



# Teräsbetonilaatan laskentamenetelmät

CASE: Paksu teräsbetonilaatta

Atte Lastuvirta

OPINNÄYTETYÖ  
Marraskuu 2020

Rakentamisen ylempi tutkinto-ohjelma

## TIIVISTELMÄ

Tampereen ammattikorkeakoulu  
Rakentamisen ylempi tutkinto-ohjelma

LASTUVIRTA, ATTE:  
Teräsbetoni-laatan laskentamenetelmät  
CASE: Paksu teräsbetoni-laatta

Opinnäytetyö 132 sivua  
Marraskuu 2020

---

Paksuja teräsbetoni-laattoja käytetään kuormansiirtorakenteina eri runkojärjestelmien välillä. Runkojärjestelmien yhdistäminen on tyypillistä hybridirakentamisessa. Esimerkkinä voi mainita metroasemat, joiden päälle on useissa pääkaupunkiseudun hankkeissa rakennettu pilarit-palkit-laatat-runkojärjestelmän mukainen liikerakennus ja liikerakennuksen päälle yksi tai useampi asuinkerrostalo kantavat seinät-laatat-runkojärjestelmällä. Paksujen teräsbetoni-laattojen rakenneanalyysin tukena yleinen ja tehokas työkalu on elementtimenetelmä eli FEM (Finite Element Method). Paksujen teräsbetoni-laattojen tapauksessa FEM-rakenneanalyysi saa kuitenkin erityispiirteitä, joita ovat laskentamallin ulottuvuus, käytettävä laattateoria ja tulosten muodostuminen sekä oikea tulkinta.

Tässä opinnäytetyössä perehdyttiin elementtimenetelmän perusteisiin ja toimintaan käytännössä, laattateorioihin sekä betonin materiaaliominaisuuksien erityispiirteisiin. Tästä muodostunutta teoriaosuutta sovellettiin käytännönsuudessa, jossa käytettiin Dlubal RFEM -ohjelmistoa. Käytännönsuudessa laattojen FEM-rakenneanalyysia, tulosten muodostumista ja tulkintaa tutkittiin aluksi yksinkertaisin sovelluksin. Tämän jälkeen menetelmiä sovellettiin CASE-laskennassa kuvitteelliseen paksuun pilarilaattaan, jonka päälle rakentui 11-kerroksinen asuinkerrostalo.

Työn perusteella voidaan todeta, että laskentamenetelmissä ulottuvuudella ja valitulla laattateorialla on merkitystä. Kaksiulotteisella laskentamallilla tulosten tulkitseminen on yksinkertaisempaa ja mitoitusvoimasuureiden muodostamiseen on kehitetty menetelmiä, joista tämän työn perusteella voidaan suositella vääntömomenttiin huomioivaa Wood and Armer -menetelmää. Laattateorioiden olennaisin ero on leikkausmuodonmuutos, jonka Reissner-Mindlin laattateoria huomioi. Kaksiulotteisessa laskentamallissa on käytettävä Kirchhoff laattateoriaa jännevälin ja paksuuden suhteen ollessa yli 5 ja Reissner-Mindlin laattateoriaa suhteen ollessa alle 5. Kolmiulotteinen laskentamalli soveltuu muodonmuutosten lisävarmistukseksi tai kun jännevälin ja paksuuden suhde on alle 3, jolloin kaksiulotteisella laskentamallilla saadaan virheellisiä tuloksia laattateoriasta huolimatta. Paksujen teräsbetoni-laattojen jatkotutkimusaiheiksi esitetään mitoitusmenetelmien, rakenneosien toiminnan ja niiden sovellettavuusrajojen tarkempaa tutkimista sekä työmaatoteutuksen ja sen haasteiden käsittelyä.

---

Asiasanat: FEM, paksu laatta, leikkausmuodonmuutos, RFEM

## ABSTRACT

Tampereen ammattikorkeakoulu  
Tampere University of Applied Sciences  
Master's Degree Programme in Construction Engineering

LASTUVIRTA, ATTE:

Reinforced concrete slab calculation methods

CASE: Thick reinforced concrete slab

Master's thesis 132 pages

November 2020

---

Thick reinforced concrete slabs are used as load transfer structures, for example between different frame systems. The interconnection of frame systems is common in hybrid buildings, where buildings with several different uses are interconnected. For example, a commercial building with a columns-beams-slabs frame system with spacious commercial premises and a walls-slabs frame system residential building built on top of the commercial building. In the structural analysis of slabs, a common and effective tool is finite element method i.e. FEM. In FEM structural analysis, in the case of thick reinforced slabs, special features are the choice of dimension of the calculation model between two-dimensional and three-dimensional, the slab theory to be used and the formation and correct interpretation of the results.

In this thesis, the basics and operation of the finite element method in practice, slab theories and the special features of concrete material properties were introduced. The resulting theoretical part was applied in the practical part using Dlubal RFEM software. In the practical part, the FEM structural analysis of slabs and the formation and interpretation of the results were initially studied with simple applications. The methods were then applied in a CASE calculation to a demonstrable load transfer slab on which an 11-storey apartment building was built.

Based on this thesis, it can be stated that chosen dimension of the calculation model and slab theories are important in FEM structural analysis. With two-dimensional calculation model, the interpretation of the results is simpler. There are also few methods to generate design internal forces which takes torsional moment into account. Wood and Armer method is recommended. The most essential difference between slab theories is the consideration of shear deformation. On two-dimensional calculation model Kirchhoff slab theory should be used when span-to-thickness ratio is more than 5 and Reissner-Mindlin slab theory should be used when ratio is less than 5. The three-dimensional calculation model is suitable for verification of the deformations or as a calculation method when span-to-thickness ratio is less than 3. After that two-dimensional calculation model gives false results. A more detailed study of the structural component differences, and special features of working site implementation, is proposed as topics of further research.

---

Key words: FEM, thick slab, shear deformation, RFEM

## SISÄLLYS

1	JOHDANTO .....	9
1.1	Tausta .....	9
1.2	Tavoitteet ja menetelmät .....	10
1.3	Rajaukset .....	11
2	ELEMENTTIMENETELMÄ .....	12
2.1	Elementtimenetelmän perusteet .....	12
2.2	Elementtimenetelmä käytännössä .....	21
2.2.1	Elementtitiheys .....	22
2.2.2	Analyysityypit .....	23
2.2.3	Mallinnusperiaatteet .....	26
2.2.4	Materiaaliominaisuudet .....	30
3	LAATTATEORIAT .....	32
3.1	Muodonmuutostila .....	33
3.2	Kirchhoff laattateoria .....	36
3.3	Reissner-Mindlin laattateoria .....	38
3.4	Laattateorioiden yhteenveto .....	40
3.5	Laattateorioiden vaikutus käytännössä .....	41
4	BETONIRAKENTEIDEN ERITYISPIIRTEITÄ .....	44
4.1	Rakennesien määritelmät .....	45
4.2	Laattojen rakenteellinen toiminta .....	46
4.3	Betonin materiaaliominaisuudet .....	47
4.3.1	Puristus- ja vetolujuus .....	47
4.3.2	Kimmokerroin .....	50
4.3.3	Poissonin luku ja liukukerroin .....	51
4.3.4	Eurokoodin materiaalmallit .....	51
4.4	Betonin ajasta riippuvaisten ominaisuuksien vaikutus .....	56
4.4.1	Viruminen .....	56
4.4.2	Kutistuminen .....	59
4.5	Halkeilu .....	62
4.6	Betoniteräksset .....	65
4.7	Betonin materiaaliominaisuuksien yhteenveto .....	67
5	CASE – PAKSU LAATTA .....	68
5.1	Kaksiulotteisen laskentamallin muodostaminen .....	68
5.2	Kolmiulotteisen laskentamallin muodostaminen .....	72
5.3	Laskentamallien tulosten tulkinta .....	75
5.4	Kaksiulotteisen laskentamallin perusvoimasuureet .....	76

5.5	Kaksiulotteisen laskentamallin mitoitusvoimasuureet.....	77
5.6	Kolmiulotteisen laskentamallin jännitysten tulkitseminen .....	93
5.7	Kolmiulotteisen laskentamallin tulokset tulospalkilla .....	97
5.8	Käytännön CASE-laskenta.....	101
5.8.1	Taipumavertailu tasaisella kuormituksella .....	105
5.8.2	Taipumavertailu viivakuormituksella .....	109
5.8.3	Maksimitaivutusmomentti- ja jakaumavertailu .....	114
5.8.4	Maksimivääntömomentti- ja jakaumavertailu .....	117
5.8.5	Mitoitustaivutusmomenttijakaumavertailu .....	119
5.9	CASE-laskennan yhteenveto .....	123
6	JOHTOPÄÄTÖKSET JA POHDINTA.....	125
	LÄHTEET.....	131

## Käytetyt termit ja lyhenteet

<i>FEM</i>	Finite Element Method, elementtimenetelmä, rakenne-analyysissa käytetty laskentamenetelmä
<i>FEA</i>	Finite Element Analysis, elementtimenetelmällä saatu- jen tulosten analysointi
<i>laskentamalli</i>	Elementeistä ja solmuista koostuva kokonaisuus, käytetään myös nimitystä elementtiverkko
<i>elementti</i>	Laskentamallin osa
<i>solmu</i>	Laskentamallin osa
<i>mallitila</i>	Laskentamallin luomistila, kaksi- tai kolmiulotteinen
<i>laatta</i>	Rakenneseosa, jonka lyhimmän jännevälin ja paksuuden suhde on yli 5
<i>palkki</i>	Rakenneseosa, jonka lyhimmän jännevälin ja paksuuden suhde on alle 5
<i>seinämäinen palkki</i>	Rakenneseosa, jonka lyhimmän jännevälin ja paksuuden suhde on alle 3
<i>E</i>	Kimmo kerroin, materiaaliominaisuus, N/mm <sup>2</sup>
<i>ε</i>	Suhteellinen venymä, ‰
<i>σ</i>	Normaalijännitys, N/mm <sup>2</sup>
<i>F</i>	Voima, N
<i>A</i>	Poikkileikkauksen pinta-ala, mm <sup>2</sup>
<i>u</i>	Translaatiosiiirtymä x-suuntaan, mm
<i>v</i>	Translaatiosiiirtymä y-suuntaan, mm
<i>w</i>	Translaatiosiiirtymä z-suuntaan, taipuma, mm
<i>φ</i>	Rotaatiosiiirtymä, kiertymä, rad
<i>n<sub>x</sub></i>	Normaalivoima kaksiulotteisen laskentamallin sisäisen x-akselin suuntaisesti, kN/m
<i>n<sub>y</sub></i>	Normaalivoima kaksiulotteisen laskentamallin sisäisen y-akselin suuntaisesti, kN/m
<i>n<sub>xy</sub></i>	Leikkausvoima pituussuuntaisesti kaksiulotteisen laskentamallin xy-tasossa, kN/m
<i>v<sub>x</sub></i>	Leikkausvoima kohtisuoraan kaksiulotteisen laskentamallin xy-tasoa sisäisen x-akselin suuntaisesti, kN/m

$V_y$	Leikkausvoima kohtisuoraan kaksiulotteisen laskentamallin xy-tasoa sisäisen y-akselin suuntaisesti, kN/m
$m_x$	Taivutusmomentti kaksiulotteisen laskentamallin sisäisen x-akselin suuntaisesti, kNm/m
$m_y$	Taivutusmomentti kaksiulotteisen laskentamallin sisäisen y-akselin suuntaisesti, kNm/m
$m_{xy}$	Vääntömomentti kaksiulotteisen laskentamallin xy-tasossa, kNm/m
$\sigma_x$	Normaalijännitys kaksiulotteisen laskentamallin sisäisen x-akselin suuntaisesti tai normaalijännitys mallitilan globaalin x-akselin suuntaisesti kolmiulotteisessa laskentamallissa, N/mm <sup>2</sup>
$\sigma_y$	Normaalijännitys kaksiulotteisen laskentamallin sisäisen y-akselin suuntaisesti tai normaalijännitys mallitilan globaalin y-akselin suuntaisesti kolmiulotteisessa laskentamallissa, N/mm <sup>2</sup>
$T_{xy}$	Leikkausjännitys kaksiulotteisen laskentamallin xy-tasossa tai mallitilan globaalissa xy-tasossa kolmiulotteisessa laskentamallissa, N/mm <sup>2</sup>
$T_{xz}$	Leikkausjännitys kaksiulotteisen laskentamallin xz-tasossa tai mallitilan globaalissa xz-tasossa kolmiulotteisessa laskentamallissa, N/mm <sup>2</sup>
$T_{yz}$	Leikkausjännitys kaksiulotteisen laskentamallin yz-tasossa tai mallitilan globaalissa yz-tasossa kolmiulotteisessa laskentamallissa, N/mm <sup>2</sup>
$m_{x,D+}$	Mitoitustaivutusmomentti raudoituksen mitoitukseen kaksiulotteisen laskentamallin sisäisen x-akselin suuntaisesti sisäisen z-akselin positiivisella puolella, huomioi taivutus- ja vääntömomentin (Wood and Armer -menetelmä), kNm/m
$m_{y,D+}$	Mitoitustaivutusmomentti raudoituksen mitoitukseen kaksiulotteisen laskentamallin sisäisen y-akselin suuntaisesti sisäisen z-akselin positiivisella puolella, huomioi taivutus- ja vääntömomentin (Wood and Armer -menetelmä), kNm/m

