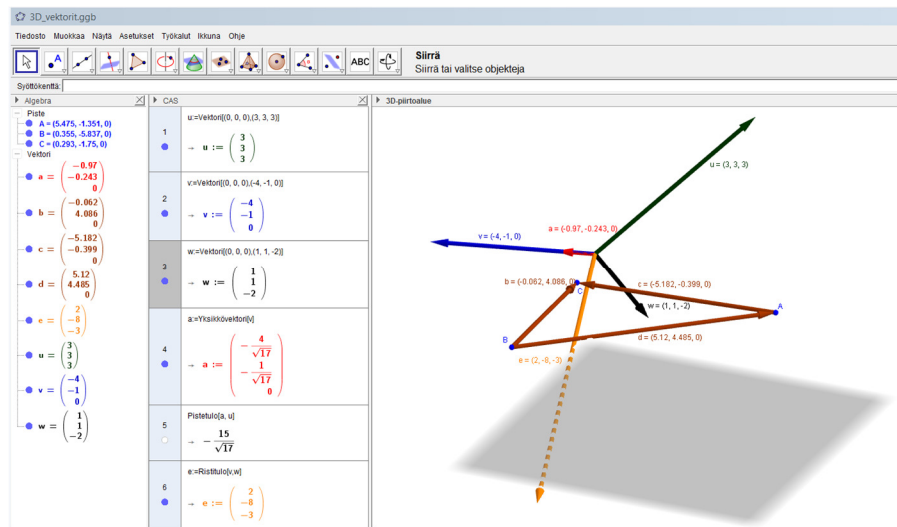
Vektorit

GeoGebran vektorien kuvaaminen on vähäiselläkin taidolla yksinkertaista ja nopeaa. Vektorit voidaan luoda kirjoittamalla joko algebra- tai CAS-ikkunaan tai piirtää suoraan piirtoalueelle. Ne voidaan piirtää annettujen pisteiden välille tai ilman pisteitä, jolloin GeoGebra tallentaa koordinaatit. Esimerkissä on luotu eri tavoin muutamia vektoreita ja yksinkertaisia operaatioita GeoGebran asiakirjaan luotuna (Kuva 43).



Kuva 43.

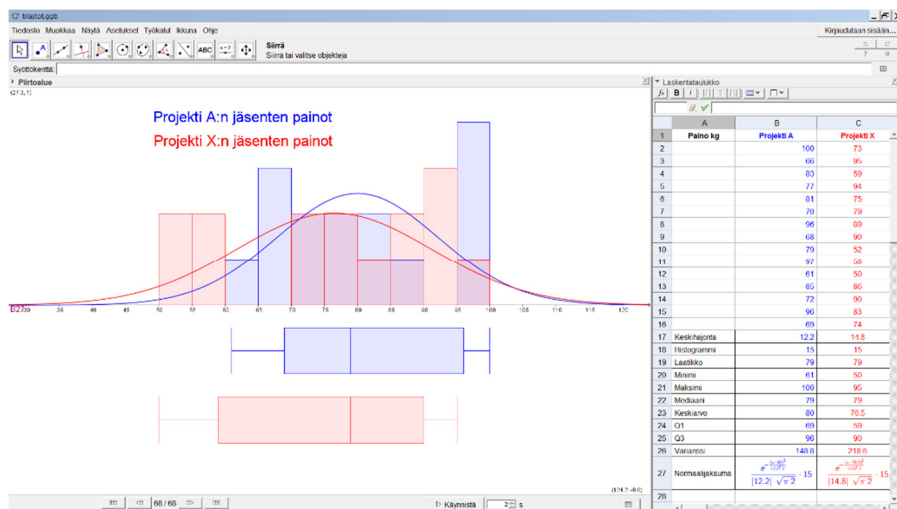
Vektorien esittäminen kolmiulotteisessa avaruudessa on GeoGebrassa yhtä yksinkertaista. Tässä esitetään tulos (Kuva 44) ilman akseleita ja koordinaattiruudukkoa kuvan sekavuuden välttämiseksi.



Kuva 44.

GeoGebran tilastomatemattiset toiminnot

GeoGebran tilastotoimintoja esitellään kuvan 45 avulla. Toimintojen kuvaamiseksi luotiin kaksi kuvitteellista viidentoista hengen projektiryhmää, Projekti A ja Projekti X. Sen jälkeen lisättiin henkilöiden painot (massat) satunnaislukuparilla GeoGebran laskentataulukkoon. GeoGebran tehtäväksi annettiin myös laskea laskentataulukkoon erilaisia tunnuslukuja ja piirtää histogrammit, laatikkokuvaajat (boxplot) ja normaalijakauma.



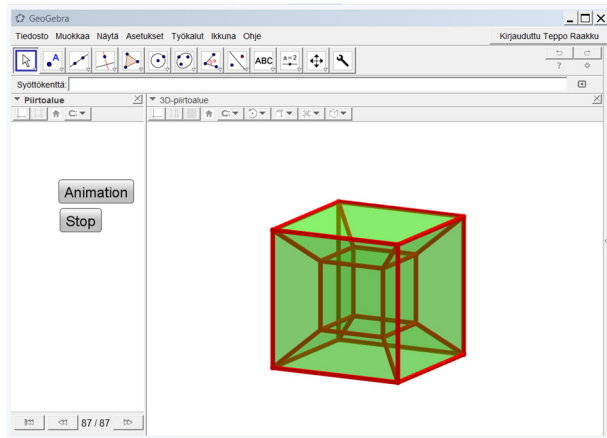
Kuva 45.

GeoGebran ohjetoiminnot

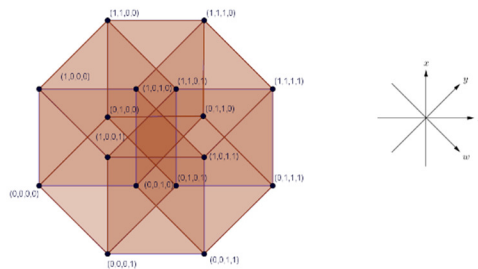
GeoGebran ohjevalikon ensimmäinen kohta ”Ohjeet” on linkitetty WEB-osoitteeseen <https://wiki.GeoGebra.org/fi/Ohjeet>. Vain HTML-asiakirjan nimi Ohjeet on suomea. Sivun sisältönä on englanniksi erilaisia pikaohjeita GeoGebran osa-alueisiin ja linkki yksityiskohtaisiin ohjeasiakirjoihin. Ohjevalikon toinen kohta käyttöohjeet vie myös WEB-sivulle. WEB-sivulla on otsikon ”Käyttöohje” alla ladattavana kolme PDF-muotoista ohjekirjaa: ”English manual for GeoGebra 5.0”, ”Finish manual for GeoGebra 3.2” ja ”Finish manual for GeoGebra 4.0”. ”Finnish” on tosiaan kirjoitettu yhdellä n-kirjaimella, lienee kysymyksessä kirjoitusvirhe. Suomenkielinen ohjekirja versiolle 4 on kuitenkin hyvä hakemisto ja opas uudemmillekin versioille. GeoGebran suomennos ja paikallistaminen on mielestäni hyvälaatuista. Desimaalipisteen käyttäminen desimaalipilkun sijasta on ehkä ainoa suomen kieleen sopimaton piirre. Kolmantena ohjevalikossa on linkki GeoGebra Forumiin, jossa käsitellään yleisesti ja erityisesti GeoGebran ja sen käytön kysymyksiä lähinnä englanniksi. GeoGebralla on myös suomalainen sivusto, vaikka sitä ei ohjelmassa mainita. GeoGebra-verkosto pitää yllä GeoGebra.fi-sivustoa, joka sisältää ohjeita, neuvoja ja opiskeluaineistoa. GeoGebran kautta on myös mahdollista liittyä GeoGebraTubeen. GeoGebraTubesta voidaan etsiä esimerkiksiasiakirjoja hakusanoin ja avata asiakirjat suoraan ohjelmaan tarkasteltaviksi.

Miten GeoGebralla voidaan toteuttaa hyperkuution, erityisesti neliulotteisen hyperkuution eli tesseractin piirtäminen? Ohjelman ohjevalikon missään kohdassa ei ollut tietoa suomeksi hakusanoilla hyperkuutio ja tesseracti, saksaksi hakusanoilla hyperwürfel ja tesseract sekä englanniksi hakusanoilla hypercube ja tesseract etsittäessä. GeoGebraTuben asiakirjalistan tiedosto-valikon ”Avaa GeoGebraTubesta ...” etsintä kuitenkin johti tuloksiin. GeoGebraTubesta löytyi hypercube-haulla 11 esimerkkiasiakirjaa ja tesseract-haulla 6 asiakirjaa. Eteläkorealainen Gimgyeong-Yong (김경용) oli luonut animoidun kuvaajan tesseractista (Kuva 46), kuitenkin ilman esitettyä matemaattista taustaselvitystä. Muutkin GeoGebraTuben tesseractiin liittyvät asiakirjat olivat pelkkiä esityksiä. YouTube-haulla hypercube löytyi Etelä-Alabaman yliopiston professorin Elvis Zapin selvitys tesseractin piirtämisestä, tosin ilman GeoGebraa ja liitutaulelle

piirrettynä Toteutin oman tesseraktini prof. Zapin (Zap 2008,1) ohjeiden mukaan GeoGebraan kaksikulotteiseen kuvaajaikkunaan (Kuva 47).



Kuva 46.



Kuva 47.

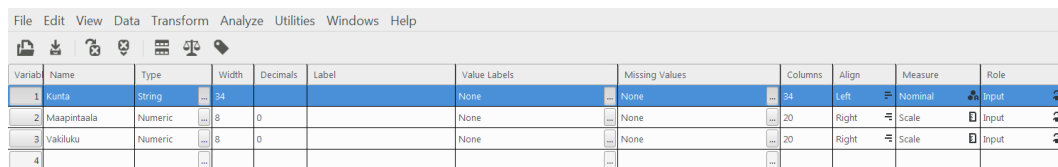
3.4 Tilasto-ohjelmistot

PSPP

PSPP on tilasto-ohjelmisto. Se voidaan asentaa yleisimpiin käytössä oleviin käyttöjärjestelmiin. Ohjelmiston verkkosivulla (GNU 2015a, 1) lukee, että PSPP on ”Free replacement for the proprietary program SPSS”. Se on vapaa ohjelmisto, jota saa käyttää, kopioida, jakaa ja muokata vapaasti ja ilmaiseksi (GNU 2015b, 1).

Tässä osassa esitellään PSPP:n perusominaisuuksia Tilastokeskuksen ”Väestötiheys alueittain 1.1.2015” -aineiston avulla. Siitä on tuotu tähän kuntakohtainen tieto PSPP-ohjelman datanäkymään. Tiedot saatiin kopioitua Tilastokeskuksen ilmainen PC-Axis-ohjelman avulla. Tuodut tietueet olivat kunnan nimi, pinta-ala neliökilometreissä ja väkiluku.

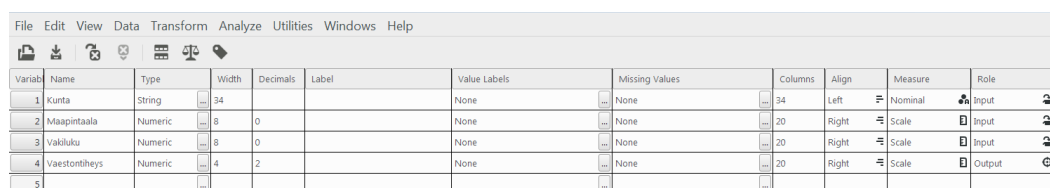
Ennen tiedon tuomista ovat muuttujanäkymässä tarvittavat muuttujat luotava tuotavia arvoja varten (Kuva 48).



Variable	Name	Type	Width	Decimals	Label	Value Labels	Missing Values	Columns	Align	Measure	Role
1	Kunta	String	34			None	None	34	Left	Nominal	Input
2	Maapintaala	Numeric	8	0		None	None	20	Right	Scale	Input
3	Väkiluku	Numeric	8	0		None	None	20	Right	Scale	Input
4											

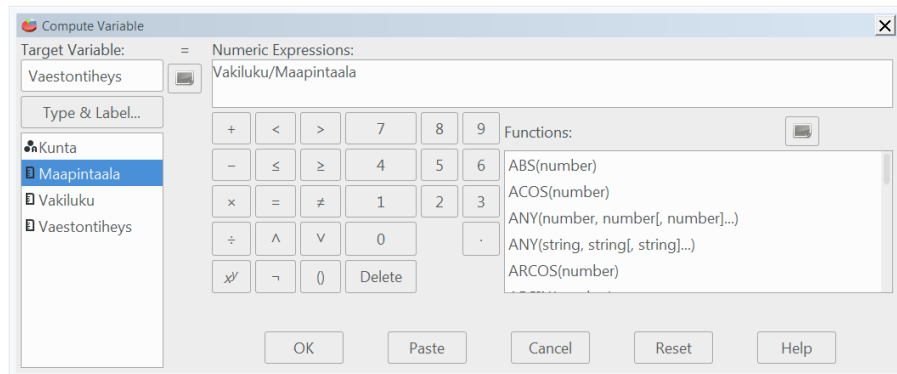
Kuva 48.

Muuttujanäkymässä (Variable View) luotiin kolme muuttujaa (Kuva 47). Ensimmäinen muuttuja luotiin 34:n merkin pituiseksi merkkijonoksi, ja sille annettiin saman verran (34 merkkipaikkaa) tilaa datanäkymän taulukossa ja tasattiin vasemmalle. Se tyypitettiin laatuero tiedoksi (Nominal) ja merkittiin tieto syötettäväksi datanäkymässä (Input). Maapinta-ala- ja väkilukutietomuuttujista luotiin numeerisia ja niistä tehtiin sopivan leveitä datanäkymään. Maapinta-ala on ilmoitettu neliökilometreissä. Kokonaisluvut on tasattu oikealle ja tehty asteikkotyyppisiksi (Scale) sekä merkittiin niiden tiedot syötettäväksi datanäkymässä. Sen jälkeen lisättiin muuttuja Väestötiheys (Kuva 49), jonka rooliksi (Role) merkittiin tulostus (Output). Koska väestötiheys lasketaan jakamalla väkiluku pinta-alalla, se syötettiin valikon Transform Compute -kohdasta esiin tulleeseen muuttujalaskuriin (Kuva 50). Tulos näkyi datanäkymässä valmiina arvoina (Kuva 51) (Helenius 1992 19–22).



Variable	Name	Type	Width	Decimals	Label	Value Labels	Missing Values	Columns	Align	Measure	Role
1	Kunta	String	34			None	None	34	Left	Nominal	Input
2	Maapintaala	Numeric	8	0		None	None	20	Right	Scale	Input
3	Väkiluku	Numeric	8	0		None	None	20	Right	Scale	Input
4	Väestötiheys	Numeric	4	2		None	None	20	Right	Scale	Output
5											

Kuva 49.



Kuva 50.

Case	Kunta	Maapintaala	Vakiluku	Vaestontiheys
1	Akaa	293	17052	58.20
2	Alajärvi	1008	10171	10.09
3	Alavieska	251	2687	10.71
4	Alavus	1088	12103	11.12
5	Asikkala	563	8374	14.87
6	Askola	212	5064	23.89
7	Aura	95	3982	41.92
8	Brändö	107	474	4.43
9	Eckerö	107	932	8.71
10	Enonkoski	305	1503	4.93
11	Enontekiö	7945	1890	.24
12	Espoo	312	265543	851.10
13	Eura	578	12314	21.30
14	Eurajoki	345	5954	17.26
15	Evijärvi	354	2651	7.49
16	Finström	123	2535	20.61
17	Forssa	248	17521	70.65
18	Föglö	134	568	4.24
19	Geta	84	494	5.88

Kuva 51, osa taulukosta

Taulukko lajiteltiin Vaestontiheys-muuttujan mukaan laskevasti, suurimmasta tiheydestä pienimpään. Helsinki oli sen jälkeen ylimmällä rivillä tiheimmin asuttuna kuntana vajaan 3000 asukkaan neliökilometrin kuormituksellaan ja harvimmin asuttuna. Viimeisellä, 317. rivillä on Savukoski vajaan viidennesihmisen kuormituksella.

