

INSINÖÖRIEN TEKEMÄT VIRHEET

Narratiivinen pedagogiikka fysiikan opettamisessa

SEPPÖ MÄKINEN

other publikations c30



VAMK

VAASAN AMMATTIKORKEAKOULU
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

PUBLISHER:

Vaasan ammattikorkeakoulu | Vaasa University of Applied Sciences

ISSN 2489-4400 (C, other publications, 30)

ISBN 978-952-5784-51-0 (verkkoaineisto)

<http://urn.fi/URN:ISBN:978-952-5784-51-0>

Copyright © Vaasan ammattikorkeakoulu ja tekijä

Design: VAMK | Satu Aaltonen

Layout: Tritonia | Merja Kallio

Vaasa 2021



VAASAN AMMATTIKORKEAKOULU
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Wolffintie 30, 65200 Vaasa

julkaisut@vamk.fi

VAMK.fi

Sisällys

1	Taustaa	4
2	Sähköinsinööri Sulon tapaus	5
3	Tuloksen tarkkuuden eli virheen laskeminen	7
4	Virheanalyysi	14
5	Loppusanat	16

1 Taustaa

Normaalissa kielenkäytössä virhe tarkoittaa jonkinlaista mokkaa, joka olisi pitänyt pystyä välttämään. Jotain, joka osoittaa virheen tekijän ammattitaidottomuutta tai osaamattomuutta. Uudet työntekijät tekevät eniten virheitä ja kauan ammatissa työskennelleet eivät tee virheitä oikeastaan enää koskaan. Palkansaajan tekemiä virheitä pidetään erityisen moitittavina, ja pahimmillaan niistä voi seurata työsuhteen purkaminen.

Luonnontieteissä tehdään virheitä aivan jatkuvalla syötöllä. Kukaan ei tee virheitä enemmän kuin fyysikko tai kemisti, ja heti heidän perässään seuraavat insinöörit. Mitä tästä voimme päätellä? Ovatko fyysikot, kemistit ja insinöörit kaikista ammattikunnista huonoimpia? Tämän kysymyksen tarkastelu edellyttää, että ymmärtää mitä virhe näiden henkilöiden ammatillisessa maailmassa tarkoittaa.

Virhe tarkoittaa kokeellisten mittausten ja niiden perusteella tehtyjen laskelmien kohdalla jotain, jota ei yksinkertaisesti voi välttää. Mitään mittausta ei voida tehdä absoluuttisen tarkasti, ja siksi mittauksen tulosta ei voida esittää yhtenä lukuarvona. Tulos on esitettävä siten, että se kuuluu tietylle vaihteluvälille. Mittauksen perusteella tiedämme ainoastaan, että tulos on jossain vaihteluvälin minimi- ja maksimiarvon välillä. Mitään muuta emme voi saada selville.

Voisi ajatella, että jos mittaus tehdään aina vain tarkemmin ja tarkemmin, oikein atomitasolla, mittauksen tulos saataisiin absoluuttisen tarkasti selville. Tämän ajatuksen on kuitenkin ampunut alas jo vuonna 1927 eräs historian kuuluisimmista fyysikoista, saksalainen Werner Heisenberg. Hän pystyi osoittamaan 26-vuotiaana nuorena miehenä, että edes kuvitteellisen mikroskooppisissa mittauksissa mittausten tuloksia ei saada selville absoluuttisen tarkasti.

2 Sähköinsinööri Sulon tapaus

Miten virheen olemassaolo vaikuttaa insinöörin elämään? Tarkastellaan kuvitteellista tapusta, jossa runsaasti kuparia sisältävää metalliseosta tuottavassa tehtaassa työskentelevä sähköinsinööri Sulo kutsutaan pomon toimistoon. Pomo selittää Sulolle, että tehtaalta on tilattu valtavan suuri määrä metalliseosta Pohjois-Amerikassa toimivalle ostajalle. Oikein laivalastillinen suomalaista metalliteollisuuden tuotetta. Wau!