$m_{c,D+}$	Mitoitustaivutusmomentti betonin mitoitukseen kaksiulotteisen laskentamallin sisäisen z-akselin positiivisella puolella, huomioi taivutus- ja vääntömomentin (Wood and Armer -menetelmä), kNm/m
$m_{x,D-}$	Mitoitustaivutusmomentti raudoituksen mitoitukseen kaksiulotteisen laskentamallin sisäisen x-akselin suuntaisesti sisäisen z-akselin negatiivisella puolella, huomioi taivutus- ja vääntömomentin (Wood and Armer -menetelmä), kNm/m
$m_{y,D-}$	Mitoitustaivutusmomentti raudoituksen mitoitukseen kaksiulotteisen laskentamallin sisäisen y-akselin suuntaisesti sisäisen z-akselin negatiivisella puolella, huomioi taivutus- ja vääntömomentin (Wood and Armer -menetelmä), kNm/m
$m_{c,D-}$	Mitoitustaivutusmomentti betonin mitoitukseen kaksiulotteisen laskentamallin sisäisen z-akselin negatiivisella puolella, huomioi taivutus- ja vääntömomentin (Wood and Armer -menetelmä), kNm/m



## 1 JOHDANTO

### 1.1 Tausta

Paksuja, raudoitettuja sekä tyypillisesti jälkijännitettyjä betonilaattoja käytetään kuormansiirtorakenteina eri runkojärjestelmien välillä. Runkojärjestelmien yhdistäminen on yleistä hybridirakentamisessa, jossa eri käyttötarkoituksen ja sitä kautta eri runkojärjestelmän rakennukset kytkeytyvät toisiinsa. Hybridirakentamisen yhtenä esimerkkinä voidaan mainita joukkoliikenteen solmukohdat, metroasemat, joiden yhteyteen on pääkaupunkiseudun hankkeissa tyypillisesti rakennettu liikerakennus pilarit-palkit-laatat-runkojärjestelmällä avarine liiketiloineen. Liikerakennuksen päälle on tämän jälkeen rakennettu yksi tai useampi asuinkerrostalo kantavat seinät-laatat runkojärjestelmällä. Kuvassa 1 on esitetty esimerkki paksusta teräsbetonilaatasta kuormansiirtorakenteena. Kuvan 1 mittasuhteet perustuvat todelliseen kohteeseen. Paksuista laatoista käytetään myös nimitystä siirtolaatta.



KUVA 1. Paksu laatta kuormansiirtorakenteena eri runkojärjestelmien välillä

Paksujen laattojen rakenneanalyysissä rakennesuunnittelijan on varmistettava, että rakenneosa täyttää sille asetetut vaatimukset. Rakenneanalyysin tukena yleinen ja tehokas työkalu on elementtimenetelmä eli FEM. Kun rakenneosan geometria, reunaehdot ja kuormitukset tiedetään, voidaan FEM-rakenneanalyysillä muodostaa laskentamalli rakenneosan muodonmuutosten ja rasitusten rat-

kaisemiseksi. Tämän jälkeen rakenneosaa voidaan mitoittaa täyttämään sille asetetut vaatimukset. Paksujen teräsbetonilaattojen tapauksessa FEM-rakenneanalyysi saa kuitenkin erityispiirteitä, joita ovat:

- Mitä yleisiä mallinnus- ja laskentaperiaatteita tulisi käyttää? Reunaehtojen eli tukien mallinnus? Elementtitiheys? Analyysityyppi?
- Miten paksun teräsbetonilaatan laskentamalli tulisi luoda? Kaksi- vai kolmiulotteisena?
- Miten kaksi- ja kolmiulotteisen laskentamallin tulokset eroavat toisistaan ja kuinka niitä tulkitaan?
- Laattojen toimintaa on kuvattu laattateorioin, joista yleisimmät ovat Kirchhoff laattateoria ja Reissner-Mindlin laattateoria. Käytettävä laattateoria on valittava FEM-rakenneanalyysissä. Miten nämä eroavat? Milloin kutakin laattateoriaa käytetään?
- Eurokoodin mukaan rakenneosaa määritellään laataksi, kun sen jännevälin ja paksuuden suhde on yli 5. Mitä vaikutuksia on, kun paksujen laattojen tapauksessa jännevälin ja paksuuden suhde voi olla alle 5 tai jopa alle 3?
- Mitä betonin materiaaliominaisuuksia FEM-rakenneanalyysissä tulee huomioida? Miten ne vaikuttavat?

## 1.2 Tavoitteet ja menetelmät

Tämän opinnäytetyön tavoitteena on kehittää paksujen teräsbetonilaattojen suunnitteluosaamista ja ehkäistä mahdollisia virheitä. Opinnäytetyössä muodostetaan kirjallisuustutkimuksena teoriaosuus ja sitä tukeva käytännönoosuus paksujen teräsbetonilaattojen FEM-rakenneanalyysistä. Teoriaosuus jakautuu kolmeen osaan, ensimmäisessä osassa käsitellään elementtimenetelmän perusteita ja toimintaa käytännössä. Toisessa osassa käsitellään Kirchhoff laattateoriaa, Reissner-Mindlin laattateoriaa, niiden eroavaisuuksia ja vaikutusta käytännössä. Kolmannessa osassa perehdytään Eurokoodipohjaisesti betonin materiaaliominaisuuksiin huomioiden FEM-rakenneanalyysin erityispiirteet.

Teoriaosuutta sovelletaan tämän jälkeen käytännönoosuudessa. Käytännönoosuuden aluksi käsitellään laskentamallien muodostamista kaksi- ja kolmi-

ulotteisena sekä tulosten muodostumista ja tulkitsemista yksinkertaisin sovelluksin. Käytännönsuuden alku tukee teoriaosuuden ensimmäistä osuutta, jossa käsitellään elementtimenetelmää. Käytännönsuuden päätteeksi suoritetaan kuvitteellinen CASE-laskenta, joka tässä opinnäytetyössä on paksu pilarilaatta. Pilarilaatta toimii kuormansiirtorakenteena, jonka päälle rakentuu 11-kerroksinen asuinkerrostalo. CASE-laskennassa muuttujina ovat kuormitustapa tasaisen ja viivakuormituksen välillä, laskentamallin ulottuvuus ja käytettävä laatta-teoria. CASE-laskennassa vertaillaan voimasuurejakaumia sekä muodonmuutoksia. CASE-laskennan tarkoituksena on havainnollistaa ja todentaa teoriaosuudessa esitettyjä asioita.

Tässä opinnäytetyössä käytettävä FEM-ohjelmisto on RFEM, joka on vuonna 1987 perustetun Dlubal-yrityksen ohjelmisto. Yritys on nimetty perustajansa DI Georg Dlubalin mukaan. RFEM-ohjelmistolla on jopa 45 000 käyttäjää maailmanlaajuisesti. (Dlubal n.d.)

Opinnäytetyön tilaajana toimii Sweco Rakennetekniikka Oy. Opinnäytetyön pohjalta laaditaan ohjekortti tilaajan rakennesuunnittelijoiden käyttöön.

### **1.3 Rajaukset**

Tässä opinnäytetyössä keskitytään laattarakenteisiin ja niiden FEM-rakenneanalyysiin, eli rakenneosan muodonmuutosten ja voimasuureiden määrittämiseen. Opinnäytetyöstä on rajattu pois paksujen teräsbetonilaattojen mitoitusmenetelmät ja raudoitussuunnittelu jännitettynä tai jännittämättömänä betonirakenteena.

## 2 ELEMENTTIMENETELMÄ

Finite Element Method (FEM) on numeerinen laskentamenetelmä eli elementtimenetelmä. Elementtimenetelmä on rakennesuunnittelijoiden yleinen työkalu rakenneanalyysien tukena.

Elementtimenetelmän ensi askeleiden voidaan sanoa tapahtuneen saksalaisen rakennesuunnittelija Konrad Zusen toimesta vuonna 1941. Hän keksi maailman ensimmäisen sähköisen ohjelmoitavan laskimen. Motivaationa laskimen keksimiseen oli laskelmien työläs toistaminen rakenteiden suunnittelussa. Elementtimenetelmän käyttö sai kuitenkin varsinaisesti alkunsa vasta 1950-luvulla lentokonerakenteiden lujuuslaskennassa, mitä edesauttoi tietokoneiden ja sitä kautta laskentakapasiteetin kehittyminen. Lentokonerakenteista elementtimenetelmä levittäytyi laajemmin kantavien rakenteiden analysointiin eli rakenneanalyysin tueksi. (Rombach 2011, 2; Salmi & Kuula 2012, 319.)


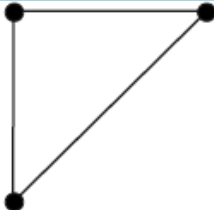
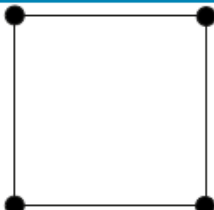
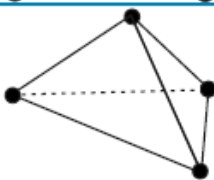
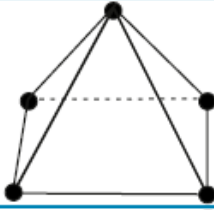
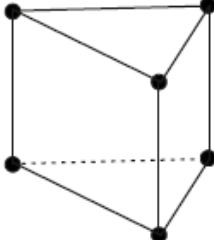
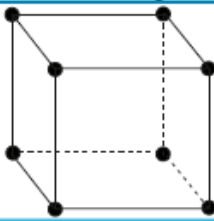
Palkkirakenteet eli sauvarakenteet ovat elementtimenetelmän helpoin sovellusalue, sillä sauvarakenteet ovat yksiulotteisia. Elementtimenetelmän käyttö sai alkunsa palkkirakenteista ja laajeni siitä 1960-luvulla kaksiulotteisiin laatta- ja levyrakenteisiin sekä kolmiulotteisiin solidirakenteisiin. (Salmi & Kuula 2012, 320.)

Tässä luvussa käsitellään elementtimenetelmän perusteita ja toimintaa käytännössä. Teoriaan liittyen on pyritty havainnollistamaan elementtimenetelmän toimintaa käytännössä tässä opinnäytetyössä käytettävässä RFEM -ohjelmistossa.

### 2.1 Elementtimenetelmän perusteet

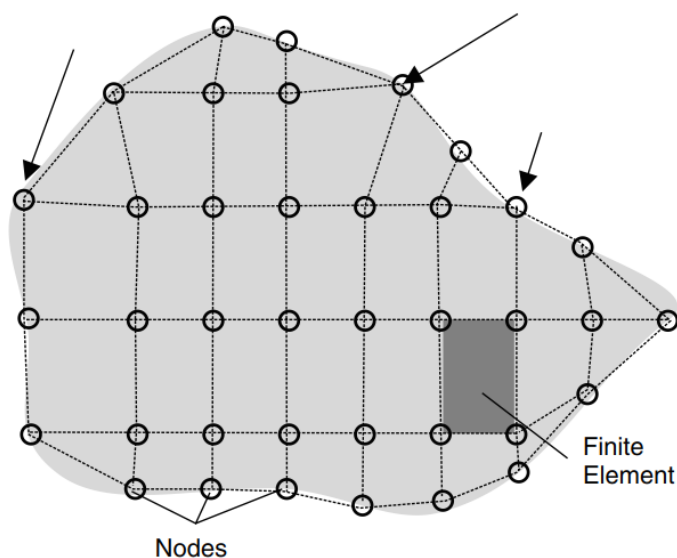
Elementtimenetelmässä monimutkainen rakenne jaetaan pienempiin ja siten hallittavampiin osiin, elementteihin. Osiin jaosta käytetään myös nimitystä diskretisointi. Elementeistä muodostunutta kokonaisuutta kutsutaan yleensä laskentamalliksi tai elementtiverkoksi. Tässä opinnäytetyössä käytetään nimitystä laskentamalli. (Rombach 2011, 5; Salmi & Kuula 2012, 321.)