Kuvailevaa tilastotietoa PSPP:stä saadaan valikosta Analyze (Analyysi) kohdasta Descriptive Statistics. Sieltä valittiin kohta Descriptives ja rastitettiin esitettäväksi kaikki tiedot Vaestontiheys-muuttujan arvoista. Tulokseksi saatiin taulukko erillisessä tulosikkunassa.

Taulukossa esitetään (Taulukko 6.) tapausten (N) eli kuntien määrä, väestötiheyden keskiarvo (Mean), keskiarvon keskivirhe (S.E. Mean), normaalijakauma (Std Dev), varianssi (Variance), huipukkuus (Kurtosis), huipukkuuden keskivirhe (S.E. Kurt), vinous, vinouden keskivirhe, alue (Range) eli tiheimmin ja harvimmin asutun kunnan tiheyksien erotus, minimi (Minimum), maksimi (Maximum) ja summa (Sum) eli kaikkien tiheyksien summa.

Taulukko 6.

Kuntien määrä	317
Väestötiheyden keskiarvo	61,82
Keskiarvon keskivirhe	13,48
Normaalijakauma	240,08
Varianssi	57640,09
Huipukkuus	76,48
Huipukkuuden keskivirhe	0,27
Vinous	7,92
Vinouden keskivirhe	0,14
Tiheimmin ja harvimmin asutun kunnan tiheyksien erotus	2913,98
Minimi	0,17
Maksimi	2914,15
Kaikkien tiheyksien summa	19597,18

Käsiteltävän aineiston perusteella haluttiin myös selvittää se, onko väkiluku riippuvainen maapinta-alasta. Asian selvittämiseksi tehtiin PSPP:llä lineaarinen regressioanalyysi. Valikosta Analyze valittiin kohta regressio ja edelleen selittäväksi

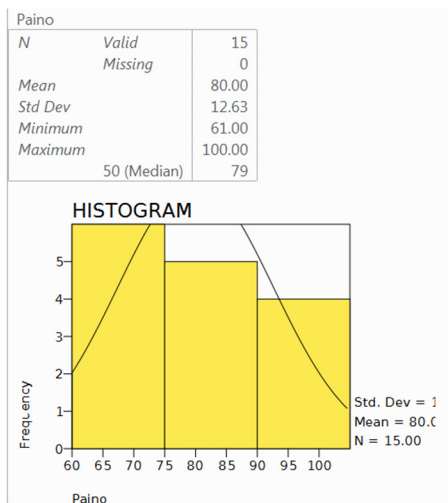
(Independent) muuttujaksi maapinta-alaa kuvaava muuttuja ja selitettäväksi (Dependent) muuttujaksi väkilukua kuvaava muuttuja. (Nummenmaa, Konttinen, Kuusinen & Leskinen 1997, 16).

Ohjelma tuotti "R Squaren" arvoksi 0,00 ja "Sig."-arvoksi 0,885. R Squaren (selitysaste) arvo tarkoittaa sitä, että maa-alueen koolla ei ole lineaarista yhteyttä sillä asuvan väen määrään. Sig.-arvo (significance, merkitsevyys) taas tarkoittaa sitä, ettei maa-alueen koolla ole tässä merkitsevyyttä väkiluvun selittäjänä (Nummenmaa, Konttinen, Kuusinen & Leskinen 1997, 153–154).

Luvussa 3.3 GeoGebran yhteydessä esitelty kuvaus (Kuva 43) Projekti A:n ja Projekti X:n jäsenten painojen jakautumisesta täytyy tehdä PSPP:ssä aineisto-kohtaisesti. Valikosta Analyze-Descriptive Statistics... -riviltä Frequencies avautuvan ikkunan Statistics-kohdasta valittiin samat tunnusluvut kuin GeoGebran esittelyn yhteydessäkin. Rastitettiin kohdat Mean, Standard Deviation, Median, Minimum, Maximum, Variance. Ikkunasta Charts... merkittiin otsikon Histograms alla olevat kohdat Draw histograms ja Superimpose normal curve, jotta normaali jakauman käyrä olisi suhteessa histogrammiin. Samat toimenpiteet tehtiin molemmille aineistoille (Kuvat 52 ja 54). Kummankaan aineiston graafiset kuvaajat eivät olleet laadullisesti tyydyttäviä lähinnä sen vuoksi, etteivät selitteineen mahduneet niille varattuun tilaan (Kuvat 53 ja 55). Lisäksi laatikkotyypinen boxplot-kuvaaja ei kuulu lainkaan PSPP:n graafisen käyttöliittymän toimintovalikoimiin. Tämä on kuitenkin ymmärrettävää, koska ohjelmiston kehitys on alkuvaiheessaan.

Case	HENKILO	PROJEKTI	PAINO
1	1	1	100
2	2	1	66
3	3	1	83
4	4	1	77
5	5	1	81
6	6	1	70
7	7	1	96
8	8	1	68
9	9	1	79
10	10	1	97
11	11	1	61
12	12	1	85
13	13	1	72
14	14	1	96
15	15	1	69
16			

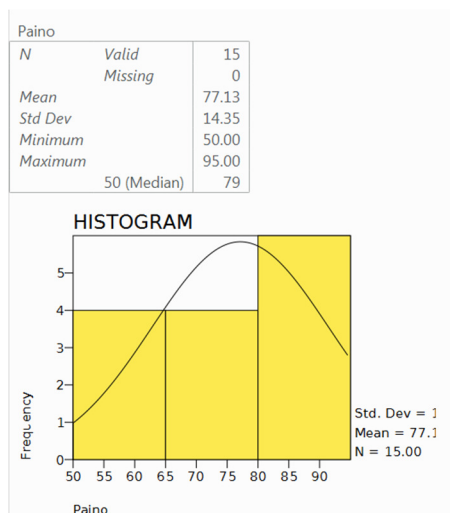
Kuva 52.



Kuva 53.

Case	HENKILO	PROJEKTI	PAINO
1	16	2	73
2	17	2	95
3	18	2	59
4	19	2	94
5	20	2	75
6	21	2	79
7	22	2	89
8	23	2	90
9	24	2	62
10	25	2	58
11	26	2	50
12	27	2	86
13	28	2	90
14	29	2	83
15	30	2	74
16			

Kuva 54.



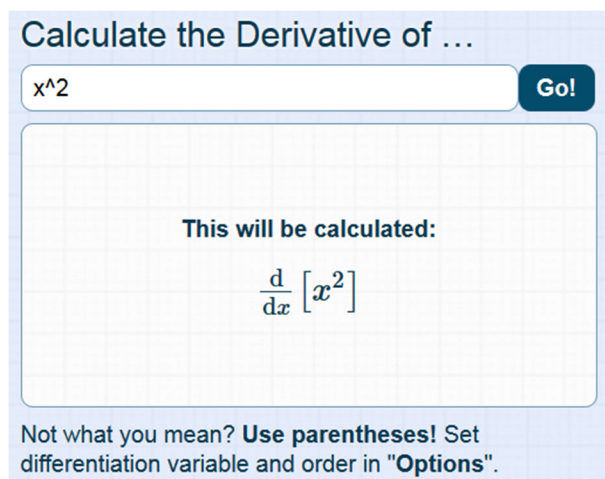
Kuva 55.

PSPP:n ohjetoiminto on Help-valikossa. Siinä on vain kaksi riviä, linkki viitekäsikirjaan (Reference Manual) ja tietoa ohjelmasta (About). Linux-asennuksen ohjelinkki käsikirjaan toimi moitteettomasti, mutta Windows-version asennus jätti luomatta linkin ohjevalikon ja ohjekirjan välille. Ohjekirja asentui kuitenkin PSPP:n asennuskansioon. Ohjekirjasta löytyi myös ohjeen boxplot-tyyppisen kuvaajan luomiseen ohjelman komentorivikäyttöliittymästä (Free Software Foundation, Inc. 2014, 130–132).

3.5 Matemaattiset WEB-palvelut

Tässä käsitellään kolmea matemaattista WEB-palvelua. Derivative Calculatoria WEB-osoitteessa <http://www.derivative-calculator.net> (Scherfgen 2015a, 1), Integral Calculatoria WEB-osoitteessa <http://www.integral-calculator.com> (Scherfgen 2015b, 1) ja WolframAlphaa WEB-osoitteessa <http://www.wolfram-alpha.com>. Käsittelemättä jätetään jo aiemmin tässä työssä esille tulleet SageMath, Maxima, GeoGebra ja eräiden muiden ohjelmistotuotteiden matemaattiset verkkopalvelut.

Derivative-Calculator ja Integral-Calculator ovat David Scherfgenin kehittämiä ja ylläpitämiä sivustoja. Niiden avulla voidaan derivoida ja integroida lausekkeita. Matemaattiset merkinnät kirjoitetaan niihin yleisen ohjelmointikielistä periytyvän tietokonealgebra tekstin merkintätavan mukaisesti (Kuva 56). Tulossivulla derivaatta esitetään kuitenkin ladotun tekstin mallin mukaisesti (Kuva 57).



Kuva 56.

Result

Done! See the result further below.

[Direct link to this calculation](#)

YOUR INPUT

$f(x) =$

x^2

[Simplify](#) [Roots/zeros BETA](#)

FIRST DERIVATIVE:

$\frac{d}{dx} [f(x)] = f'(x) =$

$2x$

[Simplify](#) [Show steps](#) [Roots/zeros BETA](#)

Kuva 57.

Opiskelijalle Derivative Calculator voi ilmaiskäyttöisyytensä lisäksi olla oiva apu derivoinnin opiskelun apuna ominaisuuksiensa vuoksi. Sen avulla derivointi voidaan esittää askelittain. Lisäksi ohjelma piirtää kaavion derivaatasta ja derivoitavasta funktiosta. Esimerkkinä esitetään toisen derivaatan ottaminen lausekkeesta vaihe vaiheelta. Syöte kirjoitetaan ja Options-valikosta valitaan derivoinnissa käytettävä muuttuja ja derivointien määrä (Kuva 58).

Calculate the Derivative of ...

$e^{-x^{3/2}}$ [Go!](#)

This will be calculated:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[e^{-x^{3/2}} \right]$$

Not what you mean? Use parentheses! Set differentiation variable and order in "Options".

About Help Examples Options

Configure the Derivative Calculator:

Differentiation variable: x

Differentiate how many times? 2

Simplify expressions?

Simplify all roots?
($\sqrt{x^2}$ becomes x , not $|x|$)

Use complex domain (C)?

Show calculation steps?

Calculate roots/zeros? BETA

Kuva 58.

Ohjelma tulostaa ensin vaihe vaiheelta lausekkeen ensimmäisen derivaatan. Hiiren osoittimen siirtäminen ensimmäisen laskentarivin päälle tuo esiin keltaisen neuvontapuhekuplan (Kuvat 59–61).

FIRST DERIVATIVE: $\frac{d}{dx}[f(x)] = f'(x) =$

The steps of calculation are displayed.

Move the mouse over a derivative $\frac{d}{dx}[\dots]$ or tap it in order to show its calculation.

Apply the exponential function rule:
 $[e^{u(x)}]' = e^{u(x)} \cdot u'(x)$
 Note: The chain rule has been applied here. Multiply by the inner function's derivative $u'(x)$.

$$\frac{d}{dx} \left[e^{-x^{\frac{3}{2}}} \right]$$

$$= e^{-x^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{d}{dx} \left[-x^{\frac{3}{2}} \right]$$

$$= \left(-\frac{d}{dx} \left[x^{\frac{3}{2}} \right] \right) e^{-x^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -\frac{3}{2} x^{\frac{3}{2}-1} e^{-x^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -\frac{3\sqrt{x}e^{-x^{\frac{3}{2}}}}{2}$$

Simplify Roots/zeros BETA

Kuva 59.

FIRST DERIVATIVE: $\frac{d}{dx}[f(x)] = f'(x) =$

The steps of calculation are displayed.

Move the mouse over a derivative $\frac{d}{dx}[\dots]$ or tap it in order to show its calculation.

Differentiation is linear. We can differentiate summands separately and pull out constant factors:
 $[a \cdot u(x) + b \cdot v(x)]' = a \cdot u'(x) + b \cdot v'(x)$

$$\frac{d}{dx} \left[e^{-x^{\frac{3}{2}}} \right]$$

$$= e^{-x^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{d}{dx} \left[-x^{\frac{3}{2}} \right]$$

$$= \left(-\frac{d}{dx} \left[x^{\frac{3}{2}} \right] \right) e^{-x^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -\frac{3}{2} x^{\frac{3}{2}-1} e^{-x^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -\frac{3\sqrt{x}e^{-x^{\frac{3}{2}}}}{2}$$

Simplify Roots/zeros BETA

Kuva 60.

FIRST DERIVATIVE: $\frac{d}{dx}[f(x)] = f'(x) =$

The steps of calculation are displayed.

Move the mouse over a derivative $\frac{d}{dx}[\dots]$ or tap it in order to show its calculation.

Apply the power rule:
 $[x^n]' = n \cdot x^{n-1}$

$$\frac{d}{dx} \left[e^{-x^{\frac{3}{2}}} \right]$$

$$= e^{-x^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{d}{dx} \left[-x^{\frac{3}{2}} \right]$$

$$= \left(-\frac{d}{dx} \left[x^{\frac{3}{2}} \right] \right) e^{-x^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -\frac{3}{2} x^{\frac{3}{2}-1} e^{-x^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -\frac{3\sqrt{x}e^{-x^{\frac{3}{2}}}}{2}$$

Simplify Roots/zeros BETA

Kuva 61.