Yksi ongelma kauppaan kuitenkin kätkeytyy: ostettavan kupariseoksen sähkönjohtavuuden pitää olla huoneen lämpötilassa vähintään tietyn suuruinen, $\sigma_{\min} = 61,0 \text{ MS/m}$. Nyt pomo pyytääkin sähköinsinööri Suloa määrittämään heidän tuotteensa sähkönjohtavuuden. Tämän pitäisi onnistua Sulolta helposti. Ainoa ongelma on, että sähkönjohtavuuden mittaamiseen ei ole käytettävissä yksinkertaista mittaria. Mitäs nyt pitäisi tehdä? Miten Sulo saa mitattua metalliseoksen sähkönjohtavuuden, jos siihen ei ole olemassa mittaria?

Hiljattain VAMKista valmistunut sähköinsinööri selaa fysiikan kirjaansa ja löytää sähkönjohtavuuteen liittyvät laskukaavat kohtuullisen nopeasti:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma = 1/\rho \\ \rho = RA/L \\ R = U/I \\ A = \pi r^2 \\ r = D/2 \end{array} \right. \quad (1)$$

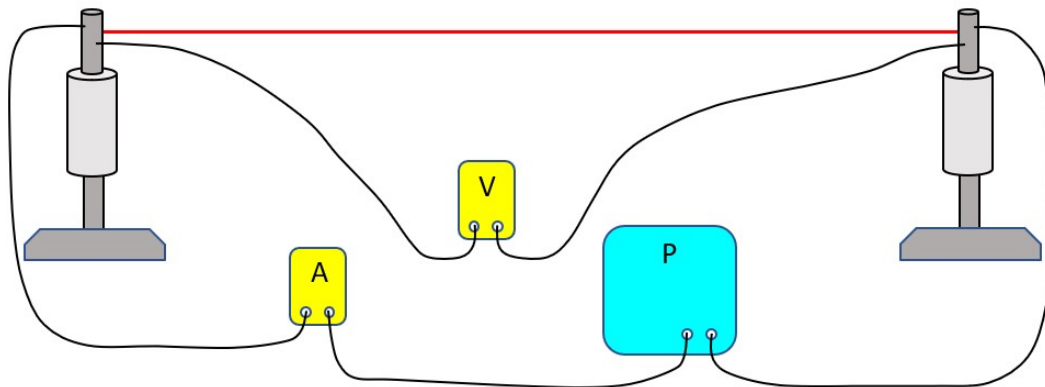
Muutaman tupakan ja kahvikupillisen ja päänraapimistuokion jälkeen Sulo saa järjestettyä laskukaavat muotoon, jolla tutkittavan metalliseoksen sähkönjohtavuus (σ) voidaan las-

kea seoksesta valmistettua tasapaksua johdinta käyttäen:

$$\sigma = \frac{1}{\rho} = \frac{L}{RA} = \frac{4LI}{U\pi D^2} \quad (2)$$

Tässä laskukaavassa L on johtimen pituus, sähkökontaktista toiseen mitattuna, I kuvaa johtimen läpi kulkevaa tasavirtaa, U on johtimen yli mitattu tasajännite ja D kuvaa johtimen paksuutta.

Nyt sähköinsinöörimme kytkee alla näkyvän kuvan mukaisesti tutkittavasta materiaalista valmistetun tasapaksun johtimen kahden sähköisesti eristetyin pylvään väliin. Sulo mittaa mikrometriruuvilla johtimen paksuuden kolmesta kohtaa ja laskee mittaustuloksista keskiarvon johtimen halkaisijalle. Johtimen päät insinööri kytkee tasavirtamittarin ja tasajännitelähteen kanssa sarjaan. Lopuksi hän kytkee tasajännitemittarin mittaamaan johtimen yli vallitsevaa jännitettä.