Yksiulotteisissa laskentamalleissa käytetään janaelementtejä, jotka ovat tyypillisesti sauva- ja palkkielementtejä. Kaksiulotteisissa laskentamalleissa eli laatta-, levy- tai kuorimalleissa, elementteinä käytetään neli- ja kolmisivuelementtejä. Kolmiulotteisissa laskentamalleissa eli solidimalleissa, elementteinä käytetään neli-, viisi- ja kuusitahokkaita. Näitä kutsutaan myös tetraedri-, kiila- ja tiiliskivelementeiksi. Kuvassa 2 on esitetty RFEM-ohjelmistossa käytettävät elementtityypit. (Lähteenmäki 2009a.)

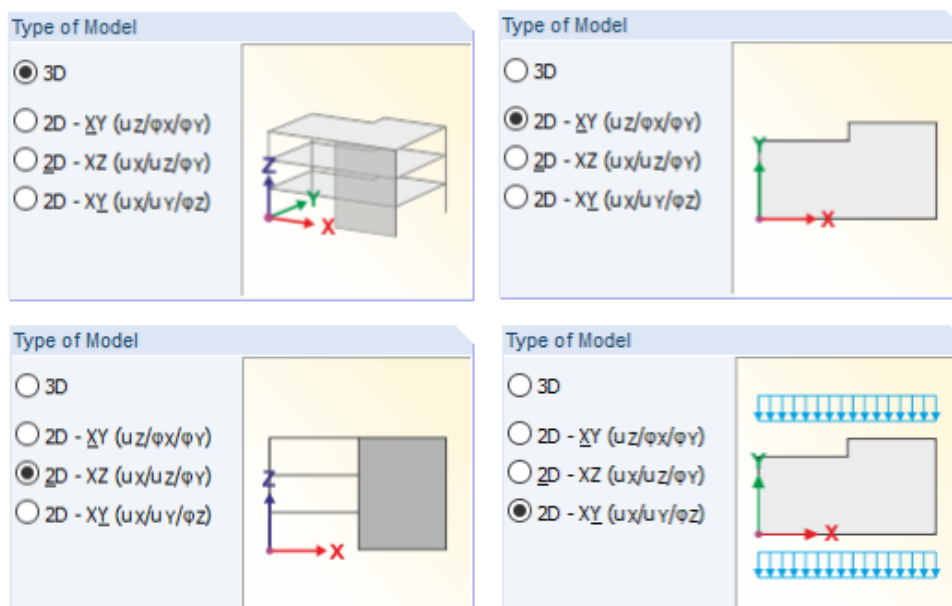
Dimensions	Name	Number of Nodes	Sketch
1D	beam	2	
2D	triangle	3	
	quadrangle	4	
3D	tetrahedron	4	
	pentahedron – pyramid	5	
	pentahedron – prism	6	
	hexahedron – brick	8	

KUVA 2. RFEM-ohjelmiston käyttämät elementtityypit (Dlubal 2019a)

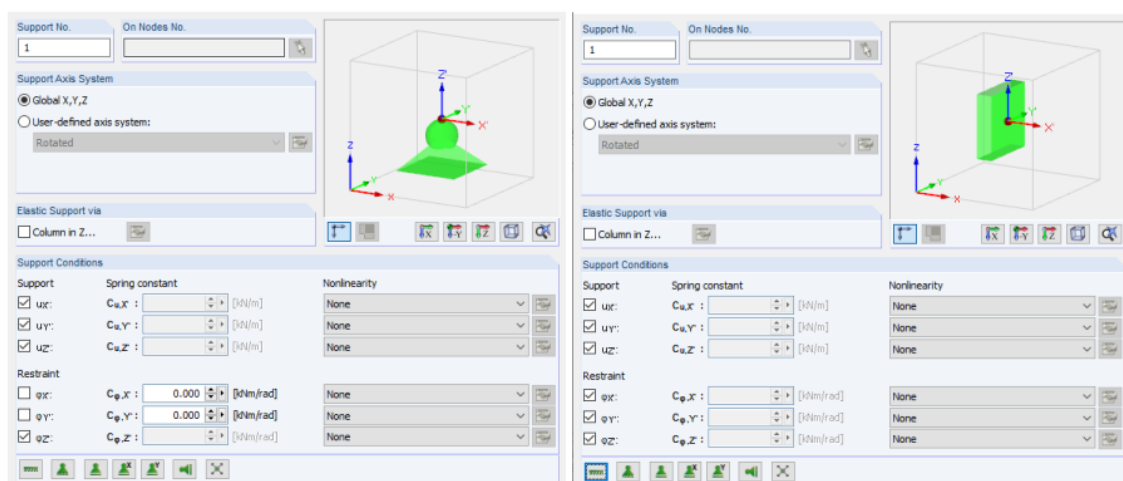
Elementit liittyvät toisiinsa pisteissä, joita kutsutaan solmuiksi (englanniksi node). Näin muodostuu kokonaisuus, laskentamalli, joka on esitetty kuvassa 3. Elementtimenetelmässä ratkaistaan ensin solmuissa esiintyvät suureet, joita ovat siirtymä- ja voimasuureet. Näitä kutsutaan solmusuureiksi. Siirtymäsuureita ovat translaatio- eli vaaka- ja pystysiirtymät sekä rotaatio- eli kiertymät. Solmusuureiden määrä riippuu solmun vapausasteista (englanniksi degree of freedom, DoF) ja niiden määrä riippuu käytettävästä laskentamallin mallitilan ulottuvuudesta tai toisin sanoen koordinaatistosta (kuva 4). Esimerkiksi kaksiulotteisessa mallitilassa solmun vapausasteita on kolme ja kolmiulotteisessa mallitilassa kuusi. Translaatio- ja rotaatio- siirtymiä pystytään lukitsemaan, jolloin solmuun muodostuu tuki. Tällaisia ovat esimerkiksi translaatio- siirtymät tukeva, rotaatio- siirtymän salliva nivel- tuki tai kaikki translaatio- ja rotaatio- siirtymät tukeva jäykkä tuki. Solmutukia on havainnollistettu RFEM-ohjelman solmutukityökalulla kuvassa 5. (Lähteenmäki 2009a; Salmi & Kuula 2012, 320.)



KUVA 3. Elementteihin ja solmuihin diskretisoitu laatan laskentamalli (Rombach 2011, 175)



KUVA 4. Mallitilan ulottuvuuden ja koordinaatiston valinta RFEM-ohjelmistossa

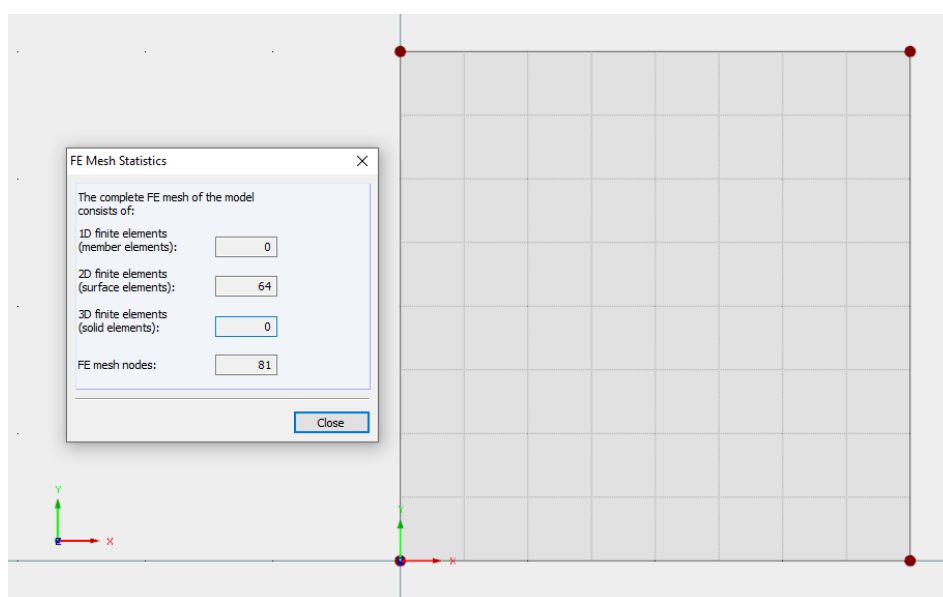


KUVA 5. Kolmiulotteisen mallitilan 6 vapausasteiset tuet, joista vasemmalla rotaatiosiiirtymän x- ja y-akselin ympäri salliva niveltuki ja oikealla kaikki translaatio- ja rotaatiosiiirtymät tukeva jäykkä tuki

Solmusuureiden ratkaisuun on useita ratkaisumenetelmiä, jotka eroavat toisistaan ratkaisujärjestyksen osalta. Ratkaisumenetelmistä tehokkain ja yleisin on siirtymämenetelmä, jossa solmuisiirtymät ratkaistaan ensin. Yksiulotteisille laskentamalleille ratkaisu voidaan tehdä tarkasti, kun taas kaksi- ja kolmiulotteisille laskentamalleille ratkaisu on interpoloinnin kautta saatu likiarvo. (Lähteenmäki 2009a; Salmi & Kuula 2012, 320.)

Laskentamalleissa voi olla suuri määrä solmuja ja elementtejä eli suuri määrä tietoa. Solmuja ja elementtejä joudutaan käsittelemään yksittäin ja kokonaisuutena, mikä laajentaa käsiteltävän tiedon määrää. Elementtimenetelmässä käytetäänkin matriisiesitystä kokonaisuuden hallintaan. Matriisien avulla saadaan lähtötiedot, kuten rakenteen geometria ja mekaaniset ominaisuudet sekä kuormitustiedot esitettyä tiiviisti. Matriisiesityksessä solmusuureet eli siirtymä- ja voimasuureet järjestetään aina pystyvektoreiksi. (Lähteenmäki 2009a, Salmi & Kuula 2012, 320.)

Yksinkertainen ja selkeä merkintätapa matriiseja muodostaessa on tärkeää. Laskentamallissa solmut numeroidaan lokaalisti eli elementin sisäisesti sekä globaalisti eli koko laskentamallissa. Elementtimenetelmän pystyvektorit auki kirjoitettuna voivat viedä hyvin paljon tilaa. Näin ollen ne kirjoitetaan rivinsuuntaisesti tilan säästämiseksi. Pystyvektorit merkitään aaltosulkeisiin erottautuakseen todellisista vaakavektoreista, jotka on merkitty hakasulkeilla. Lisäksi käsiteltäessä solmua tai elementtiä lokaalisti käytetään symboleina pieniä kirjaimia ja vastaavasti globaaleja solmusuureita käsiteltäessä käytetään isoja kirjaimia. Kuvassa 6 on esitetty RFEM-ohjelmistolla luotu kaksiulotteinen laskentamalli, jossa on 4 globaalia solmua ja 81 lokaalia solmua. (Lähteenmäki 2009a.)



KUVA 6. Esimerkki RFEM-ohjelmistolla tehdystä kaksiulotteisesta laskentamallista, jossa on 4 globaalia solmua, 81 lokaalia solmua ja 64 nelisivuelementtiä

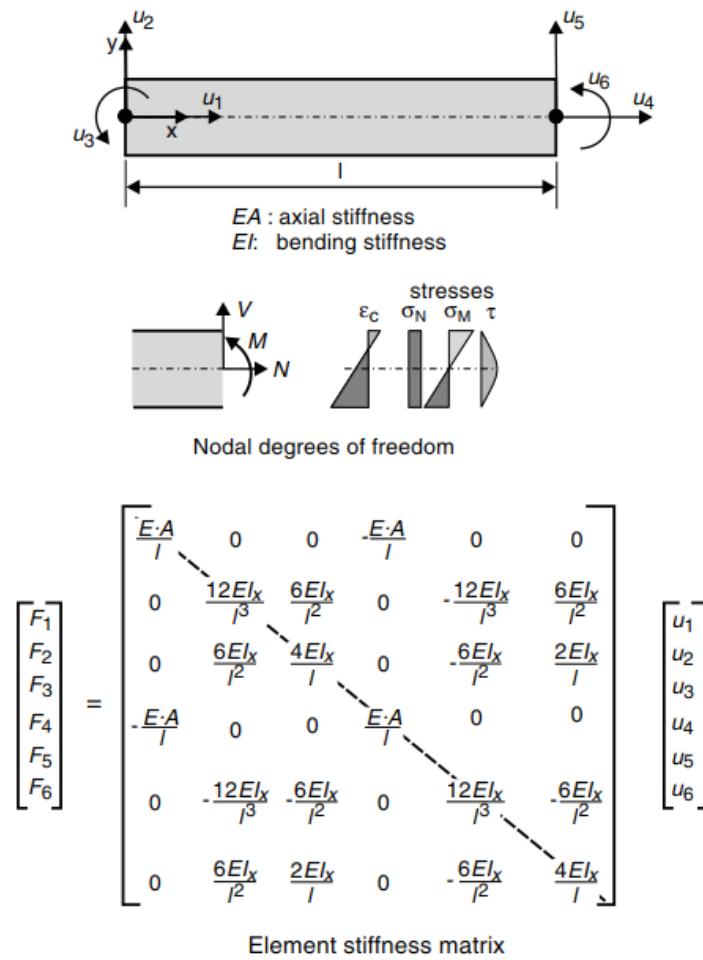


Siirtymämenetelmän mukaisessa ratkaisussa kullekin elementille saadaan solmu siirtymävektorin  $\{u\}^e$  ja solmuvoimavektorin  $\{f\}^e$  välille lineaarinen yhteys, jossa  $[k]^e$  on elementin jäykkyyssmatriisi. Näin saadaan yhtälö (1).

$$\{f\}^e = [k]^e \{u\}^e \quad (1)$$

Yhtälöä (1) kutsutaan elementin perusyhtälöksi, jäykkyyssyhtälöksi sekä tasapainoyhtälöksi. Yläviitteellä  $e$  ilmaistaan elementin numeroa. (Lähteenmäki 2009a, Salmi & Kuula 2012, 324.)