SECOND DERIVATIVE:
 $\frac{d^2}{dx^2} [f(x)] = f''(x) =$

$$\frac{d}{dx} \left[-\frac{3\sqrt{x}e^{-x^{\frac{1}{2}}}}{2} \right]$$

$$= -\frac{3 \cdot \frac{d}{dx} [\sqrt{x}e^{-x^{\frac{1}{2}}}] }{2}$$

$$= -\frac{3 \left(\frac{d}{dx} [\sqrt{x}] \cdot e^{-x^{\frac{1}{2}}} + \sqrt{x} \cdot \frac{d}{dx} [e^{-x^{\frac{1}{2}}}] \right)}{2}$$

$$= -\frac{3 \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-x^{\frac{1}{2}}} + e^{-x^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{d}{dx} [-x^{\frac{1}{2}}] \cdot \sqrt{x} \right)}{2}$$

$$= -\frac{3 \left(\left(-\frac{d}{dx} [x^{\frac{1}{2}}] \right) \sqrt{x} e^{-x^{\frac{1}{2}}} + \frac{e^{-x^{\frac{1}{2}}}}{2\sqrt{x}} \right)}{2}$$

$$= -\frac{3 \left(\frac{e^{-x^{\frac{1}{2}}}}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} \sqrt{x} e^{-x^{\frac{1}{2}}} \right)}{2}$$

$$= -\frac{3 \left(\frac{e^{-x^{\frac{1}{2}}}}{2\sqrt{x}} - \frac{3xe^{-x^{\frac{1}{2}}}}{2} \right)}{2}$$

Rewrite/simplify:

$$= \frac{9xe^{-x^{\frac{1}{2}}}}{4} - \frac{3e^{-x^{\frac{1}{2}}}}{4\sqrt{x}}$$

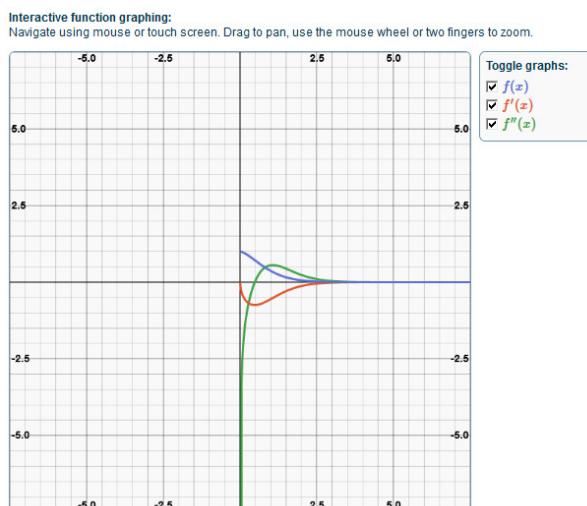
Simplify:

$$\frac{(9x^{\frac{1}{2}} - 3) e^{-x^{\frac{1}{2}}}}{4\sqrt{x}}$$

Simplify Roots/zeros BETA

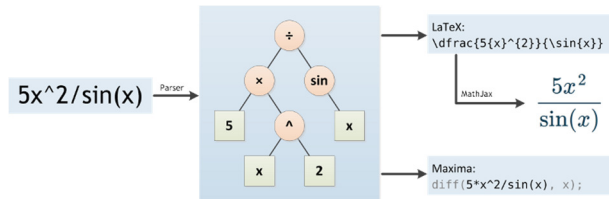
Kuva 62.

Toinen derivaatta esitetään myös vaihe vaiheelta (Kuva 62). Sekin on ohjeistettu keltaisilla puhekuplaneuvoilla. Niitä ei esitetä tässä. Funktioiden kuvaajat näytetään koordinaatistossa eri värein (Kuva 63).



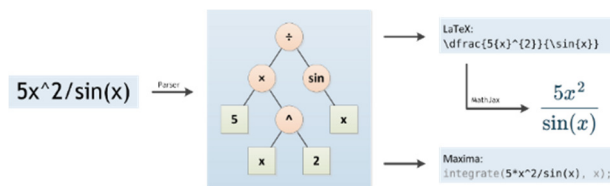
Kuva 63.

Ohjepalstalla on lyhyt muutaman kappaleen käyttöohje; muita ohjetiedostoja ei ole. Ohjelman sivulla on kuitenkin mielenkiintoinen kuvallinen (Kuva 64) selvitys siitä, miten derivointilaskin toimii (How the Derivative Calculator Works).



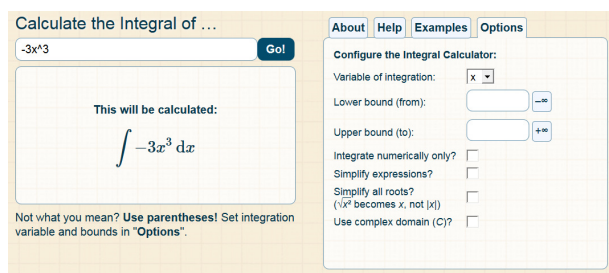
Kuva 64.

Integral Calculatorin ohjelmallinen rakenne on samankaltainen kuin Derivative Calculatorin (Kuva 65).



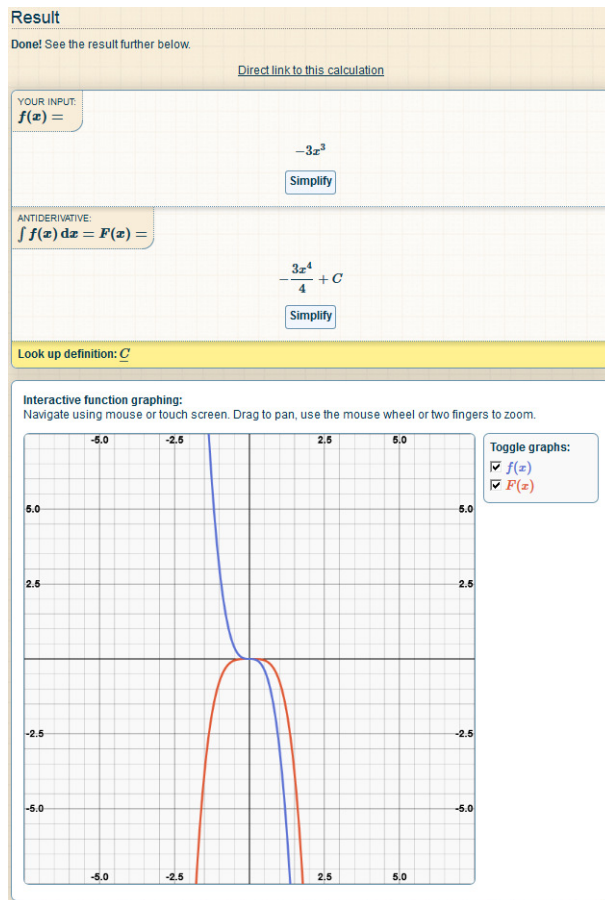
Kuva 65.

Tässä käytetään integroitavana esimerkkinä lauseketta $-3x^3$ (Kuva 66).



Kuva 66.

Ohjelma esittää integroinnin tuloksen Derivative Calculatorin tapaan sekä tekstuaalisesti että kuvallisesti. Sekä Derivative Calculator että Integral Calculator tallentavat laskutoimitukset. Niihin voidaan viitata suoralla WEB-linkillä "Direct link to this calculation" (Kuva 67).



Kuva 67.

Pelkästään laskentaympäristönä Wolfram Group LLC:n WolframAlpha® on monipuolinen. Ohjelma sisältää matemaattisen tiedon lisäksi myös tietoa matemaattikan soveltamisen kohteista. Ohjelmiston WEB-sivulla <http://www.wolframalpha.com> ilmoitetaan ohjelman tyyppiä "computational knowledge engine", joka vapaasti suomennettuna on 'laskennallinen tietokone'. Tässä viitataan tietokoneella tiedon hakemiseen ja tuottamiseen liittyvään koneeseen eikä perinteiseen käsitykseen tietokoneesta von Neumannin mallin mukaisena koneena (Tanenbaum 1990, 17–18). WolframAlphassa on useita luokiteltuja tiedon alueita, Matematiikasta kielitieteeseen, lääketieteeseen, bio- ja geotieteisiin ja niin edelleen. Muutamat alueet, kuten sovellusaluekohtaiset ratkaisut ja CDF-tiedostojen dynaaminen toiminta, vaativat maksulliset PRO-oikeudet. Myös laskenta-aika laskutoimitusta kohden on tietyn rajan jälkeen maksullista.

WolframAlpha mahdollistaa varsin monipuolisen muodon ongelmanasettelulle. Toisen derivaatan ottaminen lausekkeesta $e^{-x^{3/2}}$ voidaan esittää kuvan 68 mukaisesti osin luonnollisella kielellä, vaikkakin vain englanniksi. Järjestelmä esittää tuloksen (Kuva 69) sekä erilaisia laskutoimitukseen ja tulokseen liittyviä kaavioita (Kuva 70) ja vaihtoehtoisia esitysmuotoja sekä muiden esitykseen liittyvien operaatioiden tuloksia. Tässä tehty derivointi ylitti joiltain osin järjestelmän ilmaisen vakiolaskenta-ajan (Kuva 71).

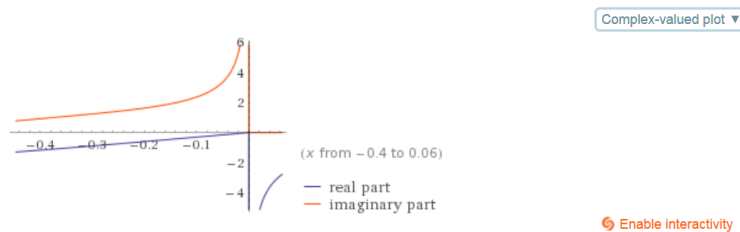


Kuva 68.

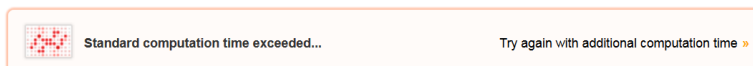
Derivative: [Approximate form](#) [Step-by-step solution](#)

$$\frac{d^2}{dx^2}(e^{-x^{3/2}}) = \frac{3 e^{-x^{3/2}} (3 x^{3/2} - 1)}{4 \sqrt{x}}$$

Kuva 69.



Kuva 70.



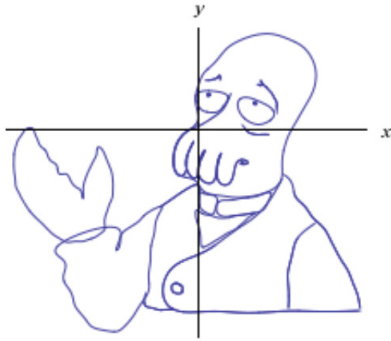
Kuva 71.

WolframAlphan vastattavaksi esitettävien ongelmien määrä on käytännössä rajaton. Esimerkkinä esitetään ongelman "Doctor John Zoidberg-like curve". Tuloksena on varsin mittavan yhtälöesityksen lisäksi kuvaaja (Kuva 72).

Input interpretation:

Doctor John Zoidberg-like curve (popular curve)

Plot:



(plotted for t from 0 to 76π)

Kuva 72.

4 POHDINTA

Matemaattisten tietokoneohjelmien kehitys on seurannut yhteiskunnan eri osa-alueiden tietokoneistumisen kehitystä. Tietokoneiden ja internetin avulla tiedon saaminen, hyödyntäminen ja jakaminen on lähes kaikilla elämän, kulttuurin ja tiedon alueilla helpottunut. Niiden avulla on helppo saada ainakin pinnallinen yleiskäsitys asioiden luonteesta. Myös matematiikka on arkipäiväistynyt. Erilaiset verkkopalvelut laskevat sopivasti muotoillut matemaattiset tehtävänannot ja kertovat miten ne sen tekevät.

Matemaattiset tietokoneohjelmat ovat kehittyneet numeerisista sovelluksista kohti symbolisia ja yleismatemaattisia ohjelmia. Ne toimivat myös tekstinkäsittely ja esitysohjelmistoina ja muistikirjaohjelmina. Matematiikkaohjelmat ovat olleet hyvin kalliita, mutta kehitys näyttää siirtyvän suurella joukolla kehitettävien ilmaiskäyttöisten ohjelmien käytön lisääntymiseen. Nykyisissä matemaattisissa sovelluksissa yhdistyvät taulukkolaskennan yksinkertaisuus sekä tilastotieteelliset ja geometriset ominaisuudet. Niiden merkintätavat ovat myös hyvin samankaltaisia, jotka periytynevät aiemmista tietokoneohjelmointikielistä.

Matemaattiset sovellukset, kuten SageMath, Maxima tai GeoGebra, antavat mahdollisuuden myös matematiikan ammattilaisille ja harrastajille työvälineen ja toimintaympäristön. Sovelluksen leviämisen ja levittämisen opiskelijoille on tärkeää, että ammattilaiset ja alaan perehtyneet ovat hyväksyneet sen käytettäväksi. Opiskelijoille nämä ohjelmat antavat mahdollisuuden paitsi ohjelmien, merkintätapojen ja käytön lisäksi myös ilmaiskäyttöisen ja helposti tavoitettavan matemaattisen ympäristön. Matemaattisissa tietokoneohjelmaympäristössä toimiminen lisää mielestäni matematiikan kielen ymmärrystä ja antaa myös mahdollisuuden kiinnostua siihen liittyviin aihealueisiin.

Olen seurannut tiedotusvälineissä käytävää keskustelua matematiikan opiskelun ja matemaattisten tietokoneohjelmien käytöstä osana opiskelua. Erityisesti yliopilastutkintoon uudistamisesta keskustellaan. Keskusteluissa on sekä vahvoja

äärimielipiteitä että maltillisia näkemyksiä. Toiset puoltavat kehitystä ja toiset haluavat jarruttaa sitä. Perusteina keskustelussa esiintyvät pelot matematiikan oppimisen ja opetuksen laadun heikkenemisestä ja pelot teknisen, taloudellisen ja koulutuksellisen kehityksen karkaamisesta saavuttamattomiin. Ehkä tulevaisuudessa tiedon lisääntyminen ihmisen oppimisesta ratkaisee keskustelun tai osoittaa siinä käytettävien argumenttien totuuden.

Toivon, että tämä työ empiirisestä otteestaan huolimatta ja pelkästään aihetta kevyesti koskettavana näkökulmana antaa aihetta keskusteluun matemaattisten tietokoneohjelmien käytöstä opiskelussa ja arjessa. Etenkin keskustelu opiskelijoiden ja opettajien välillä olisi suotavaa.

LÄHTEET

- Bricklin D. 2015a. Visicalc. Viitattu 14.9.2015 <http://www.danbricklin.com/visicalc.htm>.
- Bricklin D. 2015b. Visicalc. Viitattu 14.9.2015 <http://www.danbricklin.com/history/0452ce80.jpg>. Kuvan mukaelma.
- Free Software Foundation, Inc. 2014. PSPP Users' Guide. PSPP:n käyttäjän käsikirja pdf-muodossa ohjelmaversiolle 0.8.5-gdaa1fe.
- The GNOME Project Gnumeric. 2015. Gnumeric. Viitattu 14.9.2015 <http://www.gnumeric.org/>.
- Grabmeier, J., Kaltofen, E. & Weispfenning, V. 2003. Computer Algebra Handbook. Mörlenbach: Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
- Dodier, R. 2015. Maxima 5.36.0 Manual, Functions and Variables for pictures. Viitattu 14.8.2015 http://maxima.sourceforge.net/docs/manual/maxima_50.html#SEC252.
- Digabi. 2015a. DigabiOS. Viitattu 14.9.2015 <https://digabi.fi/digabios>.
- Digabi. 2015b. DigabiOS:n ohjelmistolistaus. Viitattu 14.9.2015 <https://digabi.fi/tekniikka/ohjelmistot/>.
- Drijvers, P.H.M. 2003. Learning Algebra in a Computer Algebra Environment, Design research on the understanding of the concept of parameter. Wilco, Amersfoort. PDF-tiedosto. Viitattu 23.7.2015 <http://dSPACE.library.uu.nl/bitstream/handle/1874/886/full.pdf>.
- GNU. 2015a, GNU PSPP:n etusivu. Viitattu 18.9.2015 <https://www.gnu.org/software/pspp/>.
- GNU. 2015b. Free Software. Viitattu 18.9.2015 <https://www.gnu.org/philosophy/free-sw.html>.
- GNU Project GMP. 2015. GMP. Viitattu 14.9.2015 <https://gmplib.org/>.
- Helenius, H. 1992. Tilastollisten menetelmien perustiedot. 3. korjattu painos. Salo: Statcon Oy.
- Hietakymi, E. 2014. Matematiikan sähköinen ylioppilaskoe ja GeoGebra sen työvälineenä. Helsingin yliopisto. Matematiikan ja tilastotieteen laitos. Pro gradu -tutkielma.
- Hohenwarter M & al. 2015a. GeoGebra. Viitattu 14.9.2015 <https://GeoGebra.org/>.