Kuva 1. Mittausjärjestelyt.

Mittaukset tuottivat seuraavanlaiset tulokset, kun ne tehtiin huoneenlämmössä niin tarkasti kuin sähköinsinöörimme osasi:

$$\left\{ \begin{array}{l} L = 73,8 \text{ cm} \\ I = 1045 \text{ mA} \\ U = 393 \text{ mV} \\ D = 199 \mu\text{m} \end{array} \right.$$

Kun mittaustulokset sijoitetaan laskukaavaan (2), saadaan johdinmateriaalin sähkönjohtavuus laskettua:

$$\sigma = \frac{4LI}{U\pi D^2} = \frac{4 \cdot 0,738 \cdot 1,045}{0,393 \cdot \pi \cdot (199 \cdot 10^{-6})^2} = 63,09342 \cdot 10^6 \text{ S/m} = 63,09342 \text{ MS/m}$$

Sähköinsinööri Sulo on erittäin tyytyväinen, tulos on yli asiakkaan määrittämän minimiarvon! Mutta onko iloon syytä?

3 Tuloksen tarkkuuden eli virheen laskeminen

Tulos on joko hyvä tai huono, riippuen siitä, miten tarkasti tuo lopputulos tunnetaan. Mikäli Sulo on saanut tuloksen selville esim. $\pm 4 \text{ MS/m}$:n tarkkuudella, voi materiaalin sähkönjohtavuus olla liian pieni. Tällöinhän mittauksilla ja laskelmilla on saatu selville vain, että sähkönjohtavuus on jossain 59,09 ja 67,09 MS/m:n välillä. Näin ollen olisi mahdollista, että materiaali ei kelpaakaan asiakkaalle, kun se on laivattu Atlantin yli valtavasti yrityksen aikaa, rahaa ja työvoimaa käyttäen. Hirveä ajatus! Sähköinsinöörimme iho muuttuu kalpeaksi ja hän alkaa hikoilla hallitsemattomasti.

Sulo ymmärtää, että hänen täytyy tietää millä tarkkuudella lopputulos tunnetaan. Ainoastaan tämän jälkeen hän voi kertoa tuloksena pomolleen. Jos lopputuloksen virherajat

osoittautuvat niin pieniksi, että vaihteluvälin minimi on asiakkaan määrittämää pienintä sallittua arvoa suurempi, voidaan laivaa ryhtyä lastaamaan hyvillä mielin.

Miten metalliseokselle määritellyn sähkönjohtavuuden vaihteluväli saadaan selville? Jokaiselle yksittäiselle mittaukselle voimme arvioida vaihteluvälin, joka ilmaistaan mittaustuloksen avulla. Mittauksen oikea tulos (jota emme koskaan voi saada selville absoluuttisesti tarkasti) kuuluu vaihteluvälille, jonka alaraja on yhtä kuin mittaustulos miinus virhe, ja jonka yläraja on yhtä kuin mittaustulos plus virhe. Näin virhe siis määritellään mittaustekniikassa. Ja, kuten aiemmin on jo todettu, virhe ei voi koskaan olla nollan suuruinen, vaan se on aina positiivinen. Suurempi tai pienempi.

Mittaustulosten virheet voidaan arvioida tarkastelemalla mittaria, mittaolosuhteita ja mitattavaa systeemiä. Mittarivirhe, eli mittarin tekemä maksimaalinen mittaustuloksen virhe, voidaan joissain tapauksissa laskea mittarin valmistajan antamalla laskukaavalla. Usein sekin joudutaan kuitenkin arvioimaan.