Elementin jäykkyyssmatriisi  $[k]^e$  muodostuu elementin geometrysten ja materiaaliominaisuuksien perusteella. Yksiulotteisilla laskentamalleilla jäykkyyssmatriisi saadaan selville suoraan lujuusopin perusteorian kautta. Menetelmää kutsutaan suoraksi menetelmäksi. Kaksi- ja kolmiulotteisilla laskentamalleilla jäykkyyssmatriisin on käytettävä epäsuoria menetelmiä, jotka perustuvat energiaperiaatteisiin ja virtuaalisen työn periaatteeseen. Kuvassa 7 perusyhtälö ja sen sisältämä jäykkyyssmatriisi on esitetty käytännössä yksiulotteiselle sauvaelementille. (Lähteenmäki 2009a; Salmi & Kuula 2012, 320.)



KUVA 7. Yksiolotteisen, kaksisolmuisen ja kuusivapausasteisen sauvaelementin perusyhtälö, joka sisältää solmusuureet pystyvektoreina ja elementin jäykkyyss-matriisiin (Rombach 2011, 6)

Koko laskentamallin solmusiirtymävektorille  $\{U\}$  ja kokonaiskuormitusvektorille  $\{R\}$  välille saadaan myös vastaavasti lineaarinen yhteys, missä  $[K]$  on kokonais-jäykkyyss-matriisi. Näin saadaan yhtälö (2).

$$\{R\} = [K]\{U\} \quad (2)$$

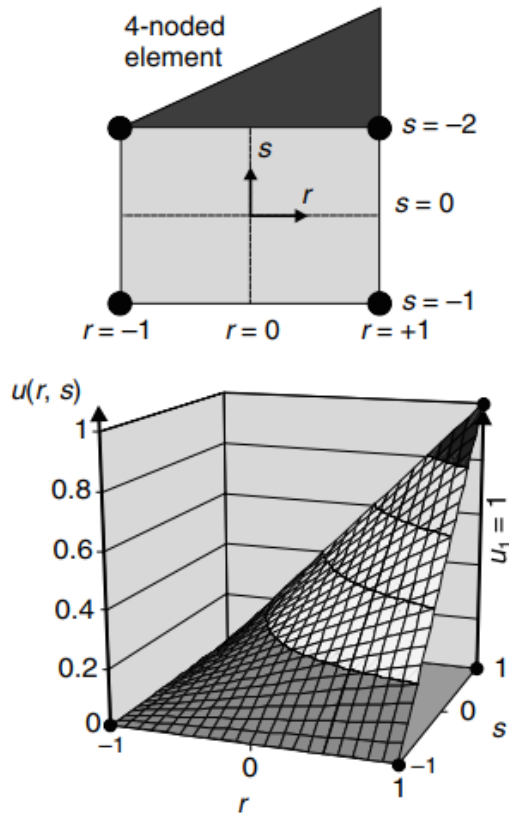
Yhtälöä (2) kutsutaan laskentamallin tai elementtiverkon perusyhtälöksi, jäyk-kyysyhtälöksi sekä tasapainoyhtälöksi. Yhtälössä (2) kokonaiskuormitusvektorille käytetään myös tunnusta  $\{F\}$  samaan tapaan kuin elementin solmuvoimavekto-riin  $\{f\}^e$ . (Lähteenmäki 2009a; Salmi & Kuula 2012, 332.)

Kokonaisjäykkymatriisi  $[K]$  muodostuu yksittäisten elementtien jäykkymatriiseista sijoittelusummauksella yhtälön (3) mukaisesti. Yhtälössä (3)  $M$  on laskentamallin elementtien lukumäärä. (Lähteenmäki 2009a; Salmi & Kuula 2012, 328, 332.)

$$[K] = \sum_{e=1}^M [k]^e \quad (3)$$

Solmusiirtymävektori  $\{U\}$  muodostuu solmu- ja tukisiirtymistä, jotka ovat tuntemattomia. Kokonaiskuormitusvektori  $\{R\}$  muodostuu tukireaktioista sekä tunnetuista solmu- ja elementtikuormista. Elementtikuormalla tarkoitetaan esimerkiksi palkkielementin viivakuormaa tai laattaelementin pintakuormaa. Yksittäisen elementin ja laskentamallin perusyhtälöissä (1) ja (2) kuormien ajatellaan vaikuttavan solmuihin. Näin ollen elementtikuormat otetaan huomioon ekvivalenttisten solmukuormien avulla. (Lähteenmäki 2009a; Rombach 2011, 8; Salmi & Kuula 2012, 332.)

Ekvivalenttisilla solmukuormilla tarkoitetaan solmukuormia, jotka on saatu muuntamalla elementtikuorma tietyn samanarvoisuusperiaatteen avulla solmukuormaksi. Yksiulotteisilla laskentamalleilla periaatteena on, että ekvivalenttiset solmukuormat aiheuttavat laskentamalliin samat solmusiirtymät kuin elementtikuormat. Kaikkiin laskentamalleihin sopiva yleisempi periaate on tarkastella työtä, jonka elementtikuormitus tekee solmusiirtymistä interpoloiduilla siirtymäkentällä. Kuvassa 8 on esitetty kaksiulotteisen ja neljäsolmuisen nelisivuelementin solmusiirtymistä interpoloitu siirtymäkenttä. (Lähteenmäki 2019a.)



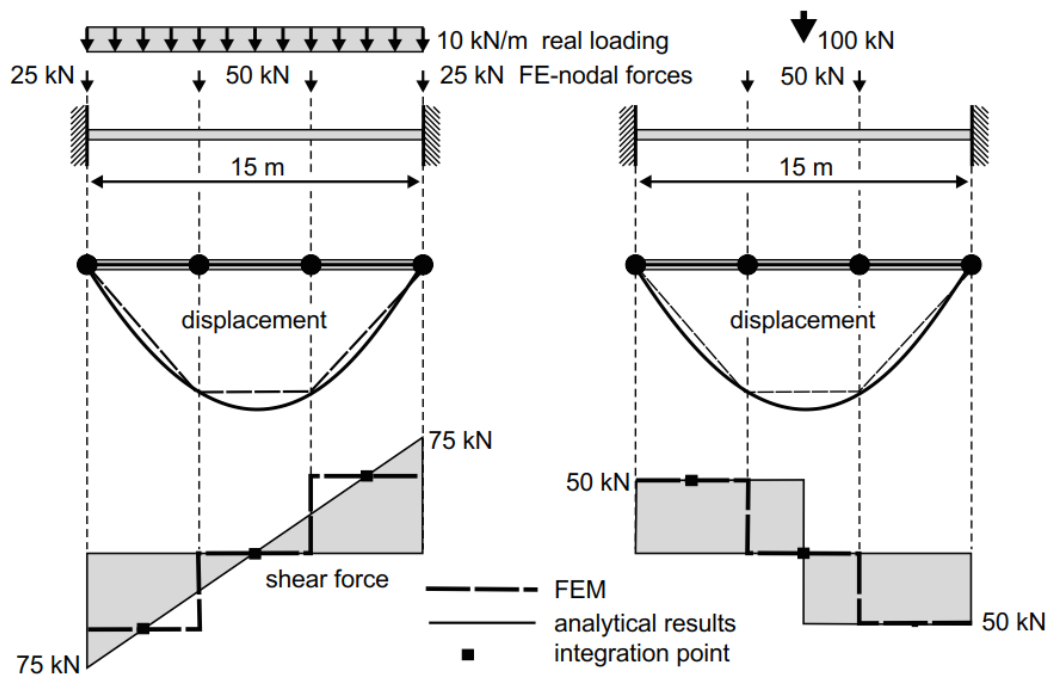
KUVA 8. Kaksiulotteisen ja neljäsolmuisen nelisivuelementin solmusiirtymistä interpoloitu siirtymäkenttä (Rombach 2011, 7)

Elementtikuormien huomioon ottaminen tapahtuu käytännössä niin, että kokonaiskuormitusvektoriin  $\{R\}$  sisältyvän solmukuormitusvektorin  $\{F\}$  tiettyihin alkioihin lisätään elementtikuormien mukaiset termit. Termejä lisätään vain niihin alkioihin, joihin elementtikuormat vaikuttavat. Näin saadaan yhtälö (4), jossa  $\{r^e\}$  on elementin ekvivalenttinen solmukuormitusvektori. (Lähteenmäki 2009a; Salmi & Kuula 2012, 332.)

$$\{R\} = \{F\} + \sum_{e=1}^M \{r^e\} \quad (4)$$

Elementtimenetelmän keskittyessä solmuihin ja solmusuureisiin on ekvivalenttisten solmukuormien muuntamisessa kiinnitettävä huomiota elementtien määrään eli elementtitiheyteen. Elementtitiheys tihentää solmujen määrää ja tarkoittaa ekvivalenttisten solmukuormien muunnosta. Kuvasta 9 nähdään, kuinka element-

timenetelmää hyödyntävä ohjelmisto muodostaa virheellisesti leikkausvoimakuvaaajan molemmista päistään jäykästi tuetulle yksiaukkoiselle palkille. Palkin yksiuotteinen laskentamalli koostuu kolmesta sauvaelementistä ja neljästä solmusta. Palkkielementin alueella vaikuttava tasainen kuorma ja pistekuorma on jaettu solmukuormaksi, jossa molemmissa tapauksissa keskimmäisen palkkielementin päätysolmuihin saadaan solmukuormaksi 50 kN. Näin ollen molempien laskentamallien leikkausvoimakuvajaajat ovat virheelliset. (Rombach 2011, 8-9.)



KUVA 9. Karkean elementtitiheyden myötä virheellinen ekvivalenttisten solmukuormien muunnos, elementtimenetelmän muodostama virheellinen leikkausvoimakuvajaaja katkoviivalla ja analyytinen oikea leikkausvoimakuvajaaja harmaalla rasterilla (Rombach 2011, 8-9)

## 2.2 Elementtimenetelmä käytännössä

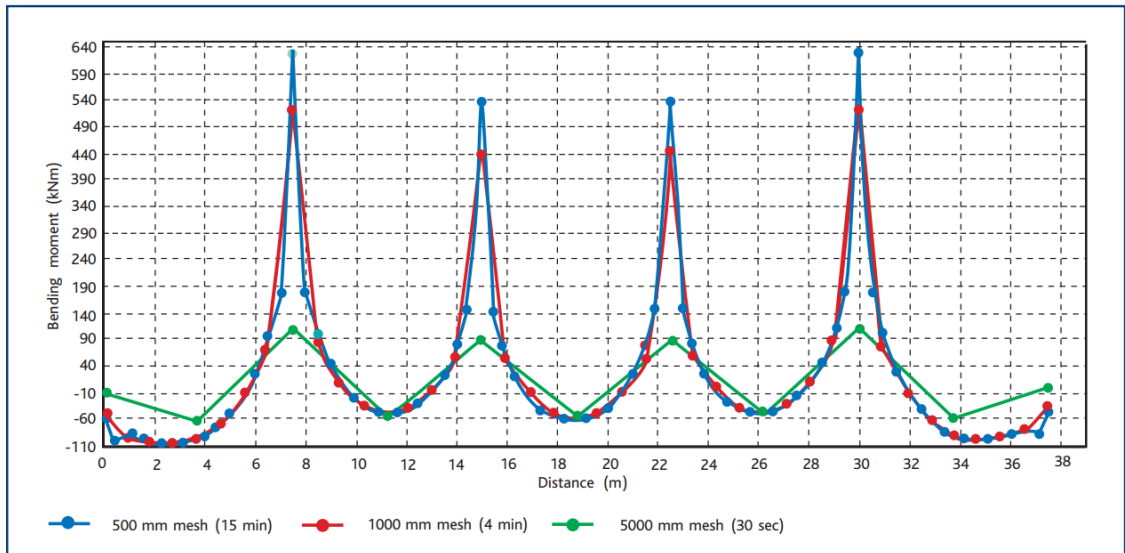
Elementtimenetelmä toimii käytännössä sitä hyödyntävien ohjelmistojen taustalla. Rakennesuunnittelijan on hyvä tuntea elementtimenetelmän perusteet ja tiedostaa sen yksinkertaistukset ja olettamukset. FEM-rakenneanalyyssissa käsiteltävää ongelmaa eli rakennetta yksinkertaistetaan jo lähtökohtaisesti esimer-

kiksi geometrian suhteen. Tämän jälkeen käsiteltävää rakennetta yksinkertaistetaan FEM-ohjelmiston sisällä jakamalla rakenneosat elementteihin. Analyysista saatavat tulokset ovat tarkkoja vain yksiulotteisilla laskentamalleilla ja likiarvoja kaksi- ja kolmiulotteisilla laskentamalleilla. Karkeilla elementtitiheyksillä, väärillä analyysityypin valinnoilla, väärillä mallinnustavoilla sekä materiaaliominaisuuksien huomiotta jättämisellä voidaan saada vääriä tuloksia.