Hohenwarter & al. 2015b. GeoGebran lisenssi. Viitattu 14.8.2015

Ivashov A. SMath Studio Desktop. Viitattu 30.8.2015 <http://en.smath.info/>.
KCP Technologies. 2015. The Geometer's Sketchpad® Resource Center. Viitattu 14.9.2015 <http://www.dynamicgeometry.com/>.

Kivelä, S. 2008. Matemaattisia ohjelmistoja. Ohjelmistoluettelo. Viitattu 15.7.2015 <http://math.aalto.fi/~kivela/work/linkit/ohjelmat.html>.

Kivelä, S. 2012. Symbolinen laskenta ja koulumatematiikan tulevaisuus. eDimensio 2012. Verkkolehti. Viitattu 16.6.2015 http://www.maol.fi/fileadmin/users/EDimensio/eDimension_arkisto/eDimensio2012_pieni.pdf.

Kivelä, S. 2014. Matemaattiset ohjelmistot. Kurssiesite. Viitattu 15.7.2015 <http://math.aalto.fi/opetus/MatOhjelmistot/2014kevat/esite.pdf>.

Kortenkamp, U., Weigand, H-G & Weth., T. 2005. Informatische Ideen im Mathematikunterricht. Työryhmäraportti, Mathematikunterricht und Informatik. Dillingen an der Donau: Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e.V. Viitattu 15.7.2015 <http://didaktik-der-mathematik.de/ak/mui/tagungsbaende/Tagungsband2005.pdf>.

Labs, O. 2007. Dynamische Geometrie: Grundlagen und Anwendungen. Luentokäsikirjoitus. Universität des Saarlandes. Viitattu 15.7.2015 http://www.oliverlabs.net/data/0708_DynGeo.pdf.

Lauckner, K. & Lintner, M. 2001. The Computer Continuum. 2. painos. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

Lehtonen, A. 2013. Symbolinen laskenta, syksy 2013. Jyväskylän yliopisto. Luento-esimerkki. Viitattu 15.7.2015 http://users.jyu.fi/~lehtonen/opetus/sl2013/SL_esim.pdf.

Maxima-Online. 2015. Maxima-Online. Viitattu 23.7.2015 <http://maxima-online.org/?inc=r1133802663>

MIT Project MAC. 2015. Maxima. Viitattu 23.7.2015 <http://maxima.sourceforge.net/>.

Nummenmaa T., Konttinen R., Kuusinen J. & Leskinen E. 1997. Tutkimusaineiston analyysi. 1. painos. Porvoo: WSOY.

Open Source Initiative 2015. Licenses by Name. Viitattu 1.10.2015 <http://opensource.org/licenses/alphabetical>.

PTC, Inc. 2015. Mathcad. Viitattu 14.8.2015 <http://www.ptc.com/product/mathcad>.

- R Development Core Team. 2015. R-projekti. Viitattu 14.8.2015 <http://www.r-project.org/>.
- SageMath Project. 2015. SageMath. Viitattu 14.9.2015 <http://www.sagemath.org/>.
- Scherfgen D. 2015a. Derivative Calculator. Viitattu 18.7.2015 <http://www.derivative-calculator.net/>.
- Scherfgen D. 2015b. Integral Calculator. Viitattu 18.7.2015 <http://www.integral-calculator.com/>.
- Sourceforge. 2014. Maxima Plotting. Viitattu 25.10.2015 <http://maxima.sourceforge.net/docs/manual/figures/plotting11.png>
- Tanenbaum A. S. 1990. Structured Computer Organization, 3rd edition, Englewood Cliffs: Prentice Hall, Inc.
- Texas Instruments. 2015. TI-Nspire™ CX CAS Student Software. Viitattu 14.9.2015 https://education.ti.com/en/us/products/computer_software/ti-nspire-software/ti-nspire-cas-student-software/tabs/overview.
- The Sage Development Team. 2015. Sage Reference v6.8, 2D Plotting. Viitattu 14.8.2015 <http://doc.sagemath.org/html/en/reference/plotting/sage/plot/plot.html>.
- Vision Objects. 2015. MyScript Calculator Handwriting. Viitattu 14.8.2015 <http://www.myscript.com/technology/technical-demonstrations/>.
- Waterloo Maple Inc. Maple. Viitattu 14.8.2015 <http://www.maplesoft.com/>.
- Wikipedia. 2015a. Enganninkielinen Wikipedia. Viitattu 23.7.2015 https://en.wikipedia.org/wiki/Symbolic_computation.
- Wikipedia. 2015b. Saksankielinen Wikipedia. Viitattu 23.7.2015 https://de.wikipedia.org/wiki/Dynamische_Geometrie
- Wikipedia. 2015c. Saksankielinen Wikipedia. Viitattu 23.10.2015 <https://de.wikipedia.org/wiki/M%C3%B6biusband>.
- Wikipedia. 2015d. Saksankielinen Wikipedia. Viitattu 23.10.2015 https://de.wikipedia.org/wiki/Kleinsche_Flasche.
- Wolfram Group LLC, 2015a. Wolfram Alpha. Viitattu 14.9.2015 <http://www.wolframalpha.com/>.
- Wolfram Group LLC. 2015b. Mathematica. Viitattu 14.8.2015 <http://www.wolfram.com/mathematica/>.

Wolfram MathWorld. 2015. Sine Integral. Viitattu 14.8.2015 <http://math-world.wolfram.com/SineIntegral.html>

WolframAlpha. 2015. Suomen ja Ruotsin bruttokansantuotteiden erotus. Viitattu 23.10.2015 <http://www.wolframalpha.com/input/?i=GDP+Sweden-GDP+Finland>.

Ylioppilastutkintolautakunta. 2013. Ohje sähköisen ylioppilaskokeen päätelaitteesta. Viitattu 14.9.2015 https://www.ylioppilastutkinto.fi/images/sivuston_tiedostot/Ohjeet/Digabi/fi_ytl_paatelaitteohje_2013.pdf.

Ylioppilastutkintolautakunta. 2015. Ohjelmistot. Viitattu 14.9.2015 <https://digabi.fi/tekniikka/ohjelmistot/>.

Zap, E. 2008. Drawing the Hypercube #1, YouTube-video. Viitattu 18.9.2015 <https://www.youtube.com/watch?v=ccws454YiVM>.

LIITTEET

- Liite 1. Ohjelmistotiedot sekä niiden asennuksen ja käytön sujuvuustarkastelu

Liite 1 1(46)

Liite 1. Ohjelmistotiedot sekä niiden asennuksen ja käytön sujuvuustarkastelu

Taulukossa "-" tarkoittaa joko sitä, ettei tietoa ole helposti saatavilla tai asennus tai käyttö on epäonnistunut jostain syystä. Luettelossa käytetyissä lisensseistä on selvitys Open Source Initiativen sivuilla (Open Source Initiative 2015, 1).

Nimi	3D-XplorMath-J
Verkko-osoite	http://3d-xplormath.org/
Tyyppi	matemaattiset kuvaajat
Sujuvuus	OK
Lisenssi	BSD
Versio	1.0
Alusta	monialustainen Java-sovellus
Kehittäjät	3DXM Consortium
Ohjeet	http://3d-xplormath.org/j/docs/en

Nimi	Abinit
Verkko-osoite	http://www.abinit.org/
Tyyppi	kirjasto
Sujuvuus	OK
Lisenssi	GPL
Versio	7.10.4
Alusta	Unix, Linux, alustariippumaton
Kehittäjät	Gnu Project
Ohjeet	http://www2.le.ac.uk/departments/physics/people/mervynroy/lectures/pa4311/abinit-workshop-notes

Nimi	ACL2
Verkko-osoite	http://www.cs.utexas.edu/users/moore/acl2/
Tyyppi	mallinnus
Sujuvuus	OK
Lisenssi	BSD 3-clause
Versio	7.0
Alusta	X-shell, Emacs
Kehittäjät	Boyer; Moore, Kaufmann
Ohjeet	http://www.cs.utexas.edu/users/moore/acl2/

Nimi	acsiX
Verkko-osoite	http://www.acslxtreme.com/solutions/pharmaceutical.shtml
Tyyppi	mallinnus
Sujuvuus	-
Lisenssi	-
Versio	-
Alusta	-
Kehittäjät	-

Liite 1 2(46)

Ohjeet	-
--------	---

Nimi	ADMB
Verkko-osoite	http://admb-project.org/
Tyyppi	mallinnus
Sujuvuus	OK
Lisenssi	BSD
Versio	11.2
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	ADMB Core Team
Ohjeet	http://www.admb-project.org/users/tutorials-and-examples

Nimi	AMPLIDE
Verkko-osoite	http://ampl.com/
Tyyppi	mallinnus
Sujuvuus	OK
Lisenssi	yksinoikeudellinen, vapaa ohjelmisto, avoin lähdekoodi
Versio	1.0.0
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	AMPL Optimization Inc
Ohjeet	http://ampl.com/resources/the-ampl-book/

Nimi	APMonitor
Verkko-osoite	http://www.apmonitor.com/
Tyyppi	mallinnus
Sujuvuus	OK
Lisenssi	yksinoikeudellinen, BSD
Versio	0.7.0
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	APmonitor
Ohjeet	http://apmonitor.com/wiki/

Nimi	Apollonius
Verkko-osoite	https://itunes.apple.com/app/apollonius/id368166017?mt=8
Tyyppi	IGS
Sujuvuus	OK
Lisenssi	yksinoikeudellinen, vapaa ohjelmisto
Versio	1.0
Alusta	iOS
Kehittäjät	Adolfo Rodriguez
Ohjeet	ohjelmassa

Nimi	Archimedes Geo3D
Verkko-osoite	http://www.raumgeometrie.de/drupal/en
Tyyppi	IGS

Liite 1 3(46)

Sujuvuus	OK
Lisenssi	yksinoikeudellinen
Versio	1.3.8
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	Andreas Goebel
Ohjeet	http://www.raumgeometrie.de/documentation/en/DocumentationGeo.html

Nimi	Armadillo
Verkko-osoite	http://arma.sourceforge.net/
Tyyppi	kirjasto
Sujuvuus	OK
Lisenssi	MPL2
Versio	4.650
Alusta	C++
Kehittäjät	Curtin, Sanderson
Ohjeet	http://arma.sourceforge.net/docs.html

Nimi	Audacity
Verkko-osoite	http://audacity.sourceforge.net/
Tyyppi	äänenuokkain
Sujuvuus	OK
Lisenssi	GPL
Versio	2.0.5
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	The Audacity Team
Ohjeet	http://audacity.sourceforge.net/help/

Nimi	Avogadro
Verkko-osoite	http://avogadro.cc/
Tyyppi	molekyylimuokkain
Sujuvuus	OK
Lisenssi	AL, GPLv2, PD
Versio	1.1.1
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	Avogadro Development Team
Ohjeet	http://avogadro.cc/wiki/

Nimi	Axiom
Verkko-osoite	http://www.axiom-developer.org/
Tyyppi	CAS
Sujuvuus	OK
Lisenssi	Muokattu BSD-lisenssi
Versio	1.1.12
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	Richard Jenks
Ohjeet	http://www.axiom-developer.org/axiom-WEBSITE/books.html

Liite 1 4(46)

Nimi	Baghera
Verkko-osoite	-
Tyyppi	IGS
Sujuvuus	-
Lisenssi	yksinoikeudellinen, kaupallinen
Versio	-
Alusta	Windows
Kehittäjät	-
Ohjeet	-

Nimi	Baudline
Verkko-osoite	http://www.baudline.com/
Tyyppi	DSP
Sujuvuus	OK
Lisenssi	yksinoikeudellinen, GPL
Versio	1.0.8
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	SigBlisp DSP Engineering
Ohjeet	http://www.baudline.com/manual/index.html

Nimi	Bell Curves
Verkko-osoite	https://itunes.apple.com/us/app/bell-curves-graphing-calculator/id783996056?mt=8
Tyyppi	tilastomatemaattiset kuvaajat
Sujuvuus	OK
Lisenssi	Apple LAEULA
Versio	1.3.7
Alusta	iOS
Kehittäjät	Larry Feldman
Ohjeet	ohjelmassa

Nimi	C.aR
Verkko-osoite	http://car.rene-grothmann.de/doc_en/index.html
Tyyppi	IGS
Sujuvuus	OK
Lisenssi	GPL
Versio	12.0
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	R. Grothmann
Ohjeet	http://car.rene-grothmann.de/doc_en/Documentation/index.html

Nimi	Cabri 3D v2
Verkko-osoite	http://www.cabri.com/cabri-3d.html
Tyyppi	IGS
Sujuvuus	OK

Liite 1 5(46)

Lisenssi	yksinoikeudellinen, kaupallinen
Versio	2.1.2
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	CABRILOG SAS
Ohjeet	http://download.cabri.com/data/pdfs/manuals/c3dv212/user-manual-eng-us.pdf

Nimi	Cadabra
Verkko-osoite	http://cadabra.phi-sci.com/
Tyyppi	CAS
Sujuvuus	OK
Lisenssi	GPLv2
Versio	1.39
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	Kasper Peeters
Ohjeet	http://cadabra.phi-sci.com/documentation.html

Nimi	Calc Visualizer
Verkko-osoite	https://itunes.apple.com/us/app/calc-visualizer/id890468108?mt=8
Tyyppi	matemaattiset kuvaajat
Sujuvuus	OK
Lisenssi	Apple LAEULA
Versio	2.0
Alusta	iOS
Kehittäjät	Thomas Bretl
Ohjeet	ohjelmassa

Nimi	Calcinator
Verkko-osoite	http://www.calcinator.com/
Tyyppi	WEB CAS
Sujuvuus	OK
Lisenssi	yksinoikeudellinen, kaupallinen
Versio	4.1
Alusta	WEB
Kehittäjät	G. J. Paulos
Ohjeet	http://www.calcinator.com/about.html

Nimi	Cantor
Verkko-osoite	https://edu.kde.org/cantor/
Tyyppi	CAS
Sujuvuus	OK
Lisenssi	GPLv2
Versio	0.2
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	Alexander Rieder
Ohjeet	https://docs.kde.org/trunk5/en/kdeedu/cantor/cantor.pdf

Liite 1 6(46)

Nimi	CaRMetal
Verkko-osoite	http://db-maths.nuxit.net/CaRMetal/index_en.html
Tyyppi	IGS
Sujuvuus	OK
Lisenssi	GPL
Versio	3.8.3
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	R. Grothmann
Ohjeet	http://db-maths.nuxit.net/CaRMetal/index_en.html

Nimi	Ch
Verkko-osoite	http://www.softintegration.com/
Tyyppi	datakieli
Sujuvuus	-
Lisenssi	Freeware, yksinoikeudellinen, kaupallinen, Trialware
Versio	7.0
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	Sofintegration, Inc.
Ohjeet	https://www.softintegration.com/docs/

Nimi	Cinderella.2
Verkko-osoite	http://cinderella.de/
Tyyppi	IGS
Sujuvuus	OK
Lisenssi	yksinoikeudellinen, kaupallinen, vapaa ohjelmisto
Versio	2.8
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	Heureka-Klett, Springer-Verlag
Ohjeet	http://doc.cinderella.de/tiki-index.php

Nimi	CoCoA
Verkko-osoite	http://cocoa.dima.unige.it/
Tyyppi	CAS
Sujuvuus	OK
Lisenssi	GPL
Versio	5.1.1
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	The CoCoA Team
Ohjeet	http://cocoa.dima.unige.it/

Nimi	COMSOL Multiphysics
Verkko-osoite	http://www.comsol.com/
Tyyppi	data-analyysi
Sujuvuus	-
Lisenssi	yksinoikeudellinen, kaupallinen, EULA
Versio	5.1