Sähköinsinöörimme arvioi jokaiselle mittaustulokselle virheen, minkä jälkeen hän voi esittää mittaustulokset virherajoineen seuraavasti:

$$\left\{ \begin{array}{l} L = 73,8 \pm 0,2 \text{ cm} \\ I = 1045 \pm 7 \text{ mA} \\ U = 393 \pm 4 \text{ mV} \\ D = 199 \pm 3 \mu\text{m} \end{array} \right.$$

Nyt sähköinsinööri Sulo joutuu laskemaan mittaamansa materiaalin sähkönjohtavuudelle virheen näistä mittaustuloksista arvioiduista virheistä. Mitenkäs tämän tehdään, hän tuumii. Kysymys kuuluu kutakuinkin näin, Sulo ajattelee: Jos johtimen pituuden mittaamisessa on tehty suurin mahdollinen mittaustuloksen virhe, ts. 2 mm, miten paljon tämä virhe vaikuttaa lasketun sähkönjohtavuuden suuruuteen? Sama kysymys voidaan toistaa muillekin kolmelle mittaustulokselle.

Esitetty kysymys toi sähköinsinöörimme mieleen erään VAMKin matematiikan kurssin, jossa tarkasteltiin hyvin samanlaista kysymystä: Tarkastellaan useasta muuttujasta riippuvaa funktiota $f(x, y, z)$. Jos sen yhden muuttujan (esim. x) arvo muuttuu pienellä määrällä (dx), kuinka paljon muuttuu ko. funktion arvo? Vastaus tuolla matematiikan kurssilla kirjoitettiin muotoon:

$$df_x = \frac{\partial f}{\partial x} dx$$

Tässä lausekkeessa df_x kertoo funktion arvon muutoksen, kun muuttujan x arvo muuttuu määrällä dx . Omituiselta näyttävä termi $\partial f / \partial x$ kertoo funktion f muutosnopeuden muuttujan x suhteen. Matematiikassa tuota termiä kutsutaan f :n osittaisderivaataksi ko. muuttujan x suhteen. Kun tuo muutosnopeus kerrotaan x :n muutoksella, saadaan selville tuon muutoksen aiheuttama muutos funktion f arvossa. Osittaisderivaatta voidaan laskea normaaleja derivointisääntöjä noudattaen siten, että ainoastaan x :ää sisältävät funktion termit derivoidaan, muita muuttujia sisältävien termien pysyessä ennallaan.

Kun sama toistetaan muillekin muuttujille, tässä y ja z , ja lasketaan kaikki muutokset yhteen, saadaan selville funktion kokonaisuutos. Tätä kutsutaan matematiikassa funktion differentiaaliksi df :

$$df = df_x + df_y + df_z = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad (3)$$

Käännetään nyt katseemme takaisin sähköinsinöörimme käsillä olevaan ongelmaan: millä tarkkuudella hän sai selvitettyä johdinmateriaalin sähkönjohtavuuden? Sulo on saanut muodostettua lausekkeen johdinmateriaalin sähkönjohtavuudelle, ks. kaava (2). Ma-

temaatikko sanoisi, että sähköjohtavuus on neljän muuttujan funktio:

$$\sigma(L, I, U, D) = \frac{4LI}{U\pi D^2} \quad (4)$$

Yllä kuvattua ajatusta seuraten sähköinsinööri voi nyt laskea funktion σ kokonaisuutoksen, jos ko. neljä muuttujaa muuttuvat määrillä dL , dI , dU ja dD :

$$d\sigma = \frac{\partial\sigma}{\partial L}dL + \frac{\partial\sigma}{\partial I}dI + \frac{\partial\sigma}{\partial U}dU + \frac{\partial\sigma}{\partial D}dD \quad (5)$$

Sulo osaa laskea polynomien derivaatan VAMKin matematiikan kurssilla saamansa opetuksen perusteella. Niinpä hän tietää, että laskukaavassa (5) olevat osittaisderivaatat saavat seuraavanlaiset muodot:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial L} = \frac{4I}{U\pi D^2}; \quad \frac{\partial\sigma}{\partial I} = \frac{4L}{U\pi D^2}; \quad \frac{\partial\sigma}{\partial U} = -\frac{4LI}{U^2\pi D^2}; \quad \frac{\partial\sigma}{\partial D} = -2\frac{4LI}{U\pi D^3} \quad (6)$$