### **2.2.1 Elementtitiheys**

Tietokoneiden ja laskentatehon kehittymisen myötä elementtien määrä voi olla lähes rajoittamaton. Suuren elementtitiheyden myötä laskenta-aika kuitenkin kasvaa, mikä ei ole käytännön työskentelyn kannalta tehokasta. RFEM-ohjelmiston oletusasetuksena laskentamallin solmujen määrä on rajoitettu 500 000 solmuun, mutta tätä käyttäjä voi halutessaan kasvattaa. RFEM-ohjelmistossa käyttäjä voi valita elementtien koon ja mahdollisesti tihentää elementtien määrää paikallisesti. (Rombach 2011, 180-181; RFEM 2016, 9.)

Elementtitiheyden ja oikean elementtiverkotuksen luominen on laskentamallin luonnin kannalta oleellista. Liian pienellä elementtitiheydellä eli toisin sanoen karkealla laskentamallilla voidaan saada virheellisiä tuloksia. Tämä selviää kuvasta 10, jossa on saman käsiteltävän rakenteen taivutusmomenttikuvaajat 500 mm, 1000 mm ja 5000 mm elementtiverkon silmäkoolla. Tuloksista huomataan, että karkealla elementtitiheydellä laskenta-aika on vain 30 sekuntia, kun taas tiheyden kasvaessa laskenta-aika on 15 minuuttia. Kuvan 10 tuloksista huomataan karkean elementtitiheyden antama virheellinen tulos. (Brooker 2006, 8; Rombach 2011, 180.)



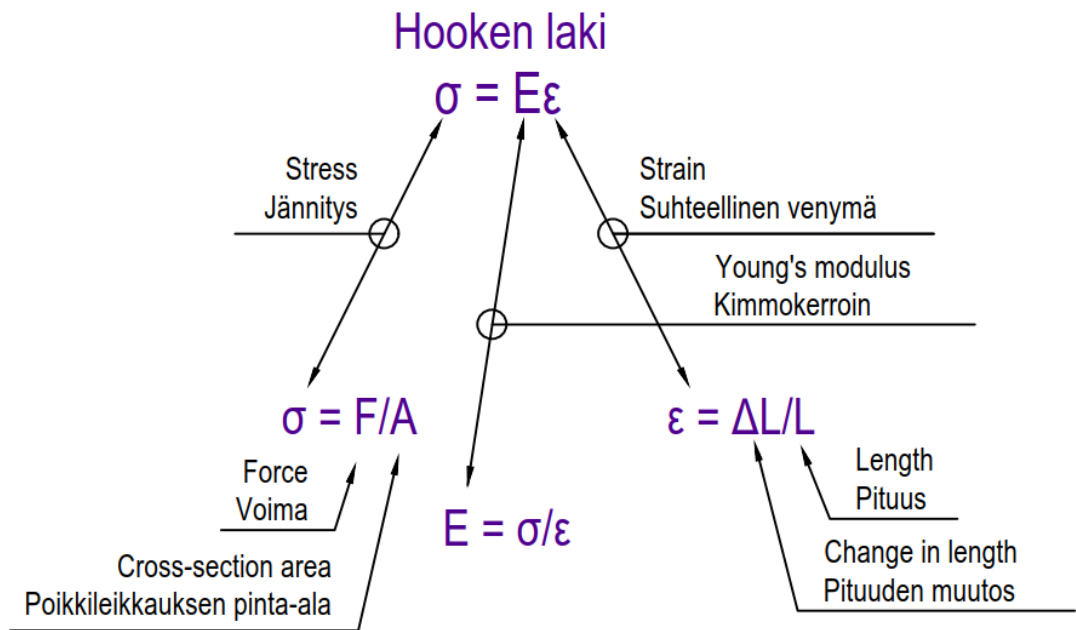
KUVA 10. Taivutusmomentti- ja leikkausvoimakuvajien eroavaisuudet eri elementtitiheyksillä, mistä huomataan 5000 mm elementin silmäkoon virheellinen tulos (Brooker 2006, 8)

Elementtitiheyden ja elementtiverkon muodostamiseen ei ole olemassa yksiselitteistä ohjetta. Laskentamallin muodostaminen, ongelman diskretisointi ja elementtitiheyden arvioiminen ovat suunnittelijan päätettävissä. Käytännössä rakennesuunnittelija pyrkii löytämään tehokkaan suhteen laskentatulosten tarkkuuden ja laskenta-ajan välillä. RFEM-ohjelmiston manuaalin yleisohje elementtien vähimmäismäärään on vähintään 8-10 elementtiä tai 1000 mm tukivälille, riippuen siitä kumpi on pienempi. On kuitenkin huomattava, että tämä on vähimmäismäärä. Käytännössä elementtitiheyden on suositeltava olla tiheämpi. (Brooker 2006, 8; RFEM 2016, 284.)

## 2.2.2 Analyysityypit

Elementtimenetelmän yleisimmän ja tehokkaimman ratkaisumenetelmän eli siirtymämenetelmän kautta siirtymät ratkaistaan ensin. Siirtymät aiheuttavat venymiä, venymät aiheuttavat jännityksiä ja jännitysten perusteella voidaan muodostaa muita voimasuureita, kuten normaali- ja leikkausvoima sekä taivutusmomentti. Yleensä käytännön elementtimenetelmän sovelluksissa materiaalin oletetaan käyttäytyvän lineaarisesti elastisesti eli kimmoisesti. Tämä tarkoittaa, että

jännitys-venymä-yhteys on lineaarinen eli materiaali noudattaa yleistettyä Hooke'n lakia (kuva 11). Materiaalia kuvaavasta jännitys-venymä-yhteydestä käytetään myös nimitystä materiaalimalli, joka kuvastaa matemaattisesti materiaalin käyttäytymistä. (Rombach 2011, 3, 181.)



KUVA 11. Hooken laki sekä yleisimmät lujuusopin teorian mukaiset yhtälöt

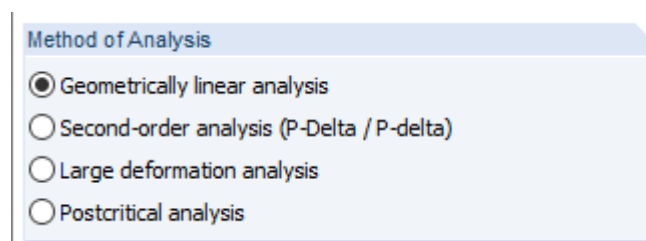
Elementtimenetelmäohjelmistojen analysointityypit jaetaan staattiseen ja dynaamiseen analyysiin. Staattinen analyysi on yleisin analysointityyppi, missä kuormitusten, siirtymien ja jännitysten oletetaan tapahtuvan ajasta riippumattomina. Dynaamisessa analyysissä taas ajasta riippuvina. Nämä molemmat analyysit voidaan tehdä lineaarisesti tai epälineaaraisesti. Lineaarisisessa analyysissä materiaalin oletetaan käyttäytyvän lineaarisesti elastisesti sekä muodonmuutosten olevan pieniä ja palautuvia. (Lähteenmäki 2009a.)

Epälinearisessa analyysissä joko materiaali, geometria tai reunaehdot voivat olla epälineaarisia. Materiaalin epälinearisuus tarkoittaa sitä, että materiaali ei enää käyttäydy lineaarisesti elastisesti, eli jännityksen ja venymän suhde ei ole enää suoraviivainen. Muodonmuutosten oletetaan olevan suuria ja palautumattomia. Palautumattomat muodonmuutokset eli rakenteen deformoitunut tila ai-



heuttaa geometrista epälineaarisuutta. Deformoituneessa tilassa kuormien sijainnit ja vaikutussuunnat muuttuvat. Reunaehtojen eli tukien epälineaarisuudella tarkoitetaan sitä, että tuen toiminta riippuu kuormituksen suuruudesta tai suunnasta. Tällaisia ovat esimerkiksi rakenteen nousemisen salliva tuki tai epälineaarinen jousi. (Lähteenmäki 2009a.)

Epälineaarisisessa staattisessa analyysissä käytetään kuormituksen askellusta eli iterointia, jolla laskentamallin tasapainotila pyritään löytämään. Lineaariseen staattiseen analyysiin verrattuna tämä vie moninkertaisen määrän aikaa. RFEM-ohjelmiston analyysityypit on esitetty kuvassa 12. (Lähteenmäki 2009a.)



KUVA 12. RFEM ohjelmistossa analyysityyppejä on neljä: geometrisesti lineaarinen analyysi, toisen kertaluvun analyysi, suurten muodonmuutosten analyysi ja postkriittinen analyysi (RFEM 2016, 290-291)

Geometrisesti lineaarisella analyysillä tarkoitetaan lineaarisesti staattista analyysiä. Toisen kertaluvun analyysillä tarkoitetaan epälineaarista staattista analyysiä, jossa pyritään määrittämään tasapainotila muodonmuutosten jälkeen. Toisen kertaluvun analyysissä muodonmuutosten oletetaan olevan pieniä. Nämä kaksi muodostavat talorakenteiden tyypillisimmät analyysityypit. Suurten muodonmuutosten analyysissä muodonmuutosten oletetaan olevan suuria verrattuna toisen kertaluvun analyysiin. Käytännössä suurten muodonmuutosten analyysia käytetään esimerkiksi kalvorakenteissa. (RFEM 2016, 290-291.)

### 2.2.3 Mallinnusperiaatteet

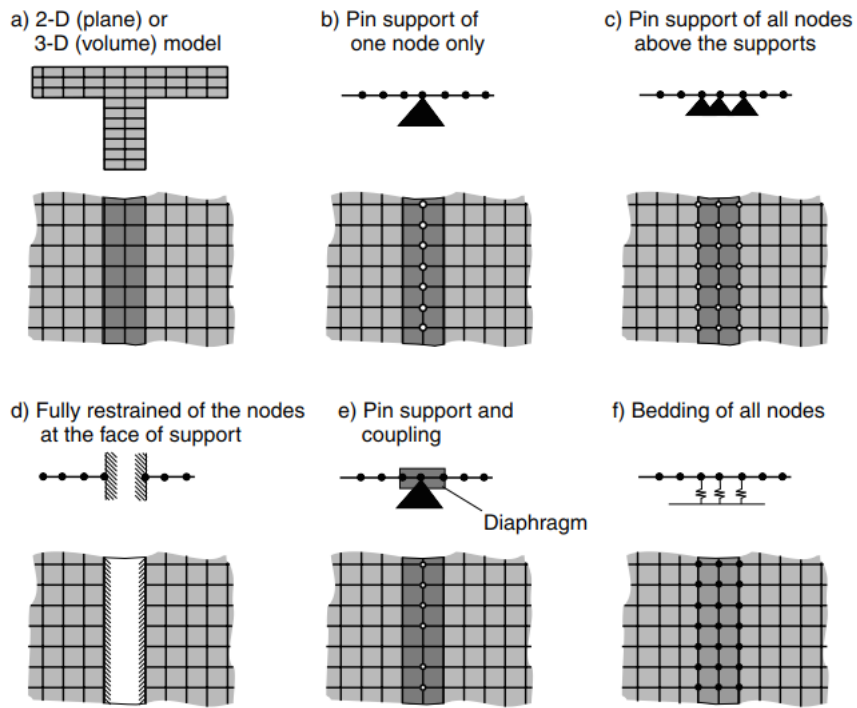
Elementtimenetelmässä oikeat mallinnustavat ja periaatteet ovat tärkeitä. Tyypillisesti FEM-rakenneanalyysissä laskentamalli luodaan rakenneosien keskilinjoja mukaillen, esimerkiksi laatan keskilinjan ja pilareiden keskilinjojen mukaisesti. Geometrian ja kuormitusten mallintaminen on helpottunut nykyisten FEM-ohjelmistojen mallinnustyökalujen ansiosta. Näitä työkaluja ja laatan laskentamallin muodostamista käsitellään tarkemmin luvuissa 5.1 ja 5.2.