Liite 1 7(46)

Alusta	monialustainen
Kehittäjät	COMSOL Group
Ohjeet	http://www.comsol.com/support/knowledgebase/browse/900/

Nimi	CvFit
Verkko-osoite	https://itunes.apple.com/au/app/cvfit/id799455591?mt=8
Tyyppi	käyrän sovitus
Sujuvuus	OK
Lisenssi	Apple LAEULA
Versio	1.3.0
Alusta	iOS
Kehittäjät	Funami Masayuki
Ohjeet	ohjelmassa

Nimi	DADiSP
Verkko-osoite	http://www.dadisp.com/
Tyyppi	DSP
Sujuvuus	OK
Lisenssi	yksinoikeudellinen, kaupallinen
Versio	6.5 B05
Alusta	Windows
Kehittäjät	DSP Development Corporation
Ohjeet	http://www.dadisp.com/WEBhelp/dsphelp.htm

Nimi	DataAnalysis
Verkko-osoite	https://itunes.apple.com/us/app/dataanalysis/id375603883?mt=8
Tyyppi	tilastomatematiikka
Sujuvuus	OK
Lisenssi	Apple LAEULA
Versio	2.0.30
Alusta	iOS
Kehittäjät	Evan Kantrowitz
Ohjeet	ohjelmassa

Nimi	DataMelt
Verkko-osoite	http://jwork.org/dmelt/
Tyyppi	data-analyysi
Sujuvuus	OK
Lisenssi	GPLv3
Versio	1.1
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	S. Chekanov
Ohjeet	http://jwork.org/dmelt/wikidoc/doku.php

Nimi	Dataplot
------	----------

Liite 1 8(46)

Verkko-osoite	http://www.itl.nist.gov/div898/software/dataplot/
Tyyppi	tilastomatemaattiset kuvaajat
Sujuvuus	OK
Lisenssi	Public Domain
Versio	6/2013
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	NIST
Ohjeet	http://www.itl.nist.gov/div898/software/dataplot/

Nimi	Demetra+
Verkko-osoite	http://www.cros-portal.eu/content/demetra
Tyyppi	tilastomatematiikka
Sujuvuus	-
Lisenssi	EUPL
Versio	1.1.0
Alusta	Windows
Kehittäjät	Eurostat
Ohjeet	http://www.cros-portal.eu/page/help

Nimi	Derivative Calculator
Verkko-osoite	http://www.derivative-calculator.net/
Tyyppi	WEB-derivaattori
Sujuvuus	OK
Lisenssi	-
Versio	2015
Alusta	WEB
Kehittäjät	David Scherfgen
Ohjeet	http://www.derivative-calculator.net/

Nimi	Derivative Visual
Verkko-osoite	https://itunes.apple.com/us/app/derivative-visual/id929918247?mt=8
Tyyppi	derivaatan kuvaajat
Sujuvuus	OK
Lisenssi	Apple LAEULA
Versio	0.3.0
Alusta	iOS
Kehittäjät	Harmanpal Dhaliwal
Ohjeet	ohjelmassa

Nimi	Derive
Verkko-osoite	http://www.derive.com/
Tyyppi	CAS
Sujuvuus	-
Lisenssi	-
Versio	-
Alusta	-

Liite 1 9(46)

Kehittäjät	Soft Warehouse
Ohjeet	-

Nimi	Descriptive Statistics
Verkko-osoite	https://itunes.apple.com/us/app/descriptive-statistics/id854401232?mt=8
Tyyppi	tilastomatematiikka
Sujuvuus	OK
Lisenssi	Apple LAEULA
Versio	1.1
Alusta	iOS
Kehittäjät	Fernando Haro Martinez
Ohjeet	ohjelmassa

Nimi	DrGeo
Verkko-osoite	http://drgeo.eu/
Tyyppi	IGS
Sujuvuus	OK
Lisenssi	GPL
Versio	15.07
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	Hilaire Fernandes
Ohjeet	http://www.drgeo.eu/community/documentation

Nimi	EJS, Easy Java Simulations
Verkko-osoite	http://www.um.es/fem/EjsWiki/index.php/Main/WhatIsEJS
Tyyppi	simulaatio
Sujuvuus	OK
Lisenssi	GPL
Versio	5.1
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	Francisco Esquembre
Ohjeet	http://www.um.es/fem/EjsWiki/pmwiki.php?n=Main.HomePage

Nimi	ELKI
Verkko-osoite	http://elki.dbs.ifi.lmu.de/
Tyyppi	datan louhinta
Sujuvuus	OK
Lisenssi	AGPLv3
Versio	0.6.0
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	LMUni, München
Ohjeet	http://elki.dbs.ifi.lmu.de/releases/release0.6.5~20141030/doc/index.html

Nimi	Engineering Calc
Verkko-osoite	https://itunes.apple.com/us/app/engineering-calc/id415598261?mt=8

Liite 1 10(46)

Tyyppi	laskin
Sujuvuus	OK
Lisenssi	Apple LAEULA
Versio	2.0
Alusta	iOS
Kehittäjät	Keysight Technologies, Inc.
Ohjeet	ohjelmassa

Nimi	Erable
Verkko-osoite	http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/english.html#hpcalc
Tyyppi	CAS
Sujuvuus	-
Lisenssi	LGPL
Versio	-
Alusta	-
Kehittäjät	Parisse, Heiskanen, Fiechter
Ohjeet	-

Nimi	Eukleides
Verkko-osoite	http://www.eukleides.org/
Tyyppi	IGS
Sujuvuus	OK
Lisenssi	GPL
Versio	1.5.3
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	Christian Obrecht
Ohjeet	http://www.eukleides.org/files/eukleides.pdf

Nimi	Euklid DynaGeo
Verkko-osoite	http://www.dynageo.de/
Tyyppi	IGS
Sujuvuus	OK
Lisenssi	yksinoikeudellinen, kaupallinen, shareware
Versio	3.8c
Alusta	Windows
Kehittäjät	Roland Mechling
Ohjeet	http://www.dynageo.de/scripte/discus/discus.pl

Nimi	Euler Math Toolbox
Verkko-osoite	http://www.euler-math-toolbox.de/
Tyyppi	CAS
Sujuvuus	OK
Lisenssi	LGPL
Versio	2015-03-17
Alusta	Windows
Kehittäjät	R. Grothmann

Liite 1 11(46)

Ohjeet	http://www.euler-math-toolbox.de/help.html
--------	---

Nimi	Expensive Desk Calculator
Verkko-osoite	http://www.computerhistory.org/pdp-1/
Tyyppi	tietokonematematiikan historia
Sujuvuus	-
Lisenssi	-
Versio	-
Alusta	-
Kehittäjät	R. A. Wagner
Ohjeet	-

Nimi	EzyGraphs
Verkko-osoite	https://itunes.apple.com/us/app/ezygraphs/id627870001?mt=8
Tyyppi	matemaattiset kuvaajat
Sujuvuus	OK
Lisenssi	Apple LAEULA
Versio	1.3.4
Alusta	iOS
Kehittäjät	Hoang Khanh Nguyen
Ohjeet	ohjelmassa

Nimi	Fawty Language
Verkko-osoite	http://fawty.uhostall.com/
Tyyppi	datakieli
Sujuvuus	-
Lisenssi	Freeware
Versio	0.79a
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	Exelis Visual Information Solutions
Ohjeet	http://www.exelisvis.com/docs/

Nimi	fdiv
Verkko-osoite	https://itunes.apple.com/TR/app/id901128180
Tyyppi	laskin
Sujuvuus	OK
Lisenssi	Apple LAEULA
Versio	1.03
Alusta	iOS
Kehittäjät	Vladimir Vedeneev
Ohjeet	ohjelmassa

Nimi	FEniCS Project
Verkko-osoite	http://www.fenicsproject.org/
Tyyppi	differentiaaliyhtälöiden ratkaisin

Liite 1 12(46)

Sujuvuus	OK
Lisenssi	GPL
Versio	1.5.0
Alusta	Unix, Linux
Kehittäjät	Mardal, Wells
Ohjeet	http://fenicsproject.org/documentation/

Nimi	Fermat
Verkko-osoite	http://home.bway.net/lewis/
Tyyppi	CAS
Sujuvuus	OK
Lisenssi	Freeware
Versio	5.17
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	R. H. Lewis
Ohjeet	http://home.bway.net/lewis/fermat/oslm.html

Nimi	Fityk
Verkko-osoite	http://fityk.nieto.pl/
Tyyppi	käyrän sovitus
Sujuvuus	OK
Lisenssi	yksinoikeudellinen, kaupallinen, GPLv2+
Versio	1.2.9
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	Marcin Wojdyr
Ohjeet	http://fityk.nieto.pl/fityk-manual.html

Nimi	FlexPro
Verkko-osoite	http://www.weisang.com/
Tyyppi	numeerinen laskenta
Sujuvuus	-
Lisenssi	yksinoikeudellinen, kaupallinen
Versio	10.0
Alusta	Windows
Kehittäjät	Weisang GmbH
Ohjeet	-

Nimi	FORM
Verkko-osoite	http://www.nikhef.nl/~form/
Tyyppi	CAS
Sujuvuus	OK
Lisenssi	GPLv3+
Versio	4.0
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	Jos Vermaseren et al.
Ohjeet	http://www.nikhef.nl/~form/maindir/documentation/lattice.pdf

Liite 1 13(46)

Nimi	Free Graphing Calculator
Verkko-osoite	https://itunes.apple.com/us/app/free-graphing-calculator/id378009553?mt=8
Tyyppi	matemaattiset kuvaajat
Sujuvuus	OK
Lisenssi	Apple LAEULA
Versio	7.4
Alusta	iOS
Kehittäjät	William Jockusch
Ohjeet	ohjelmassa

Nimi	Free Maple Player
Verkko-osoite	http://maplesoft.com/products/maple/Mapleplayer/
Tyyppi	Maplen asiakirjakatselin
Sujuvuus	OK
Lisenssi	yksinoikeudellinen, kaupallinen
Versio	2015.1
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	Waterloo Maple Inc.
Ohjeet	http://www.maplesoft.com/support/?p=maple2015

Nimi	Freefem++, Freefem3D
Verkko-osoite	http://www.freefem.org/
Tyyppi	osittaisdifferentiaaliyhtälöt
Sujuvuus	OK
Lisenssi	LGPLv2.1
Versio	3.5.8
Alusta	moniulotteinen
Kehittäjät	Uni P&M-Curie, Lab. J-L. Lions
Ohjeet	http://www.freefem.org/ff++/ftp/freefem++doc.pdf

Nimi	Freemat
Verkko-osoite	http://freemat.sourceforge.net/
Tyyppi	numeerinen laskenta
Sujuvuus	OK
Lisenssi	GPL
Versio	4.2
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	Samit Basu
Ohjeet	http://sourceforge.net/projects/freemat/files/FreeMat4/FreeMat-4.2.pdf/download

Nimi	FxSolver
Verkko-osoite	http://www.fxsolver.com
Tyyppi	integraali- ja differentiaalilaskenta
Sujuvuus	OK

Liite 1 14(46)

Lisenssi	CC BY-SA tai GFDL
Versio	beta
Alusta	WEB
Kehittäjät	Equanalysis UG
Ohjeet	http://www.fxsolver.com/help/

Nimi	Gambit
Verkko-osoite	http://www.gambit-project.org
Tyyppi	peliteoria
Sujuvuus	OK
Lisenssi	PD
Versio	0.2010.09.01
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	Gambit Project
Ohjeet	http://www.gambit-project.org/gambit14/index.html

Nimi	GAP
Verkko-osoite	http://www.gap-system.org/
Tyyppi	ryhmäteoria
Sujuvuus	OK
Lisenssi	GPL
Versio	4.7.7
Alusta	Unix, Linux
Kehittäjät	GAP Group
Ohjeet	http://www.gap-system.org/Doc/doc.html

Nimi	GAUSS
Verkko-osoite	http://www.aptech.com/
Tyyppi	numeerinen laskenta
Sujuvuus	-
Lisenssi	yksinoikeudellinen, kaupallinen
Versio	15.1
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	Aptech Systems, Inc.
Ohjeet	http://www.aptech.com/resources/tutorials/

Nimi	GCLC
Verkko-osoite	http://poincare.matf.bg.ac.rs/~janicic/gclc/
Tyyppi	IGS
Sujuvuus	OK
Lisenssi	vapaa ohjelmisto
Versio	9.0
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	Predrag Janicic
Ohjeet	http://poincare.matf.bg.ac.rs/~janicic/gclc/SSGV2008.zip

Liite 1 15(46)

Nimi	GDL
Verkko-osoite	http://gnudatalanguage.sourceforge.net/
Tyyppi	datakieli
Sujuvuus	OK
Lisenssi	GPL
Versio	0.9.5
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	Marc Schellens
Ohjeet	http://gnudatalanguage.sourceforge.net/gdl.pdf

Nimi	GenomeTools
Verkko-osoite	http://genometools.org/
Tyyppi	data-analyysi
Sujuvuus	OK
Lisenssi	ICS
Versio	1.5.1
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	Gremme, Steinbisch, Kurtz et al.
Ohjeet	http://genometools.org/manuals.html

Nimi	Geo Next
Verkko-osoite	http://geonext.uni-bayreuth.de/?id=2307
Tyyppi	IGS
Sujuvuus	OK
Lisenssi	GPL
Versio	1.74
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	Uni. Bayreuth
Ohjeet	http://geonext.uni-bayreuth.de/index.php?id=1918

Nimi	GeoGebra
Verkko-osoite	http://www.GeoGebra.org/
Tyyppi	IGS, CAS
Sujuvuus	OK
Lisenssi	GGN-CLA, GPL, CC-BY-NC-SA
Versio	5.0.134.0-3D
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	Markus Hohenwarter et al.
Ohjeet	http://wiki.GeoGebra.org/en/Main_Page

Nimi	GeoKone.Net
Verkko-osoite	http://app.geokone.net/
Tyyppi	WEB IGS
Sujuvuus	OK
Lisenssi	vapaa ohjelmisto, GPL
Versio	-

Liite 1 16(46)

Alusta	WEB
Kehittäjät	Sakari Lehtonen
Ohjeet	http://app.geokone.net/help.html

Nimi	The Geometer's Sketchpad, GSP
Verkko-osoite	http://www.dynamicgeometry.com/
Tyyppi	IGS
Sujuvuus	-
Lisenssi	yksinoikeudellinen, kaupallinen
Versio	5.0.6
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	KCP Technologies
Ohjeet	http://www.dynamicgeometry.com/

Nimi	Geometria
Verkko-osoite	http://geocentral.net/geometria/
Tyyppi	IGS
Sujuvuus	OK
Lisenssi	vapaa ohjelmisto, MIT
Versio	4.0
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	Stelian Dumitrascu
Ohjeet	http://geocentral.net/geometria/demo/doc/en/UsersGuide.html

Nimi	Geometric Supposer
Verkko-osoite	http://www.cet.ac.il/math-international/software5.htm
Tyyppi	IGS
Sujuvuus	-
Lisenssi	-
Versio	3.0
Alusta	Windows
Kehittäjät	Schwartz, Yerushalmy, Shtenberg
Ohjeet	-

Nimi	Géométrics
Verkko-osoite	http://geometrix.free.fr/site/
Tyyppi	IGS
Sujuvuus	OK
Lisenssi	vapaa ohjelmisto
Versio	4.1
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	Jacques Gressier
Ohjeet	http://geometrix.free.fr/site/documentation.php

Nimi	Geometry Expressions
------	----------------------

Liite 1 17(46)