Kun Sulo liittää saamansa tulokset laskukaavaan (5), hän päätyy seuraavanlaiseen virhekaavan muotoon:

$$d\sigma = \frac{4I}{U\pi D^2}dL + \frac{4L}{U\pi D^2}dI - \frac{4LI}{U^2\pi D^2}dU - 2\frac{4LI}{U\pi D^3}dD \quad (7)$$

Huh, Sulo tuumaa! Nyt näyttää jo aika hyvältä. Vai näyttääkö? Laskukaava on hyvin pitkä ja monimutkaisen näköinen. Olisi hienoa, jos sen saisi muokattua lyhempään ja yksinkertaisempaan muotoon. Mitenkähän tämän tekisi, miettii sähköinsinöörimme Sulo.

Pienen miettimistauon jälkeen Sulo huomaa, että jokainen laskukaavan (7) kerrointermi

muistuttaa hämmästyttävän paljon sähkönjohtavuuden laskukaavaa (4). Tämän havainnon jälkeen Sulo osaa kirjoittaa virhekaavan siten, että siinä esiintyy sähkönjohtavuus σ :

$$d\sigma = \frac{\sigma}{L}dL + \frac{\sigma}{I}dI - \frac{\sigma}{U}dU - 2\frac{\sigma}{D}dD \quad (8)$$

Jos tässä otetaan σ yhteiseksi tekijäksi, virhekaava saa aina vain yksinkertaisemman muodon:

$$d\sigma = \sigma \left(\frac{dL}{L} + \frac{dI}{I} - \frac{dU}{U} - 2\frac{dD}{D} \right) \quad (9)$$

Nyt Suloa alkaa jo hymyilyttää. Laskukaava on erittäin siistin, lyhyen ja yksinkertaisen näköinen. Jos hän käyttää muutoksia kuvaaville termeille dL , dI , dU ja dD hänen kullekin mittaukselle arvioimiaan virheitä, eli maksimipoikkeamia ko. mittaustuloksista, laskukaava (9) tuottaa automaattisesti lopputuloksen virheen, eli lasketun sähkönjohtavuuden suurimman mahdollisen poikkeaman lasketusta lopputuloksesta. Ja tätähän Sulo juuri yrittää saada selville. Hienoa!

Mutta mitä nuo miinusmerkit tarkoittavat? Jos virhekaava sisältää negatiivisia termejä, sähkönjohtavuuden virheestä tulee sitä pienempi (eli lopputulos tunnetaan sitä tarkemmin) mitä suurempi on ko. mittauksen epätarkkuus eli virhe. Tämähän ei tietenkään voi pitää paikkaansa. Nuo miinusmerkit pitää siis ehdottomasti ottaa pois, jotta jokaisessa mittauksessa tehty epätarkkuus kasvattaa lopputuloksen virhettä eikä päinvastoin. Tämä tarkoittaa sitä, että virhekaava (5) pitää kirjoittaa muotoon:

$$d\sigma = \left| \frac{\partial\sigma}{\partial L} \right| dL + \left| \frac{\partial\sigma}{\partial I} \right| dI + \left| \frac{\partial\sigma}{\partial U} \right| dU + \left| \frac{\partial\sigma}{\partial D} \right| dD \quad (10)$$

Tämä tarkoittaa, että Sulo voi nyt kirjoittaa laskukaavan (9) oikeassa muodossaan:

$$d\sigma = \sigma \left(\frac{dL}{L} + \frac{dI}{I} + \frac{dU}{U} + 2\frac{dD}{D} \right) \quad (11)$$