Geometrian ja kuormitusten mallintamista oleellisempaa voidaan pitää tukien mallintamista. Tukien mallintamisessa voidaan tehdä perustavanlaatuisia virheitä ja esimerkiksi laattojen tapauksessa mallinnustapoja on useita, jotka vaikuttavat saatuihin tuloksiin kuten siirtymiin, venymiin ja jännitys- sekä voimasuurejakaumiin. Näistä mallinnustavoista osa on virheellisiä ja antavat vääriä tuloksia. (Rombach 2011, 11.)

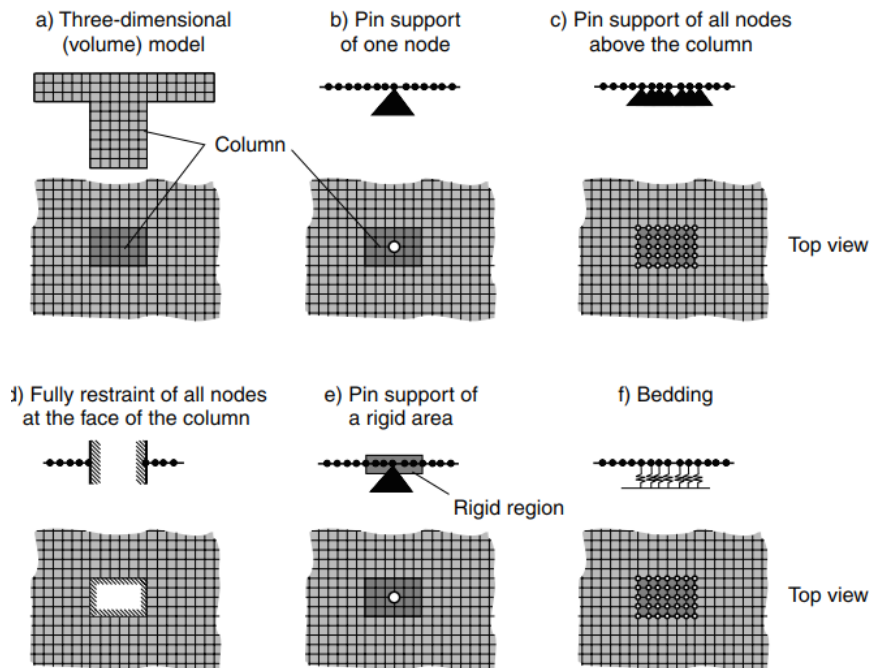
Laattamallien tuentatavoissa voidaan käyttää viivamaisia ja pistemäisiä tukia, riippuen analysoidavan rakenteen tuentatavasta. Molemmat tuet voidaan mallintaa kuudella eri tavalla, jotka on esitetty kuvissa 13 ja 14. Näistä tavoista ensimmäinen soveltuu vain kolmiulotteisiin laskentamalleihin, kun taas muut tavat soveltuvat niin kaksi- kuin kolmiulotteisiin laskentamalleihin. Mallinnustavat ovat:

- Tuen eli seinän tai pilarin mallintaminen kolmiulotteisena
- Tuen mallintaminen pistemäisen solmutukena
- Tuen mallintaminen useamman solmun tukena
- Tuen mallintaminen sen ulkopintojen mukaan solmuun jäykkänä
- Tuen mallintaminen äärimmäisen jäykän palkkielementin ja solmutuen yhdistelmänä
- Tuen mallintaminen joustavana useamman solmun tukena

(Rombach 2011, 186-187.)



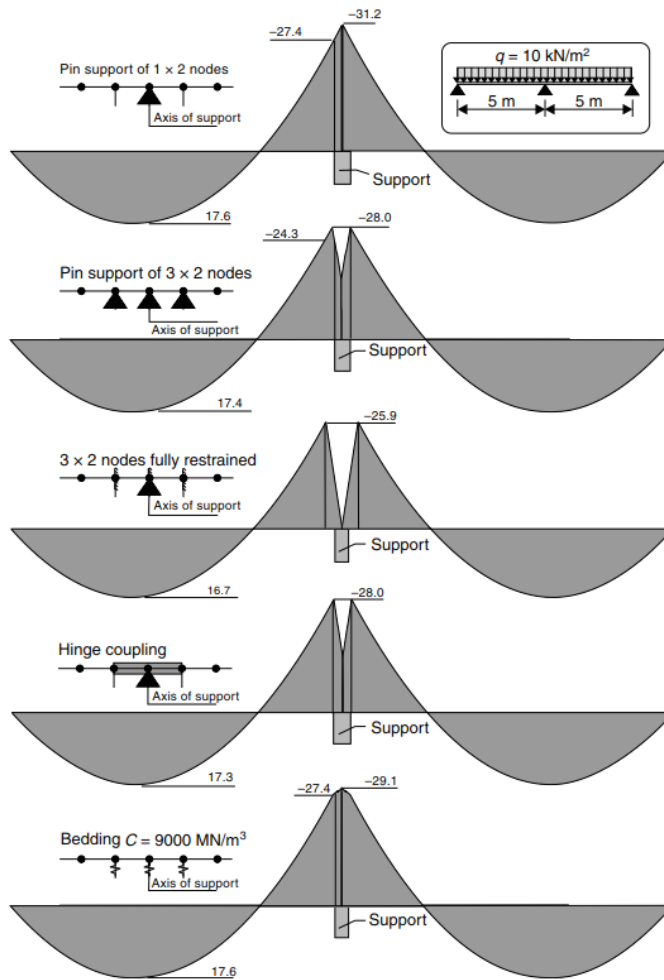
KUVA 13. 6 eri tapaa mallintaa viivamainen tuki (Rombach 2011, 187)



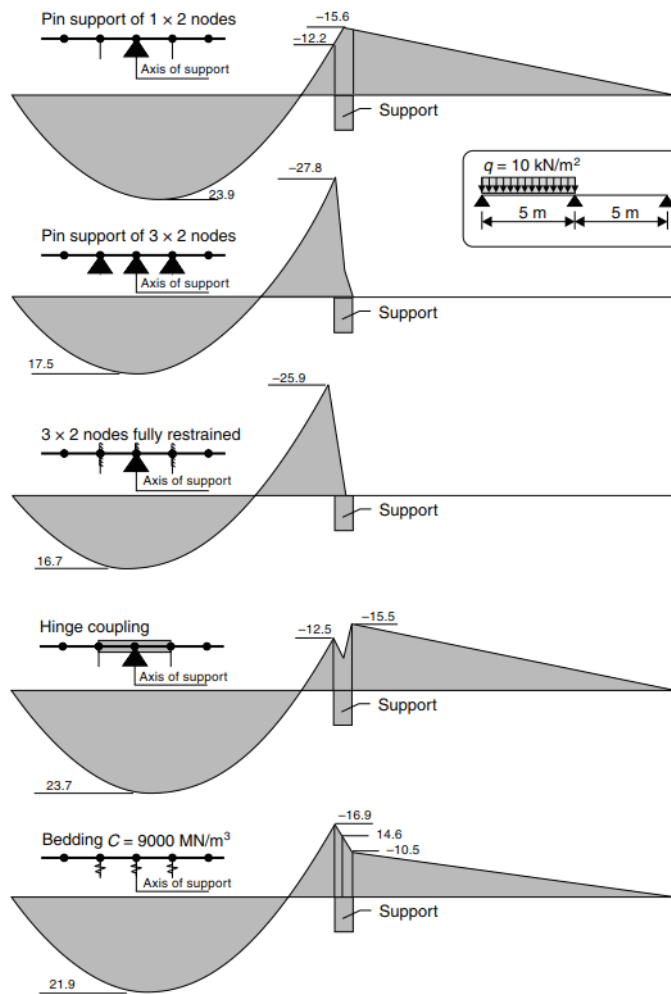
KUVA 14. 6 eri tapaa mallintaa pistemäinen tuki (Rombach 2011, 209)

Tukien mallinnustavoilla on vaikutuksia saataviin tuloksiin, joita on havainnollistettu kuvissa 15, 16, 17 ja 18. Kuvissa 17 ja 18 on esitetty kahden eri kuormitus-tapauksen mukaiset taivutusmomenttikuvaajat viidellä eri tuen mallinnustavalla

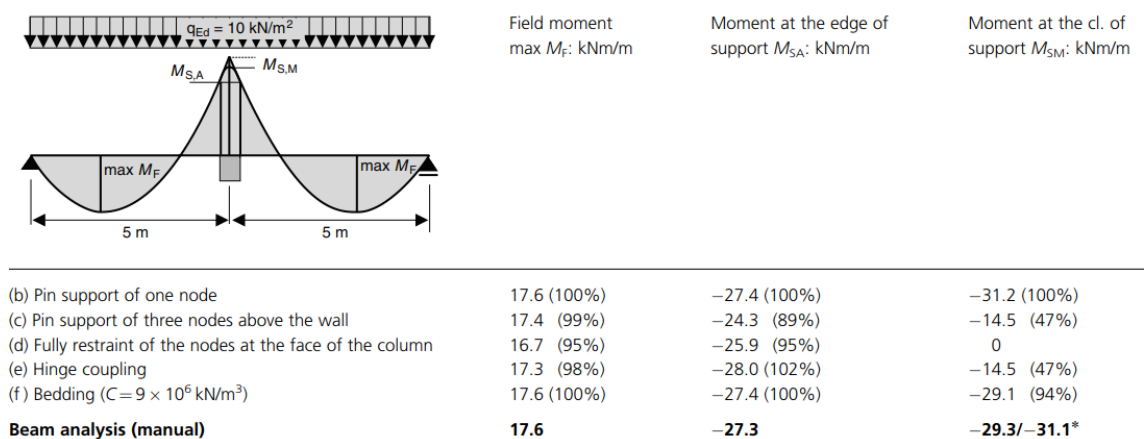
tehtynä. Laskentamalli on muodostettu kaksiulotteisena, joten ensimmäisenä mainittua kolmiulotteista tuen mallinnustapaa ei käytetä. Kuvissa 18 ja 19 tulokset on koostettu yhteenvedoksi ja vertailtu niitä käsin laskettuihin voimasuureisiin.



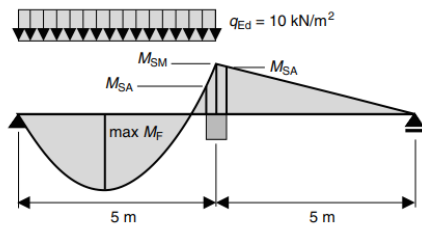
KUVA 15. Taivutusmomenttikuvaajat 5 eri tuen mallinnustavalla tasaisen kuormituksen kohdistuessa molempiin jänneväleihin (Rombach 2011, 188)



KUVA 16. Taivutusmomenttikuvaajat 5 eri tuen mallinnustavalla tasaisen kuormituksen kohdistuessa vain yhteen jänneväliin (Rombach 2011, 188)



KUVA 17. Taivutusmomenttien vertailu tasaisen kuorman kohdistuessa molempiin jänneväleihin (Rombach 2011, 190)