Verkko-osoite	http://www.geometryexpressions.com/
Tyyppi	IGS
Sujuvuus	-
Lisenssi	yksinoikeudellinen, kaupallinen
Versio	3.2
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	Saltire Software, Inc.
Ohjeet	http://www.geometryexpressions.com/help/index.html

Nimi	GeomSpace
Verkko-osoite	http://sourceforge.net/projects/geospace/
Tyyppi	IGS
Sujuvuus	OK
Lisenssi	vapaa ohjelmisto, GPLv2
Versio	0.13
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	Alexandru Popa
Ohjeet	-

Nimi	GeoPlan, GeoSpace
Verkko-osoite	http://www.aid-creem.org/
Tyyppi	IGS
Sujuvuus	-
Lisenssi	CeCILL, GPL
Versio	-
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	Frédéric Kotecki
Ohjeet	-

Nimi	GeoProof
Verkko-osoite	http://home.gna.org/geoproof/
Tyyppi	IGS
Sujuvuus	-
Lisenssi	GPL
Versio	0.5beta
Alusta	Windows
Kehittäjät	Julien Narboux
Ohjeet	http://home.gna.org/geoproof/doc/geoproof-manuel-fr.pdf

Nimi	GEUP, GEUP3D
Verkko-osoite	http://www.geup.net/
Tyyppi	IGS
Sujuvuus	OK
Lisenssi	yksinoikeudellinen, kaupallinen
Versio	6.0 ja 3.0
Alusta	Windows

Liite 1 18(46)

Kehittäjät	GEUP.net
Ohjeet	http://www.geup.net/en/support.htm

Nimi	GNU Octave
Verkko-osoite	https://gnu.org/software/octave/
Tyyppi	numeerinen laskenta
Sujuvuus	OK
Lisenssi	GPL
Versio	3.8.2
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	J. W. Eaton et al.
Ohjeet	http://wiki.octave.org/Main_Page

Nimi	Gnumeric
Verkko-osoite	http://gnumeric.org
Tyyppi	taulukkolaskenta
Sujuvuus	OK
Lisenssi	GPL
Versio	1.12.9
Alusta	Unix, Linux
Kehittäjät	Miguel de Iqaza
Ohjeet	https://help.gnome.org/users/gnumeric/stable/gnumeric.html

Nimi	GNUPlot
Verkko-osoite	http://www.gnuplot.info/
Tyyppi	matemaattiset kuvaajat
Sujuvuus	OK
Lisenssi	avoin lähdekoodi
Versio	4.6
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	Williams, Kelley, Lang et al.
Ohjeet	http://www.gnuplot.info/help.html

Nimi	Google.com
Verkko-osoite	http://www.google.com
Tyyppi	WEB-hakukone
Sujuvuus	OK
Lisenssi	yksinoikeudellinen, kaupallinen
Versio	2015 Google
Alusta	WEB
Kehittäjät	Google Inc.
Ohjeet	https://support.google.com/WEBsearch/answer/3284611?hl=fi

Nimi	Graphmonkey
------	-------------

Liite 1 19(46)

Verkko-osoite	http://graphmonkey.sourceforge.net/
Tyyppi	matemaattiset kuvaajat
Sujuvuus	OK
Lisenssi	GPL
Versio	1.7
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	Lounis Bellabes
Ohjeet	http://graphmonkey.sourceforge.net/

Nimi	Gravit
Verkko-osoite	http://gravit.slowchop.com/
Tyyppi	simulaatiot
Sujuvuus	OK
Lisenssi	GPL
Versio	0.5.0
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	Gerald Kaszuba
Ohjeet	http://gravit.slowchop.com/WikiHome/

Nimi	Gretl
Verkko-osoite	http://gretl.sourceforge.net/
Tyyppi	tilastomatematiikka
Sujuvuus	OK
Lisenssi	GPLv3
Versio	1.9.14
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	The Gretl Team
Ohjeet	http://gretlwiki.econ.univpm.it/wiki/index.php/Main_Page

Nimi	Harthmath CAS
Verkko-osoite	http://www.hartmath.org/
Tyyppi	CAS
Sujuvuus	OK
Lisenssi	GPLv2
Versio	2
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	Klaus Hartlage
Ohjeet	ohjelmassa

Nimi	Hermes Project
Verkko-osoite	http://hpfem.org/hermes
Tyyppi	simulaatiot
Sujuvuus	-
Lisenssi	LGPL
Versio	3.0
Alusta	monialustainen

Liite 1 20(46)

Kehittäjät	Hermes Team
Ohjeet	http://hpfem.org/wp-content/uploads/doc-WEB/doc-lib/html/html/index.html

Nimi	IBM SPSS
Verkko-osoite	http://www.ibm.com/software/analytics/spss/
Tyyppi	tilastomatematiikka
Sujuvuus	OK
Lisenssi	yksinoikeudellinen, kaupallinen
Versio	23.0
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	IBM Corporation
Ohjeet	http://www-01.ibm.com/support/docview.wss?uid=swg27043946#en

Nimi	iDifferentiate
Verkko-osoite	https://itunes.apple.com/us/app/ifferentiate/id672260004?mt=8
Tyyppi	integraali- ja differentiaalilaskenta
Sujuvuus	OK
Lisenssi	Apple LAEULA
Versio	1.0
Alusta	iOS
Kehittäjät	Yaroslav Mironov
Ohjeet	ohjelmassa

Nimi	IDL
Verkko-osoite	http://www.exelisvis.com/ProductsServices/IDL.aspx
Tyyppi	datakieli
Sujuvuus	-
Lisenssi	yksinoikeudellinen, kaupallinen
Versio	8.4
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	David Stern
Ohjeet	http://www.exelisvis.com/Support.aspx

Nimi	IGOR Pro
Verkko-osoite	http://www.wavemetrics.com/
Tyyppi	data-analyysi
Sujuvuus	-
Lisenssi	yksinoikeudellinen, kaupallinen
Versio	6
Alusta	Windows, OS X
Kehittäjät	WaveMetrics, Inc.
Ohjeet	http://www.wavemetrics.com/support/support.htm

Nimi	iGraphs Pro
------	-------------

Liite 1 21(46)

Verkko-osoite	https://itunes.apple.com/us/app/igraphs-pro/id566967159?mt=8
Tyyppi	spirograafityyppinen piirtelyohjelma
Sujuvuus	OK
Lisenssi	Apple LAEULA
Versio	1.0
Alusta	iOS
Kehittäjät	Boris Golovnev
Ohjeet	ohjelmassa

Nimi	ILNumerics.Net
Verkko-osoite	http://ilnumerics.net/
Tyyppi	kirjasto
Sujuvuus	-
Lisenssi	yksinoikeudellinen, kaupallinen
Versio	4.6
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	ILNumerics GmbH
Ohjeet	http://ilnumerics.net/docs.html

Nimi	IMPS
Verkko-osoite	http://imps.mcmaster.ca/
Tyyppi	todistelujärjestelmä
Sujuvuus	-
Lisenssi	Public License
Versio	2.0
Alusta	Unix, Linux, Solaris
Kehittäjät	Farmer, Guttman, Thayer, MITRE Corporation
Ohjeet	http://imps.mcmaster.ca/doc/manual.pdf

Nimi	Integral Calculator
Verkko-osoite	http://www.integral-calculator.com/
Tyyppi	WEB-integraattori
Sujuvuus	OK
Lisenssi	-
Versio	2015
Alusta	WEB
Kehittäjät	David Scherfgren
Ohjeet	http://www.integral-calculator.com/

Nimi	Ioda
Verkko-osoite	https://itunes.apple.com/us/app/ioda/id412436864?mt=8
Tyyppi	data-analyysi
Sujuvuus	OK
Lisenssi	Apple LAEULA
Versio	1.9.14
Alusta	iOS

Liite 1 22(46)

Kehittäjät	Guy Barrand
Ohjeet	ohjelmassa

Nimi	Jacal
Verkko-osoite	http://people.csail.mit.edu/jaffer/JACAL
Tyyppi	CAS
Sujuvuus	OK
Lisenssi	GPLv2
Versio	1b9
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	MIT, AIL
Ohjeet	http://people.csail.mit.edu/jaffer/jacal/

Nimi	jLab (Groovy Lab)
Verkko-osoite	https://code.google.com/p/jlabgroovy/
Tyyppi	numeerinen laskenta
Sujuvuus	OK
Lisenssi	GPLv2
Versio	2.2.1
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	Project Groovylab
Ohjeet	https://code.google.com/p/jlabgroovy/w/list

Nimi	Julia
Verkko-osoite	http://julialang.org/
Tyyppi	CAS
Sujuvuus	OK
Lisenssi	MIT, GPL
Versio	0.3.9
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	Julia Community
Ohjeet	https://www.juliabox.org/

Nimi	JuliaBox
Verkko-osoite	https://www.juliabox.org/
Tyyppi	WEB CAS
Sujuvuus	OK
Lisenssi	-
Versio	beta
Alusta	WEB
Kehittäjät	Julia Community
Ohjeet	https://www.juliabox.org/

Nimi	Juno
Verkko-osoite	http://junolab.org/

Liite 1 23(46)

Tyyppi	matemaattinen ohjelmointiympäristö
Sujuvuus	OK
Lisenssi	MIT
Versio	-
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	Juno Community
Ohjeet	http://junolab.org/docs/

Nimi	Kalgebra
Verkko-osoite	http://www.kde.org/applications/education/kalgebra/
Tyyppi	matemaattiset kuvaajat
Sujuvuus	OK
Lisenssi	GPLv2
Versio	Rev. 0.11
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	Aleix Pol Gonzalez, KDE
Ohjeet	https://docs.kde.org/stable5/en/kdeedu/kalgebra/index.html

Nimi	KANT/KASH
Verkko-osoite	http://www.math.tu-berlin.de/~kant/kash.html
Tyyppi	CAS
Sujuvuus	OK
Lisenssi	vapaasti käytettävissä epäkaupallisesti
Versio	KANT 4 ja KASH 3
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	The KANT Group
Ohjeet	http://page.math.tu-berlin.de/~kant/doc.html

Nimi	Kayali
Verkko-osoite	http://kayali.sourceforge.net/
Tyyppi	CAS
Sujuvuus	OK
Lisenssi	BSD
Versio	0.3.2, alpha
Alusta	Unix, Linux
Kehittäjät	aalynch@sourceforge
Ohjeet	http://kayali.sourceforge.net/

Nimi	Kig
Verkko-osoite	http://edu.kde.org/kig/
Tyyppi	IGS
Sujuvuus	OK
Lisenssi	GPLv2
Versio	1.0
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	Devriese, Paolini, Pasquarelli, Toscano

Liite 1 24(46)

Ohjeet	http://edu.kde.org/kig/
--------	---

Nimi	Kitsune
Verkko-osoite	http://kitsune.tuxfamily.org/wiki/doku.php?id=homepage
Tyyppi	oppimishjelmisto
Sujuvuus	OK
Lisenssi	GPLv2
Versio	3.0
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	Lemoine, Viennot
Ohjeet	http://kitsune.tuxfamily.org/wiki/doku.php?id=homepage

Nimi	KmPlot
Verkko-osoite	http://www.kde.org/applications/education/kmplot/
Tyyppi	matemaattiset kuvaajat
Sujuvuus	OK
Lisenssi	GPL
Versio	-
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	Möller, Mesmer et al.
Ohjeet	https://www.kde.org/applications/education/kmplot/#

Nimi	KPP, Kinetic PreProcessor
Verkko-osoite	http://people.cs.vt.edu/~asandu/Software/Kpp/
Tyyppi	ilmakehän kinetiikka
Sujuvuus	-
Lisenssi	GPL
Versio	2.2.3
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	Damian, Sandu et al.
Ohjeet	http://people.cs.vt.edu/~asandu/Software/Kpp/docsforkpp.htm

Nimi	KSEG
Verkko-osoite	http://www.mit.edu/~ibaran/kseg.html
Tyyppi	IGS
Sujuvuus	OK
Lisenssi	Freeware, GPL
Versio	0.4.1
Alusta	KDE 3, Qt 3
Kehittäjät	Ilya Baran
Ohjeet	http://www.mit.edu/~ibaran/kseg_help_en.html

Nimi	LabPlot
Verkko-osoite	http://labplot.sourceforge.net/
Tyyppi	matemaattiset kuvaajat

Liite 1 25(46)

Sujuvuus	-
Lisenssi	GPL
Versio	2.0.2
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	Stefan Gerlach
Ohjeet	http://labplot.sourceforge.net/documentation/

Nimi	LabVIEW
Verkko-osoite	http://www.ni.com/labview/
Tyyppi	ohjelmointiympäristö
Sujuvuus	-
Lisenssi	yksinoikeudellinen, kaupallinen
Versio	2014 (august)
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	National Instruments Corporation
Ohjeet	http://sine.ni.com/psp/app/doc/p/id/psp-357

Nimi	LAPACK
Verkko-osoite	http://www.netlib.org/lapack/
Tyyppi	kirjasto
Sujuvuus	OK
Lisenssi	BSD-new
Versio	3.5.0
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	LAPACK team
Ohjeet	http://www.netlib.org/lapack/lug/

Nimi	LibreOffice Calc
Verkko-osoite	http://www.libreoffice.org/discover/calc/
Tyyppi	taulukkolaskenta
Sujuvuus	OK
Lisenssi	LGPLv3+, MPL 2.0
Versio	4.3.0.4
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	The Document Foundation
Ohjeet	https://www.libreoffice.org/get-help/documentation/

Nimi	LibreOffice Math
Verkko-osoite	http://www.libreoffice.org/discover/math/
Tyyppi	matemaattinen ladontaohjelma
Sujuvuus	OK
Lisenssi	LGPLv3+, MPL 2.0
Versio	4.3.0.4
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	The Document Foundation
Ohjeet	https://www.libreoffice.org/get-help/documentation/

Liite 1 26(46)

Nimi	Live Math Maker
Verkko-osoite	http://www.livemath.com/
Tyyppi	CAS
Sujuvuus	-
Lisenssi	yksinoikeudellinen, kaupallinen
Versio	4.0.8U11
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	MathMonkeys LLC
Ohjeet	info@livemath.com

Nimi	LTSpice IV
Verkko-osoite	http://www.linear.com/ltspice
Tyyppi	elektroniikka
Sujuvuus	OK
Lisenssi	Freeware
Versio	4.22k
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	Linear Technology Corporation
Ohjeet	http://cds.linear.com/docs/en/software-and-simulation/LTspiceGettingStartedGuide.pdf

Nimi	Lurch
Verkko-osoite	http://lurchmath.org/
Tyyppi	matemaattinen ladontaohjelma
Sujuvuus	OK
Lisenssi	GPLv3
Versio	0.8
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	Carter, Monks
Ohjeet	http://lurchmath.org/documentation/

Nimi	Lybniz
Verkko-osoite	http://lybniz2.sourceforge.net/index.html
Tyyppi	matemaattiset kuvaajat
Sujuvuus	OK
Lisenssi	BSD
Versio	1.3.2
Alusta	Unix, Linux
Kehittäjät	Führinger, Tygier
Ohjeet	http://lybniz2.sourceforge.net/hackers.html

Nimi	Macaulay2
Verkko-osoite	http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2
Tyyppi	CAS
Sujuvuus	OK

Liite 1 27(46)

Lisenssi	GPL
Versio	1.7
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	Grayson, Stillman
Ohjeet	http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2/doc/Macaulay2-1.8.1/share/doc/Macaulay2/Macaulay2Doc/html/