Sähköinsinöörimme Sulo tarkastelee työnsä tuloksia tyytyväisyyttä uhkuen. Kova työ ja kurseilla saadut opit ovat tuottaneet hyvän tuloksen. Nyt puuttuu enää se, että Sulo sijoittaa virhekaavaan kullekin mittaustulokselle arvioimansa virheen, eli mittaustuloksen ja todellisen arvon välisen eron:

$$\left\{ \begin{array}{l} L = 73,8 \text{ cm} ; dL = 0,2 \text{ cm} \\ I = 1045 \text{ mA} ; dI = 7 \text{ mA} \\ U = 393 \text{ mV} ; dU = 4 \text{ mV} \\ D = 199 \text{ } \mu\text{m} ; dD = 3 \text{ } \mu\text{m} \end{array} \right.$$

Nyt Sulo voi viimeinkin laskea selvittämänsä kupariseoksen sähkönjohtavuuden virheen, eli suurimman mahdollisen eron lasketun tuloksen ja todellisen tuloksen välillä:

$$\begin{aligned} d\sigma &= \sigma \left(\frac{dL}{L} + \frac{dI}{I} + \frac{dU}{U} + 2\frac{dD}{D} \right) = \\ &= 63,09342 \text{ MS/m} \left(\frac{0,2}{73,8} + \frac{7}{1045} + \frac{4}{393} + 2\frac{3}{199} \right) = \\ &= 63,09342 \text{ MS/m} (0,00271 + 0,00670 + 0,01018 + 0,03015) = \\ &= 63,09342 \text{ MS/m} \cdot (0,04974) = \\ &= 3,13827 \text{ MS/m} \end{aligned}$$

Viimeinkin Sulo on saanut selville sekä tutkimansa metalliseoksen sähkönjohtavuuden että sen virheen. Nyt on jäljellä enää lopputuloksen kertominen pomolle. Voisiko sen ilmoittaa muodossa:

$$\sigma = (63,09342 \pm 3,13827) \text{ MS/m}$$

Periaatteessa kyllä, mutta jotain omituista tässä esitystavassa kuitenkin on. Jos kiinnitämme huomiomme virheen esitysmuotoon, havaitsemme, että se on annettu älyttömän tarkasti. Sen lukuarvo on kerrottu peräti 6 merkitsevän numeron tarkkuudella. Tässä ei ole paljoakaan järkeä siksi, että sähkönjohtavuuden lopputuloksessa jo toinen numero (3) vaihtelee virheestä johtuen 3 pykälää ylös- tai alaspäin. Näin ollen virhettä ei ole missään mielessä järkevää esittää noin suurella tarkkuudella. Desimaaleilla ei ole tässä mitään merkitystä.

Kaikesta edellä pohditusta seuraa, että Sulo antaa lopputuloksen järkevää virheen tarkkuutta ja sitä vastaavaa lopputuloksen tarkkuutta käyttäen:

$$\sigma = (63 \pm 3) \text{ MS/m}$$

Lopulta sähköinsinööri Sulo saattaa siis sanoa pomolleen, että sähkönjohtavuus on jossain 60 ja 66 MS/m välillä.

4 Virheanalyysi

Sulon pomo kutristaa kulmiaan, kun sähköinsinöörimme esittää saamansa tuloksen hänelle. Lopputuloksen virhe on sen verran suuri, että amerikkalaisen asiakkaan ehto minimiarvosta voi hyvinkin alittua. Ratkaisuksi pomo antaa Sulolle 3000 € firman rahaa ja pyytää häntä ostamaan jonkin nykyistä tarkemman mittarin, jotta lopputuloksen virhe saadaan puristettua tarpeeksi pieneksi. Mikäli virhe saadaan vaikkapa pienemmän kolmasosaan nykyisestä, ja uusintamittaus antaa sähkönjohtavuudelle likipitäen saman tuloksen, voidaan olla tyytyväisiä. Tällöinhän tehtaan tuottaman kupariseoksen sähkönjohtavuus olisi vähintään 62 MS/m. Ja tällöin laivaa voitaisiin ryhtyä lastaamaan suomalaisella metalliseoksella.