Field moment  
max  $M_F$ : kNm/m

Moment at the edge of  
support  $M_{SA}$ : kNm/m

Moment at the cl. of  
support  $M_{SM}$ : kNm/m

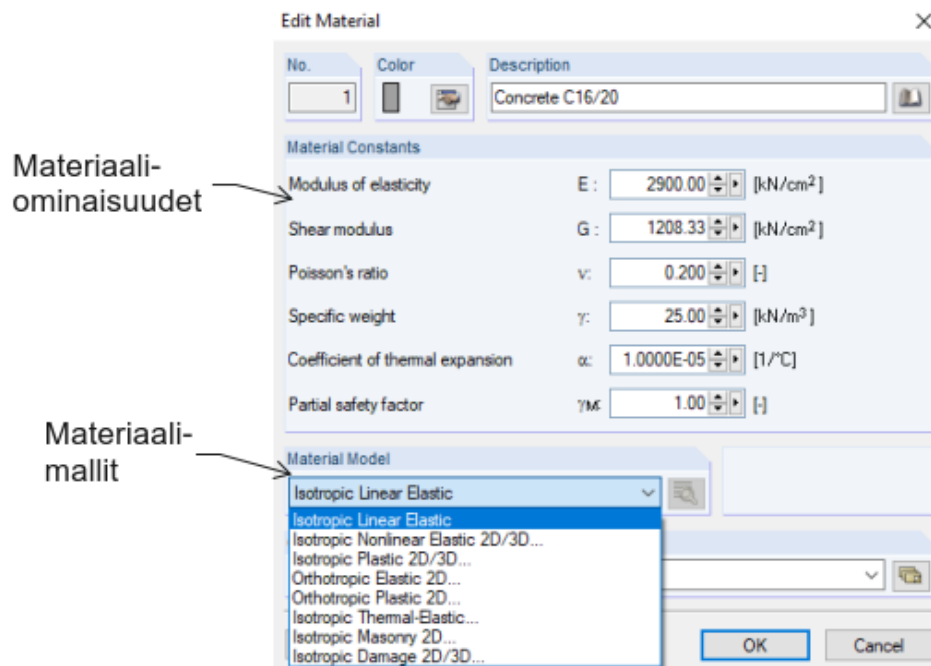
(b) Pin support of one node	23.9 (100%)	-12.2/-15.2 (99/99%)	-15.6 (99%)
(c) Pin support of three nodes above the wall	17.5 (73%)	-27.8/0 (226/-%)	-7.5 (48%)
(d) Fully restraint of the nodes at the face of the column	16.7 (70%)	-25.9/0 (211/-%)	0
(e) Hinge coupling	23.7 (99%)	-12.5/-15.5 (101/101%)	-14.5 (92%)
(f) Bedding ( $C = 9 \times 10^6$ kN/m <sup>3</sup> )	21.9 (91%)	-16.9/-10.5 (137/68%)	-14.6 (92%)
<b>Beam analysis (manual)</b>	<b>24.0</b>	<b>-12.3/-15.4*</b>	<b>-15.8</b>

KUVA 18. Taivutusmomenttien vertailu tasaisen kuorman kohdistuessa vain toiseen jänneväliin (Rombach 2011, 191)

Tuloksista huomataan, että pistemäinen solmutuki on mallinnustavoista oikeellisin sen vastatessa lähes täsmällisesti käsin laskettuja voimasuureita. Näin ollen pistemäinen tuen mallinnustapa on suositeltava mallinnustapa. Pistemäiseksi tueksi voidaan myös mallintaa tukevaa rakennetta kuvaava sauva tai levy, jolle syötettyjen materiaaliominaisuuksien ja geometrian kautta saadaan paremmin todellisuutta kuvaava tuki. (Rombach 2011, 187-222.)

## 2.2.4 Materiaaliominaisuudet

FEM-rakenneanalyysissä tarkasteltavasta materiaalista tarvittavat materiaaliominaisuudet ovat kimmokerroin  $E$ , liukumoduuli  $G$ , Poissonin vakio  $\nu$ , tilavuuspaino  $\gamma$ , sekä lämpötilakerroin  $\alpha$ . Kuvassa 19 on esitetty RFEM-ohjelmiston materiaali-asetustyökalu.

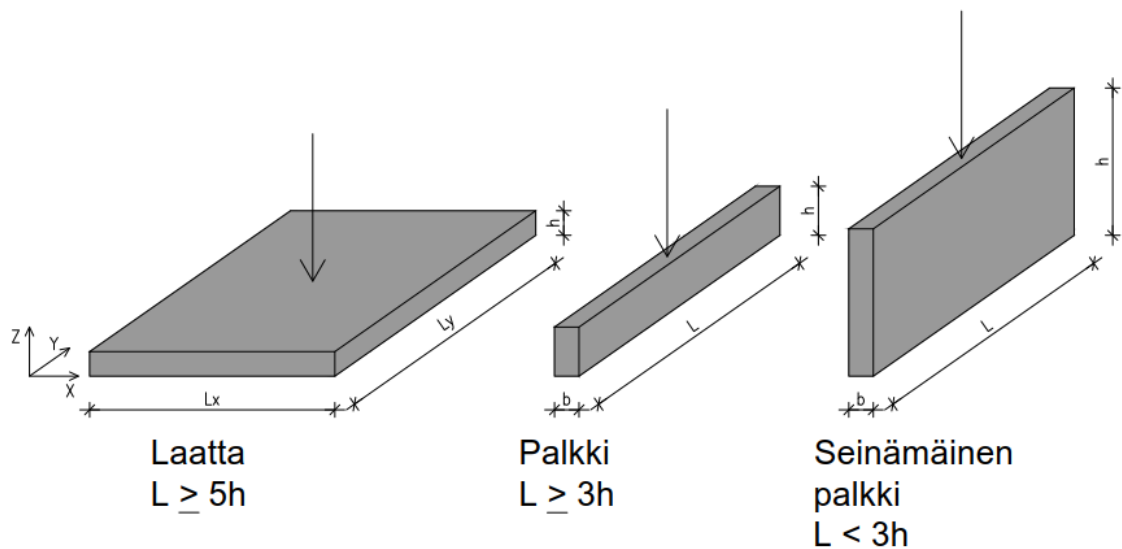


KUVA 19. RFEM-ohjelmiston materiaaliasetukset, jossa esitetty vakiot sekä materiaalimallin valinta

Edellä mainittujen materiaaliominaisuuksien lisäksi, kuvasta 19 huomataan myös materiaalin osavarmuusluku  $\gamma_M$ . Materiaalin osavarmuuslukua ei kuitenkaan tyypillisesti tarvita, mikäli elementtimenetelmällä pyritään selvittämään rakenneosan siirtymiä, venymiä, jännityksiä ja voimasuureita. Osavarmuuslukua käytetään rakenneosan mitoituksessa, joka on rajattu pois tästä työstä. Betonin ja betoniterästen materiaaliominaisuuksia käsitellään tarkemmin luvussa 4. (RFEM 2016, 61.)

### 3 LAATTATEORIAT

Laatta on tasomainen rakenne, jonka sivumitat  $x$ - ja  $y$ -suunnassa ovat suuremmat kuin laatan paksuus  $h$ ,  $z$ -suunnassa. Tämän takia laatat voidaan usein yksinkertaistaa kaksiulotteisiksi malleiksi, joissa kuormitus kohdistuu pääsääntöisesti kohtisuoraan pöytätaaso eli keskitasoa vastaan. Kuvassa 20 on esitetty Eurokoodin eri rakenneosien määritelmät, joissa rakenneosa luokitellaan laataksi, kun lyhin sivumitta on 5 kertaa suurempi kuin laatan paksuus. (Luntta 2009, 2; Nykyri 2015, 9.)



KUVA 20. Eurokoodin mukainen eri rakenneosien määrittely (SFS-EN 1992-1-1 + A1 + AC 2015, 57)

Laattojen kaksiulotteisten mallien käyttäytymistä kuvataan laattateorioin, joista tässä työssä käsitellään Kirchhoff laattateoria ja Reissner-Mindlin laattateoria. Laattateoriat eroavat siirtymälausekkeiden osalta, joten luvun aluksi käsitellään yleisesti muodonmuutostilaa ja kinemaattisia yhteyksiä. Lopuksi käsitellään laattateorioiden vaikutusta käytännössä havainnollistavien esimerkeihin.



### 3.1 Muodonmuutostila

Kaikille lineaarisesti elastisille eli kimmoisille materiaaleille siirtymä-venymäyhteydet eli kinemaattiset yhteydet voidaan muodostaa seuraavasti (Cook 1995, 147; Blaauwendraad 2010, 61.)

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (5)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (6)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (7)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (8)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (9)$$

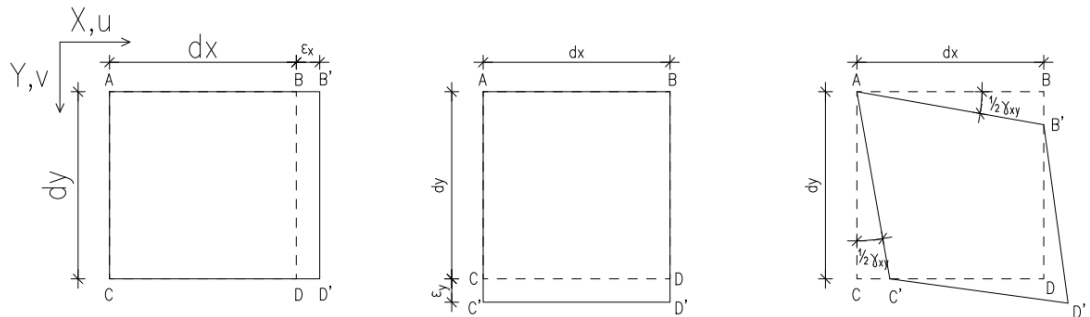
$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (10)$$

missä

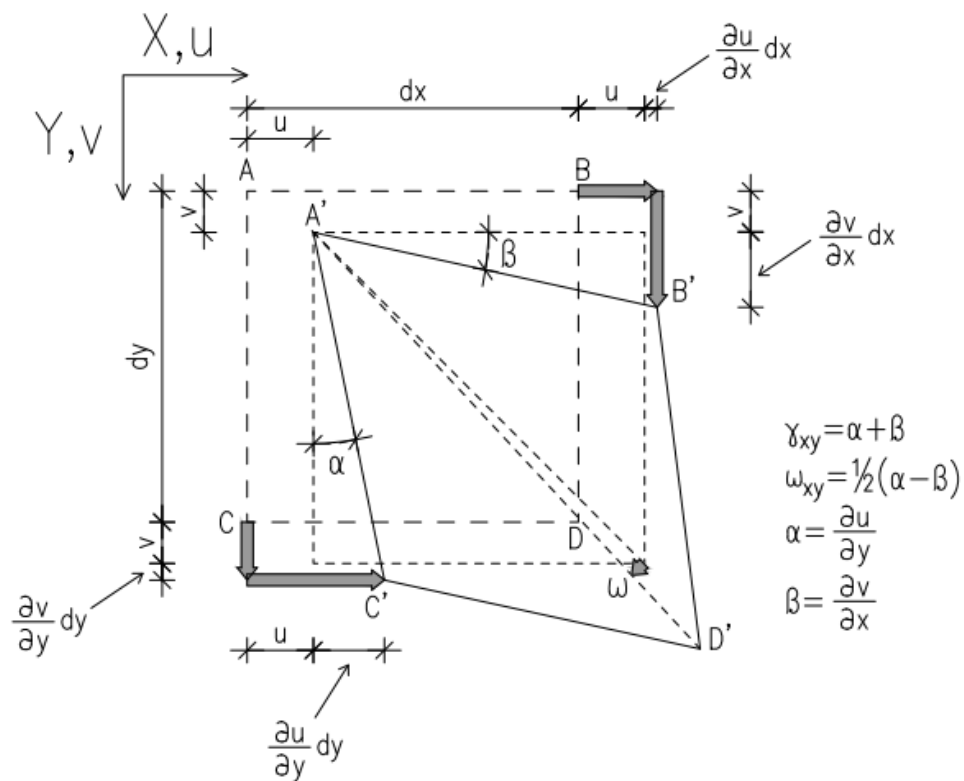
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	ovat venymät x-, y- ja z-suunnassa
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}$ ja $\gamma_{yz}$	ovat liukumät xy-, xz ja yz- tasossa
$u$	on siirtymä x-suunnassa
$v$	on siirtymä y-suunnassa
$w$	on siirtymä z-suunnassa

Usein venymää z-suunnassa eli  $\varepsilon_z$  ei esitetä tässä yhteydessä, sillä se ei ole merkitsevä laattateorioissa. Muodonmuutoksia on havainnollistettu kuvassa 21, jossa xy-tasossa esitetyssä kappaleessa tapahtuu venymät x- ja y-akselin suuntaisesti

sekä liukuma xy-tasossa. Kuvassa 22 on esitetty yksittäisistä muodonmuutoksista muodostuva kokonaisuus. (Cook 1996, 147; Blaauwendraad 2010, 61.)