Nimi	Macsyma
Verkko-osoite	historiallinen osoite http://www.macsyma.com/
Tyyppi	CAS
Sujuvuus	OK
Lisenssi	MIT, vanhentunut 2002
Versio	-
Alusta	PDP-6, PDP-10, Multics, Lisp Machine
Kehittäjät	MIT Project MAC, Symbolics
Ohjeet	historiakatsaus https://esd.mit.edu/Faculty_Pages/moses/Macsyma.pdf

Nimi	Madagaskar
Verkko-osoite	http://www.ahay.org/
Tyyppi	moniulotteinen data-analyysi
Sujuvuus	OK
Lisenssi	GPL
Versio	1.7
Alusta	X (Posix)
Kehittäjät	Fomel, Claerbout
Ohjeet	http://www.ahay.org/wiki/Main_Page

Nimi	Magma
Verkko-osoite	http://magma.maths.usyd.edu.au/magma/
Tyyppi	CAS
Sujuvuus	-
Lisenssi	yksinoikeudellinen, kaupallinen, epäkaupallinen
Versio	2.21-3
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	Uni. Sydney
Ohjeet	http://magma.maths.usyd.edu.au/magma/documentation/

Nimi	Maple
Verkko-osoite	http://www.maplesoft.com/
Tyyppi	CAS
Sujuvuus	-
Lisenssi	yksinoikeudellinen, kaupallinen
Versio	2015 (March 5)
Alusta	Linux, Windows
Kehittäjät	Waterloo Maple Inc.
Ohjeet	http://maplesoft.com/documentation_center/maple19/UserManual.pdf

Liite 1 28(46)

Nimi	Maple Player
Verkko-osoite	https://itunes.apple.com/ca/app/maple-player/id469981983?mt=8
Tyyppi	CAS
Sujuvuus	OK
Lisenssi	Apple LAEULA
Versio	1.0.0
Alusta	iOS
Kehittäjät	Waterloo Maple Inc.
Ohjeet	http://maplesoft.com/documentation_center/

Nimi	MATH 42
Verkko-osoite	https://itunes.apple.com/us/app/math-42/id664457128?mt=8
Tyyppi	oppimishjelmisto
Sujuvuus	OK
Lisenssi	Apple LAEULA
Versio	1.7.1
Alusta	iOS
Kehittäjät	Gogeon GmbH
Ohjeet	ohjelmassa

Nimi	Math Input Panel
Verkko-osoite	http://windows.microsoft.com/en-us/windows7/use-math-input-panel-to-write-and-correct-math-equations
Tyyppi	matemaattinen ladontaohjelma
Sujuvuus	OK
Lisenssi	yksinoikeudellinen, kaupallinen
Versio	6.1.7601
Alusta	Windows
Kehittäjät	Microsoft Corporation
Ohjeet	http://windows.microsoft.com/fi-fi/windows7/use-math-input-panel-to-write-and-correct-math-equations

Nimi	Math Ref Free
Verkko-osoite	https://itunes.apple.com/us/app/math-ref-free/id312756358?mt=8
Tyyppi	oppimishjelmisto
Sujuvuus	OK
Lisenssi	Apple LAEULA
Versio	2.6.3
Alusta	iOS
Kehittäjät	Happy Maau Studios, LLC.
Ohjeet	ohjelmassa

Nimi	MathBuntu
Verkko-osoite	http://www.mathbuntu.org/

Liite 1 29(46)

Tyyppi	matemaattisiin sovelluksiin painottunut käyttöjärjestelmä
Sujuvuus	OK
Lisenssi	useita lisenssityyppejä
Versio	14.04
Alusta	-
Kehittäjät	Len Brin
Ohjeet	http://www.mathbuntu.org/index.html?open=information

Nimi	MatheAss
Verkko-osoite	http://www.matheass.eu/
Tyyppi	numeerinen laskenta
Sujuvuus	OK
Lisenssi	Shareware
Versio	8.2
Alusta	Windows
Kehittäjät	Bernd Schultheiss
Ohjeet	http://www.matheass.eu

Nimi	Mathematica
Verkko-osoite	http://www.wolfram.com/mathematica/
Tyyppi	CAS
Sujuvuus	-
Lisenssi	yksinoikeudellinen, kaupallinen
Versio	8.0.0
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	Wolfram Research
Ohjeet	https://reference.wolfram.com/language/?source=nav

Nimi	MathHandbook
Verkko-osoite	http://www.mathhandbook.com/
Tyyppi	WEB CAS
Sujuvuus	OK
Lisenssi	GPL
Versio	-
Alusta	WEB
Kehittäjät	drHuang.com
Ohjeet	http://mychinesemassage.com/science/mathematics/handbook/

Nimi	Mathics
Verkko-osoite	http://www.mathics.org/
Tyyppi	CAS
Sujuvuus	OK
Lisenssi	GPL
Versio	0.6.0rc1
Alusta	Python
Kehittäjät	Jan Pöschko

Liite 1 30(46)

Ohjeet	http://www.mathics.net/doc/
--------	---

Nimi	Mathics WEB
Verkko-osoite	http://www.mathics.net/
Tyyppi	WEB CAS
Sujuvuus	OK
Lisenssi	GPL
Versio	-
Alusta	MathJax
Kehittäjät	Jan Pöschko
Ohjeet	http://www.mathics.net/doc/

Nimi	MathJax
Verkko-osoite	http://www.mathjax.org/
Tyyppi	kirjasto
Sujuvuus	OK
Lisenssi	Apache
Versio	2.4
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	American Mathematical Society
Ohjeet	http://www.mathjax.org/#docs

Nimi	Mathomatic
Verkko-osoite	http://www.mathomatic.org/
Tyyppi	CAS
Sujuvuus	OK
Lisenssi	LGPLv2.1
Versio	16.0.4
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	George Gesslein II
Ohjeet	http://mathomatic.org/

Nimi	MathPad
Verkko-osoite	https://itunes.apple.com/us/app/mathpad/id435087400?mt=8
Tyyppi	matemaattinen ladonta
Sujuvuus	OK
Lisenssi	Apple Laeula
Versio	1.0.1
Alusta	iOS
Kehittäjät	Vision Objects
Ohjeet	ohjelmassa

Nimi	Mathpiper
Verkko-osoite	http://www.mathpiper.org/
Tyyppi	CAS

Liite 1 31(46)

Sujuvuus	OK
Lisenssi	GPLv2+
Versio	.822
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	MathPiper Project
Ohjeet	http://www.mathpiper.org/documentation-1

Nimi	MathType
Verkko-osoite	http://www.mathtype.com/
Tyyppi	matemaattinen ladonta
Sujuvuus	-
Lisenssi	Trialware
Versio	6.9
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	Design Science, Inc.
Ohjeet	http://www.dessci.com/en/support/mathtype/tips/default.htm

Nimi	Matita
Verkko-osoite	http://matita.cs.unibo.it/
Tyyppi	todisteluohjelmisto
Sujuvuus	OK
Lisenssi	GPLv2
Versio	0.99.1
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	Matita Team
Ohjeet	http://matita.cs.unibo.it/documentation.shtml

Nimi	MATLAB
Verkko-osoite	http://se.mathworks.com/products/matlab/
Tyyppi	numeerinen laskenta
Sujuvuus	-
Lisenssi	yksinoikeudellinen, kaupallinen
Versio	R2015a
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	The MathWorks, Inc.
Ohjeet	http://se.mathworks.com/support/?s_tid=gn_supp

Nimi	Maxima
Verkko-osoite	http://maxima.sourceforge.net/
Tyyppi	CAS
Sujuvuus	OK
Lisenssi	GPL
Versio	13.04.2
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	MIT Project MAC, B. Schelter et al.
Ohjeet	http://maxima.sourceforge.net/documentation.html

Liite 1 32(46)

Nimi	Maxima-online.org
Verkko-osoite	http://maxima-online.org
Tyyppi	WEB CAS
Sujuvuus	OK
Lisenssi	-
Versio	-
Alusta	WEB
Kehittäjät	MIT Project MAC, B. Schelter et al.
Ohjeet	http://maxima-online.org/help.html

Nimi	MCSim (Monte Carlo Simulation)
Verkko-osoite	https://www.gnu.org/software/mcsim
Tyyppi	simulaatiot
Sujuvuus	-
Lisenssi	GPL
Versio	5.4.0
Alusta	Unix, Linux
Kehittäjät	GNU MCSim Project
Ohjeet	http://www.gnu.org/software/mcsim/mcsim.html#NOD1

Nimi	Microsoft Excel
Verkko-osoite	https://products.office.com/en-us/excel
Tyyppi	taulukkolaskenta
Sujuvuus	OK
Lisenssi	yksinoikeudellinen, Trialware, jälleenmyytävä, VL, SaaS
Versio	13 (15.0.4615.1000)
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	Microsoft Corporation
Ohjeet	https://support2.microsoft.com/get-support/office/excel-2013

Nimi	Minitab
Verkko-osoite	http://www.minitab.com/
Tyyppi	tilastomatematiikka
Sujuvuus	-
Lisenssi	yksinoikeudellinen, kaupallinen
Versio	17
Alusta	Windows
Kehittäjät	Minitab, Inc.
Ohjeet	http://support.minitab.com/en-us/minitab/17/

Nimi	MLPACK
Verkko-osoite	http://mlpack.org/
Tyyppi	koneoppiminen
Sujuvuus	OK

Liite 1 33(46)

Lisenssi	avoin lähdekoodi, BSD
Versio	1.0.12
Alusta	Unix, Linux
Kehittäjät	MLPACK Community
Ohjeet	http://mlpack.org/docs.html

Nimi	MODULEF (INRIA)
Verkko-osoite	https://www.rocq.inria.fr/modulef/english.html
Tyyppi	kirjasto
Sujuvuus	-
Lisenssi	vapaa ohjelmisto
Versio	-
Alusta	Unix, Linux
Kehittäjät	Michel Bernardou
Ohjeet	-

Nimi	MuMATH
Verkko-osoite	-
Tyyppi	CAS
Sujuvuus	-
Lisenssi	-
Versio	-
Alusta	CP/M, TRS-DOS, Apple II
Kehittäjät	Soft Warehouse
Ohjeet	-

Nimi	MyScript Calculator
Verkko-osoite	https://itunes.apple.com/fi/app/myscript-calculator-handwriting/id578979413?mt=8
Tyyppi	laskin
Sujuvuus	OK
Lisenssi	Apple LAEULA
Versio	1.3.1
Alusta	iOS
Kehittäjät	Vision Objects
Ohjeet	ohjelmassa

Nimi	ND4J: N-Dimensional Arrays for Java
Verkko-osoite	http://nd4j.org/
Tyyppi	moniulotteinen laskenta
Sujuvuus	OK
Lisenssi	Apache 2.0
Versio	0.0.3.5.5
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	Skymind
Ohjeet	http://nd4j.org/documentation.html

Liite 1 34(46)

Nimi	NZMATH
Verkko-osoite	http://tnt.math.se.tmu.ac.jp/nzmath/
Tyyppi	CAS
Sujuvuus	OK
Lisenssi	BSD
Versio	1.2.0
Alusta	Python
Kehittäjät	NZMATH Project
Ohjeet	http://tnt.math.se.tmu.ac.jp/nzmath/nzmath_doc.pdf

Nimi	O-Matrix (Visual Data Analysis)
Verkko-osoite	http://www.omatrix.com/
Tyyppi	CAS
Sujuvuus	OK
Lisenssi	yksinoikeudellinen, kaupallinen
Versio	6
Alusta	Windows
Kehittäjät	Harmonic Software, Inc.
Ohjeet	http://www.omatrix.com/manual/_contents.htm

Nimi	Origin
Verkko-osoite	http://www.originlab.com/
Tyyppi	data-analyysi
Sujuvuus	-
Lisenssi	yksinoikeudellinen, kaupallinen
Versio	9.2
Alusta	Windows
Kehittäjät	OriginLab Corporation
Ohjeet	http://originlab.com/doc/User-Guide

Nimi	PARI/GP
Verkko-osoite	http://pari.math.u-bordeaux.fr/
Tyyppi	CAS
Sujuvuus	OK
Lisenssi	GPL
Versio	2.7.3
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	Cohen, Belabas, Allombert et al.
Ohjeet	http://pari.math.u-bordeaux.fr/doc.html

Nimi	Physics Analysis Workstation
Verkko-osoite	http://cern.ch/paw/
Tyyppi	hiukkastysiikka
Sujuvuus	OK
Lisenssi	GPL
Versio	2.14/04

Liite 1 35(46)

Alusta	monialustainen
Kehittäjät	CERN
Ohjeet	http://paw.WEB.cern.ch/paw/reference_manual/

Nimi	Pintograph
Verkko-osoite	https://itunes.apple.com/us/app/pintograph-mesmerizing-line/id548056488?mt=8
Tyyppi	harmonograafi
Sujuvuus	OK
Lisenssi	Apple LAEULA
Versio	1.5
Alusta	iOS
Kehittäjät	Alien Skin Software
Ohjeet	ohjelmassa

Nimi	Prover
Verkko-osoite	http://www.cs.unm.edu/~mccune/prover9/
Tyyppi	todisteluohjelmisto
Sujuvuus	OK
Lisenssi	GPLv2+
Versio	2009-11A
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	Uni. New Mexico
Ohjeet	http://www.cs.unm.edu/~mccune/prover9/manual-examples.html

Nimi	PSPP
Verkko-osoite	http://www.gnu.org/software/pspp/
Tyyppi	tilastomatematiikka
Sujuvuus	OK
Lisenssi	GPL
Versio	0.8.4-g6036c7
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	GNU Project PSPP
Ohjeet	https://www.gnu.org/doc/doc.html

Nimi	PTC Mathcad Express
Verkko-osoite	http://www.ptc.com/engineering-math-software/mathcad/free-download
Tyyppi	insinöörimatematiikka
Sujuvuus	OK
Lisenssi	yksinoikeudellinen, kaupallinen
Versio	01:42
Alusta	Windows
Kehittäjät	PTC, Inc.
Ohjeet	ohjelmassa

Nimi	PTC Mathcad Prime
------	-------------------

Liite 1 36(46)

Verkko-osoite	http://www.ptc.com/product/mathcad
Tyyppi	insinöörialojen matematiikka
Sujuvuus	OK
Lisenssi	yksinoikeudellinen, kaupallinen
Versio	3.1
Alusta	Windows
Kehittäjät	PTC, Inc.
Ohjeet	https://support.ptc.com/appserver/common/login/ssl/login.jsp?dest=%2Fappserver%2Fcs%2Fportal%2F&msg=1

Nimi	Python
Verkko-osoite	http://www.python.org
Tyyppi	ohjelmointiympäristö
Sujuvuus	OK
Lisenssi	PSFL
Versio	3.4.3
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	Guido van Rossum
Ohjeet	https://www.python.org/doc/

Nimi	QtiPlot
Verkko-osoite	http://www.qtiplot.com/
Tyyppi	matemaattiset kuvaajat
Sujuvuus	OK
Lisenssi	GPLv2+
Versio	0.9.8.9 svn 2288
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	Ion Vasilief
Ohjeet	http://www.qtiplot.com/doc/manual-en/index.html

Nimi	R
Verkko-osoite	http://www.r-project.org/
Tyyppi	tilastomatematiikka
Sujuvuus	OK
Lisenssi	GPL
Versio	3.1.3
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	R Development Core Team
Ohjeet	http://cran.r-project.org/manuals.html

Nimi	RapidMiner
Verkko-osoite	http://rapidminer.com
Tyyppi	tilastomatematiikka
Sujuvuus	OK
Lisenssi	yksinoikeudellinen, AGPL
Versio	6.1

Liite 1 37(46)