Sulo katsoo epäuskoisesti käsissään olevaa paksua setelinippua. Nyt pitää enää päättää, minkä mittarin hän käy ostamassa. Jaa-a, tämä päätös pitää tehdä oikein. Jos hän ostaa uuden mittarin jo nyt tarkasti toimivan mittarin tilalle, rahan käytöstä ei ole mitään hyötyä. Jos Sulo sen sijaan osaa ostaa tarkemman mittarin nykyisistä mittareista epätarkimman tilalle, raha tulee käytettyä järkevästi.

Jotta Sulo osaisi tehdä järkevän päätöksen, hän palaa edellä esitetyn virhelaskelmansa pariin. Siitä selviää, kun sitä oikein lukee, että johtimen pituuden mittaaminen tuotti lopputulokseen 0,27 % suuruisen virheen:

$$\frac{dL}{L} = 0,00271$$

Vastaavasti virran mittaamisesta tuli lopputulokseen 0,67 % suhteellinen virhe, jännitteen mittaaminen tuotti 1,02 % virheen ja johtimen halkaisijan mittaaminen tuotti peräti 3,02 % suuruisen virheen. Nyt Sulon on helppo tehdä päätös entistä tarkemman mittarin hankkimisesta. Ei olisi mitään järkeä ostaa uutta rullamittaa tahi uutta virta- tai jännitemittaria.

Sen sijaan uusi ja entistä huomattavasti tarkempi paksuuden mittari, ts. mikrometriruuvi, kannattaa hankkia. Sehän tuottaa yksistään lähes kaiken lopputuloksen virheestä.

Oletetaan, että Sulo osti uuden mikrometriruuvin, jonka mittaustarkkuudeksi hän arvioi 1 mikrometrin. Tällöin materiaalin sähkönjohtavuuden virheeksi saadaan:

$$\begin{aligned}d\sigma &= \sigma \left(\frac{dL}{L} + \frac{dI}{I} + \frac{dU}{U} + 2\frac{dD}{D} \right) = \\&= 63,09342 \text{ MS/m} \left(\frac{0,2}{73,8} + \frac{7}{1045} + \frac{4}{393} + 2\frac{1}{199} \right) = \\&= 63,09342 \text{ MS/m} (0,00271 + 0,00670 + 0,01018 + 0,01005) = \\&= 1,388 \text{ MS/m}\end{aligned}$$

Tässä kohtaa astuu voimaan sääntö, että lopputuloksen virheeseen voidaan ottaa peräti kaksi merkitsevää numeroa. Tämä johtuu siitä, että kun lopputuloksen virhe on tarpeeksi pieni, se voidaan esittää hieman muita tapauksia tarkemmin. Niinpä rahat viisaasti käytettyään ja uusintamittaukset tehtyään sähköinsinööri Sulo voi viedä uudet tulokset pomon nähtäväksi. Nyt hän voi luottavaisin mielin kertoa, että tehtaan valmistaman kupariseoksen sähkönjohtavuus on:

$$\sigma = (63,1 \pm 1,4) \text{ MS/m}$$

Näin ollen sähkönjohtavuus on vähintään 61,7 MS/m suuruinen. Ja laivaa voidaan vihdoinkin ruveta lastaamaan.

5 Loppusanat

Tämä artikkeli kuvaa tapaa, jolla olen opettanut virhelaskentaa insinööriopiskelijoillemme monien, monien vuosien ajan. Oman kokemukseni perusteella uskallan väittää, että tarinallistaminen sopii erinomaisesti vaikeiden oppisisältöjen opettamiseen. Kenties jopa siinä määrin, että mitä vaikeampi aihe, sitä enemmän narratiivista otetta sen opettamiseen kannattaisi käyttää. Arvoisa kollega, suosittelen lämpimästi!