Alusta	monialustainen
Kehittäjät	RapidMiner, Inc.
Ohjeet	http://docs.rapidminer.com/

Nimi	Reduce
Verkko-osoite	http://www.reduce-algebra.com/
Tyyppi	CAS
Sujuvuus	OK
Lisenssi	BSD
Versio	04-Aug-11
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	Anthony C. Hearn
Ohjeet	http://www.reduce-algebra.com/documentation.htm

Nimi	Ricci
Verkko-osoite	http://www.math.washington.edu/~lee/Ricci/
Tyyppi	Mathematica-paketti
Sujuvuus	-
Lisenssi	-
Versio	1.53
Alusta	Mathematica
Kehittäjät	Uni. Washington
Ohjeet	http://www.math.washington.edu/~lee/Ricci/Manual.pdf

Nimi	Rlabplus
Verkko-osoite	http://rlabplus.sourceforge.net/
Tyyppi	numeerinen laskenta
Sujuvuus	-
Lisenssi	GPL
Versio	1.0
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	Ian Searle
Ohjeet	http://rosettacode.org/wiki/RLaB

Nimi	ROOT
Verkko-osoite	http://root.cern.ch/
Tyyppi	hiukkasfysiikka
Sujuvuus	OK
Lisenssi	LGPL, GPL
Versio	5.34/14
Alusta	Unix, Linux
Kehittäjät	CERN
Ohjeet	https://root.cern.ch/drupal/content/users-guide

Nimi	S
------	---

Liite 1 38(46)

Verkko-osoite	http://stat.bell-labs.com/S/
Tyyppi	tilastomatematiikka
Sujuvuus	-
Lisenssi	toteutusriippuvainen
Versio	4
Alusta	Unix, Linux
Kehittäjät	Chambers, Becker, Wilks, Bell Labs
Ohjeet	http://ect.bell-labs.com/sl/S/

Nimi	Sage
Verkko-osoite	http://www.sagemath.org/
Tyyppi	CAS
Sujuvuus	OK
Lisenssi	GPL
Versio	6.7
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	W. A. Stein, SageMath, Inc.
Ohjeet	http://www.sagemath.org/doc/index.html

Nimi	SageMath (Sage)
Verkko-osoite	https://itunes.apple.com/us/app/sage-math/id496492945?mt=8
Tyyppi	CAS
Sujuvuus	OK
Lisenssi	Apple LAEULA
Versio	2.1.2001
Alusta	iOS
Kehittäjät	W. A. Stein, SageMath, Inc.
Ohjeet	http://www.sagemath.org/help.html

Nimi	SageMathCell
Verkko-osoite	https://sagecell.sagemath.org/
Tyyppi	WEB CAS
Sujuvuus	OK
Lisenssi	avoin lähdekoodi, ToS
Versio	-
Alusta	WEB
Kehittäjät	W. A. Stein, SageMath, Inc.
Ohjeet	https://sagecell.sagemath.org/static/about.html?v=00b4fd5af6b444474dc07adbdb2a0cef

Nimi	SageMathCloud
Verkko-osoite	https://cloud.sagemath.com
Tyyppi	WEB CAS
Sujuvuus	OK
Lisenssi	avoin lähdekoodi, ToS
Versio	-
Alusta	WEB

Liite 1 39(46)

Kehittäjät	W. A. Stein, SageMath, Inc.
Ohjeet	https://cloud.sagemath.com/help

Nimi	Salome
Verkko-osoite	http://www.salome-platform.org/
Tyyppi	numeeriset simulaatiot
Sujuvuus	-
Lisenssi	LGPL
Versio	7.5.1
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	Open Cascade, EDF, CEA
Ohjeet	http://www.salome-platform.org/service-and-support

Nimi	SAS
Verkko-osoite	http://www.sas.com/en_us/home.html
Tyyppi	tilastomatematiikka
Sujuvuus	-
Lisenssi	yksinoikeudellinen, kaupallinen
Versio	9.4
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	SAS Institute
Ohjeet	http://support.sas.com/documentation/

Nimi	SCaVis
Verkko-osoite	http://jwork.org/scavis/
Tyyppi	numeerinen laskenta
Sujuvuus	OK
Lisenssi	ydin GPL, muut komponentit ffNCP
Versio	2.3
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	S. Chekanov
Ohjeet	http://jwork.org/scavis/wikidoc/doku.php

Nimi	sciDavis
Verkko-osoite	http://scidavis.sourceforge.net/
Tyyppi	data-analyysi
Sujuvuus	OK
Lisenssi	GPLv2+
Versio	0.2.4
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	Benkert, Franke, Standish
Ohjeet	http://scidavis.sourceforge.net/help.html

Nimi	Scientific WorkPlace, Scientific Word
Verkko-osoite	http://www.mackichan.com/products/swp.html

Liite 1 40(46)

Tyyppi	matemaattinen ladonta
Sujuvuus	-
Lisenssi	yksinoikeudellinen, kaupallinen
Versio	5.5
Alusta	Windows
Kehittäjät	MacKichan Software, Inc.
Ohjeet	-

Nimi	Scilab
Verkko-osoite	http://www.scilab.org/
Tyyppi	numeerinen laskenta
Sujuvuus	OK
Lisenssi	CeCILL
Versio	5.5.2
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	Scilab Enterprises
Ohjeet	http://help.scilab.org/docs/5.3.0/en_US/index.html

Nimi	Shogun
Verkko-osoite	http://www.shogun-toolbox.org/
Tyyppi	koneoppiminen
Sujuvuus	OK
Lisenssi	GPL
Versio	4.0.0
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	Rätsch, Sonnenburg et al.
Ohjeet	http://www.shogun-toolbox.org/page/documentation/information

Nimi	SIMATH
Verkko-osoite	http://tnt.math.se.tmu.ac.jp/simath/
Tyyppi	CAS
Sujuvuus	-
Lisenssi	yksinoikeudellinen, kaupallinen, kopiosuojattu, vapaasti käytettävissä tieteellisiin tarkoituksiin
Versio	4.6.1
Alusta	Linux, Unix
Kehittäjät	Hubert Zimmer
Ohjeet	tnt.math.se.tmu.ac.jp/simath/doc/INTRO_SIMATH.dvi

Nimi	SINGULAR
Verkko-osoite	http://www.singular.uni-kl.de/index.php
Tyyppi	CAS
Sujuvuus	OK
Lisenssi	GPL
Versio	4.0.2
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	Uni. Kaiserslauten

Liite 1 41(46)

Ohjeet	http://www.singular.uni-kl.de/index.php/singular-manual.html
--------	---

Nimi	Smath Studio
Verkko-osoite	http://en.smath.info/
Tyyppi	matemaattinen muistikirja
Sujuvuus	OK
Lisenssi	yksinoikeudellinen (CC-BY-ND), Freeware
Versio	0.97
Alusta	Windows, Mono
Kehittäjät	Andrey Ivashov
Ohjeet	http://smath.info/wiki/

Nimi	Smath Studio Desktop Live
Verkko-osoite	http://smath.info/cloud/
Tyyppi	matemaattinen WEB-muistikirja
Sujuvuus	OK
Lisenssi	yksinoikeudellinen (CC-BY-ND)
Versio	-
Alusta	WEB
Kehittäjät	Andrey Ivashov
Ohjeet	http://smath.info/wiki/

Nimi	Speakeasy
Verkko-osoite	http://speakeasy.com/
Tyyppi	numeerinen laskenta
Sujuvuus	-
Lisenssi	Trialware
Versio	IV Iota
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	Speakeasy Computing Corporation
Ohjeet	http://speakeasy.com/downloads.htm#Manuals

Nimi	Sterizium
Verkko-osoite	http://www.sterizium.ru/
Tyyppi	stereometria
Sujuvuus	OK
Lisenssi	Freeware
Versio	1.1.5 alfa
Alusta	Windows
Kehittäjät	O. A. Grishina, РУДН
Ohjeet	http://www.sterizium.ru/node/3

Nimi	SymPy
Verkko-osoite	http://sympy.org/
Tyyppi	CAS

Liite 1 42(46)

Sujuvuus	OK
Lisenssi	New BSD
Versio	0.7.3
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	Ondřej Čertík
Ohjeet	http://docs.sympy.org/latest/index.html

Nimi	Sysquake
Verkko-osoite	http://www.calerga.com/products/Sysquake/
Tyyppi	numeerinen laskenta
Sujuvuus	OK
Lisenssi	yksinoikeudellinen, kaupallinen
Versio	5.0
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	Calerga Sarl
Ohjeet	http://www.calerga.com/doc/index.html + internal help

Nimi	TiEmu
Verkko-osoite	http://lpg.ticalc.org/prj_tiemu/
Tyyppi	laskinemulaattori
Sujuvuus	OK
Lisenssi	GPL
Versio	3.02
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	The TiEmu Team
Ohjeet	http://lpg.ticalc.org/prj_tiemu/docs.html

Nimi	TiEm
Verkko-osoite	http://lpg.ticalc.org/prj_tilem/
Tyyppi	laskinemulaattori
Sujuvuus	OK
Lisenssi	GPL
Versio	2.0
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	Project TiEm
Ohjeet	http://contra-sh.users.sourceforge.net/user_manual.html

Nimi	TI-Nspire CAS
Verkko-osoite	https://education.ti.com/en/us/software/update/download-nspirecas-student?keyMatch=ti-nspire%2520cas%2520student%2520software%2520download&tisearch=Search-EN-Everything
Tyyppi	CAS
Sujuvuus	OK
Lisenssi	yksinoikeudellinen, kaupallinen
Versio	4.0.0.235
Alusta	monialustainen

Liite 1 43(46)

Kehittäjät	Texas Instruments
Ohjeet	https://education.ti.com/en/us/guidebook/search

Nimi	TK Solver
Verkko-osoite	http://www.uts.us.com/
Tyyppi	mallinnus
Sujuvuus	-
Lisenssi	-
Versio	5.0
Alusta	Windows
Kehittäjät	Software Arts, Universal Technical Systems
Ohjeet	http://www.uts.com/Support.asp

Nimi	Trillinos
Verkko-osoite	http://trilinos.org/
Tyyppi	kirjasto
Sujuvuus	-
Lisenssi	mBSD,LGPL
Versio	11.14.2
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	The Trillinos Project
Ohjeet	http://trilinos.org/about/documentation/

Nimi	Waffles
Verkko-osoite	http://waffles.sourceforge.net/
Tyyppi	koneoppiminen
Sujuvuus	-
Lisenssi	LGPL
Versio	2015-01-07
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	Michael S. Gashler
Ohjeet	http://waffles.sourceforge.net/

Nimi	Weka
Verkko-osoite	http://www.cs.waikato.ac.nz/~ml/weka/
Tyyppi	koneoppiminen
Sujuvuus	OK
Lisenssi	GPL
Versio	3.6.12
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	Uni. Waikato
Ohjeet	http://www.cs.waikato.ac.nz/~ml/weka/documentation.html

Nimi	VisSim
Verkko-osoite	http://www.vissim.com/

Liite 1 44(46)

Tyyppi	mallinnus
Sujuvuus	-
Lisenssi	yksinoikeudellinen, EULA
Versio	8/2011
Alusta	Windows
Kehittäjät	Visual Solutions, Inc.
Ohjeet	http://www.vissim.com/support.html

Nimi	WolframAlpha®
Verkko-osoite	http://www.wolframalpha.com/
Tyyppi	"WEB Knowledge Engine"
Sujuvuus	OK
Lisenssi	yksinoikeudellinen, kaupallinen
Versio	2015
Alusta	WEB
Kehittäjät	Wolfram Group LLC
Ohjeet	http://www.wolframalpha.com/about.html

Nimi	WolframAlpha Viewer
Verkko-osoite	https://itunes.apple.com/us/app/wolframalpha-viewer/id548861535?mt=8
Tyyppi	"WEB Knowledge Engine"-käyttöliittymä
Sujuvuus	OK
Lisenssi	Apple LAEULA
Versio	1.1.2.2015011901
Alusta	iOS
Kehittäjät	Wolfram Group LLC
Ohjeet	http://products.wolframalpha.com/ipad/

Nimi	Wolfram CDF Player
Verkko-osoite	https://www.wolfram.com/cdf-player/
Tyyppi	matemaattinen ladonta
Sujuvuus	OK
Lisenssi	yksinoikeudellinen, kaupallinen
Versio	10.10
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	Wolfram Group LLC
Ohjeet	http://www.wolfram.com/support/

Nimi	Wolfram CDF Player Pro
Verkko-osoite	https://www.wolfram.com/player-pro/
Tyyppi	ohjelmointiympäristö
Sujuvuus	-
Lisenssi	yksinoikeudellinen, kaupallinen
Versio	-
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	Wolfram Group LLC

Liite 1 45(46)

Ohjeet	http://www.wolfram.com/support/
--------	---

Nimi	Wolfram Cloud App
Verkko-osoite	https://itunes.apple.com/us/app/wolfram-cloud/id978701305?mt=8
Tyyppi	matemaattinen WEB-muistikirja
Sujuvuus	OK
Lisenssi	Apple LAEULA
Versio	1.0.2
Alusta	iOS
Kehittäjät	Wolfram Group LLC
Ohjeet	http://www.wolfram.com/cloud/

Nimi	World Programming System, WPS
Verkko-osoite	http://www.worldprogramming.com/
Tyyppi	tilastomatematiikka
Sujuvuus	-
Lisenssi	yksinoikeudellinen, kaupallinen
Versio	3.1
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	World Programming Ltd.
Ohjeet	http://teamwpc.co.uk/support/docs/wps

Nimi	wxMaxima
Verkko-osoite	http://andrejv.github.io/wxmaxima/
Tyyppi	Maximan graafinen käyttöliittymä
Sujuvuus	OK
Lisenssi	GPL
Versio	15.04.0
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	MIT Project MAC, Andrej Vodopivec
Ohjeet	http://maxima.sourceforge.net/documentation.html

Nimi	Xcas
Verkko-osoite	http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/giac.html
Tyyppi	CAS
Sujuvuus	OK
Lisenssi	GPL
Versio	1.1.4
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	Bernard Parisse
Ohjeet	http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/giac.html#doc

Nimi	Xlfit
Verkko-osoite	http://www.excelcurvefitting.com/en/products/xlfit/
Tyyppi	käyrän sovitus

Liite 1 46(46)

Sujuvuus	OK
Lisenssi	yksinoikeudellinen, kaupallinen
Versio	4.3.2
Alusta	Windows
Kehittäjät	ID Business Solutions Ltd.
Ohjeet	http://www.excelcurvefitting.com/en/xlfit-support/

Nimi	Yacas
Verkko-osoite	http://yacas.sourceforge.net/
Tyyppi	CAS
Sujuvuus	OK
Lisenssi	GPL
Versio	1.3.3
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	Ayal Pincus et al.
Ohjeet	http://yacas.sourceforge.net/homepage.html

Nimi	Yenka
Verkko-osoite	http://yenka.com/
Tyyppi	oppimishjelmisto
Sujuvuus	OK
Lisenssi	yksinoikeudellinen, vapaasti käytettävissä muuhun kuin kaupalliseen ja opetukselliseen toimintaan 08.30-15.00 ulkopuolisena aikana.
Versio	3.2.6
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	Crocodile Clips Ltd.
Ohjeet	http://www.yenka.com/en/Support/

Nimi	Yorick
Verkko-osoite	http://yorick.github.com/
Tyyppi	simulaatiot
Sujuvuus	OK
Lisenssi	BSD
Versio	2.2.02
Alusta	monialustainen
Kehittäjät	David H. Munro
Ohjeet	http://dhmunro.github.io/yorick-doc/manual/yorick.html