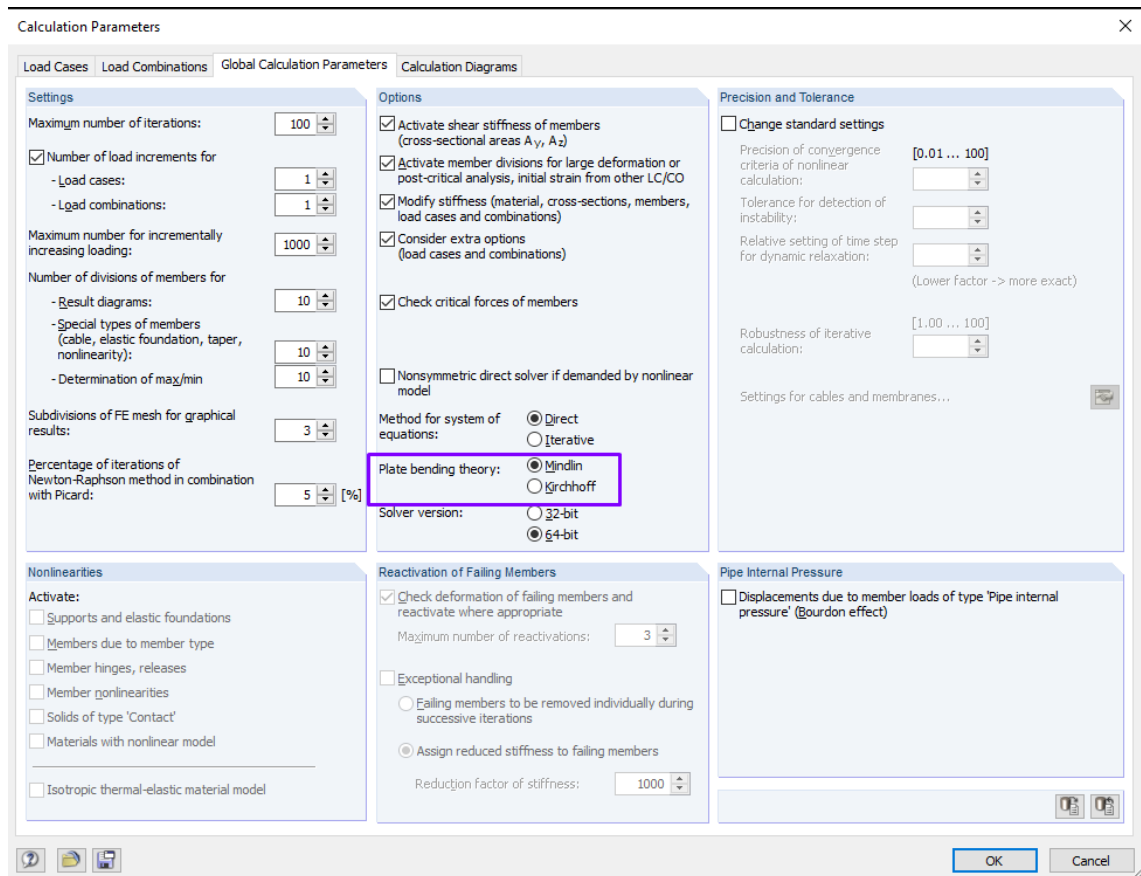


KUVA 21. Kolme esimerkkiä muodonmuutoksista, venymät x- ja y-suunnassa sekä liukuma xy-tasossa (Blaauwendraad 2010, 10, muokattu)



KUVA 22. Laatan muodonmuutostila rasituksessa. Pisteitä ennen rasitusta merkitty kirjaimilla A, B, C, D ja rasituksen jälkeen muodonmuutostilassa kirjaimilla A', B', C', D' (Blaauwendraad 2010, 11, muokattu)

Venymä-siirtymäyhteyksien oletusten pohjalta on kehitetty erilaisia laattateorioita. Näistä laattateorioista yleisimmät ovat Reissner-Mindlin laattateoria ja Kirchhoff laattateoria. Molemmissa teorioissa normaalijännitys paksuuden suunnassa eli z-suunnassa oletetaan nolaksi ja materiaalin oletetaan käyttäytyvän lineaarisesti elastisesti. Useissa kaupallisissa elementtimenetelmää hyödyntävissä ohjelmistoissa käytettävän laattateorian voi valita. RFEM-ohjelmiston laskentaparametrit on esitetty kuvassa 23. Oletusasetuksena laattateorian valinnalle on Reissner-Mindlin laattateoria. (Luntta 2009, 2; Lähtenmäki 2009b.)



KUVA 23. Käytettävän laattateorian valinta RFEM-ohjelmiston laskentaparametreissa

### 3.2 Kirchhoff laattateoria

Kirchhoff laattateoriasta käytetään myös nimitystä ohuen laatan teoria tai klassinen laattateoria. Tämä teoria vastaa Euler-Bernoullin palkkiteoriaa ja on sen kaksiulotteinen yleistys. Kirchhoff laattateoria ei ota huomioon leikkausmuodonmuutosta poikkileikkauksessa. (Cook 1995, 171-172; Luntta 2009, 3; Lähteenmäki 2009b, Lehtonen 2013, 9.)

Kirchhoff laattateoria perustuu seuraaviin oletuksiin

- laatan keskipinta on neutraalipinta
- laatan keskipinta siirtyy vain pystysuunnassa, näin ollen  $u$  ja  $v$  ovat nollia
- keskipinnan normaalin venymistä ei oteta huomioon, näin ollen  $\varepsilon_z$  on nolla
- keskipinnan normaali säilyy suorana ja kohtisuoraan neutraalipintaan nähden muodonmuutoksen aikana, näin ollen laatan ylä- ja alapinta seuraavat neutraalipintaa ja laatan paksuus ei muutu
- leikkausmuodonmuutosta ei tapahdu

(Lähteenmäki 2009b, Luntta 2009, 3; Oñate 2013, 235.)

Olettamusten perusteella voidaan siirtymille muodostaa seuraavat lausekkeet, joita on havainnollistettu kuvassa 24 (Blaauwendraad 2010, 81.)

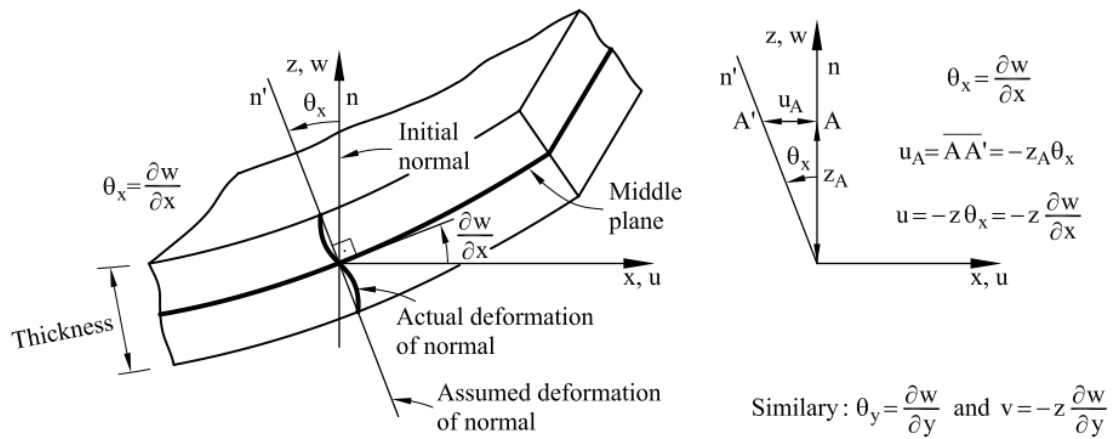
$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (11)$$

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (12)$$

missä

$u$  on siirtymä x-suunnassa

$v$  on siirtymä y-suunnassa



KUVA 24. Siirtymälausekkeiden muodostuminen Kirchhoff laattateorian mukaisesti ohuella laattalla, olennaista on, että keskipinnan normaali ei kierry (Oñate 2013, 236)

Sijoittamalla siirtymälausekkeet aiemmin esitettyihin siirtymä-venymäyhteyksiin saadaan Kirchhoff laattateorian mukaisiksi siirtymä-venymäyhteyksiksi (Cook 1995, 171-172; Blaauwendraad 2010, 82; Oñate 2013, 237.)

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (13)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (14)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (15)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (16)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (17)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (18)$$

Kirchhoff laattateoriaa voidaan soveltaa laattoihin, joiden jännevälin ja laatan paksuuden suhde on suurempi tai yhtä suuri kuin 5. Esimerkiksi 10 m jännevälillä 2000 mm paksuinen laatta voitaisiin luokitella vielä ohueksi laataksi. (Lähteenmäki 2009b; Blaauwendraad 2010, 82.)

### 3.3 Reissner-Mindlin laattateoria

Reissner-Mindlin laattateoria vastaa Timoshenkon palkkiteoriaa ja on siitä kaksiulotteinen yleistys. Reissner-Mindlin laattateoria ottaa huomioon leikkausmuodonmuutoksen poikkileikkauksessa. Reissner-Mindlin laattateoria perustuu seuraaviin olettamuksiin

- laatan keskipinta on neutraalipinta
- keskipinnan normaalin venymistä ei oteta huomioon, näin ollen  $\varepsilon_z$  on nolla
- keskipinnan normaali säilyy suorana, mutta ei kohtisuoraan neutraalipintaan nähden muodonmuutoksen aikana, taivutus aiheuttaa keskipinnan normaaliin kiertymää
- leikkausmuodonmuutos tapahtuu

(Luntta 2009, 3; Oñate 2013, 292-293.)

Olettamusten perusteella voidaan siirtymille muodostaa seuraavat lausekkeet, joita on havainnollistettu kuvassa 25 (Blaauwendraad 2010, 81.)

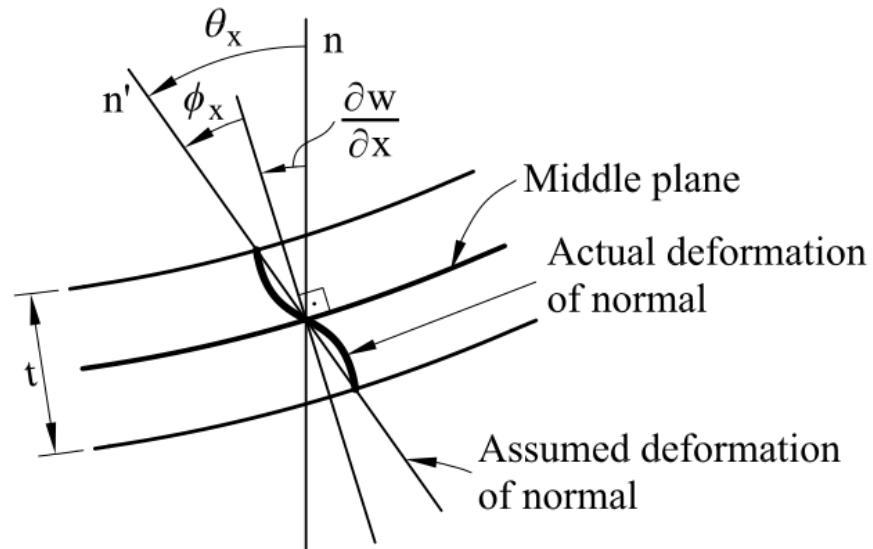
$$u = -z\theta_x \quad (19)$$

$$v = -z\theta_y \quad (20)$$

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial x} + \Phi_x \quad (21)$$

$$\theta_y = \frac{\partial w}{\partial y} + \Phi_y \quad (22)$$

$$\text{Plane } xz: \theta_x = \frac{\partial w}{\partial x} + \phi_x$$



$$(\text{Plane } yz: \theta_y = \frac{\partial w}{\partial y} + \phi_y)$$

KUVA 25. Siirtymäausekkeiden muodostuminen Reissner-Mindlin laattateorian mukaisesti paksulla laamalla, olennaista on, että keskipinnan normaali kiertyy (Oñate 2013, 292)

Sijoittamalla siirtymäausekkeet aiemmin esitettyihin siirtymä-venymäyhteyksiin saadaan Reissner-Mindlin laattateorian mukaisiksi siirtymä-venymäyhteyksiksi (Cook 1995, 173; Blaauwendraad 2010, 62; Oñate 2013, 294.)

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \quad (23)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \quad (24)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (25)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -z \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \quad (26)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \quad (27)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \quad (28)$$

Reissner-Mindlin laattateoriaa voidaan soveltaa laattoihin, joiden jännevälin ja laatan paksuuden suhde on pienempi kuin 5. (Lähteenmäki, 2009b; Blaauwendraad 2010, 82.)

### 3.4 Laattateorioiden yhteenveto

Luvuissa 3.2 ja 3.3 keskityttiin siirtymä-venymäyhteyksiin eli käytännössä muodonmuutoksiin. Laattateorioiden oleellinen ero on leikkausmuodonmuutos, jonka Reissner-Mindlin laattateoria ottaa huomioon.

Kirjallisuudessa esitetyt ohjeelliset jännevälin ja paksuuden suhteiden raja-arvot olivat Kirchhoff laattateorialle yli 5 ja Reissner-Mindlin laattateorialle alle 5. Peilaan tätä Eurokoodin rakenneosien määritelmään, huomataan, että jännevälin ja paksuuden suhteen jäädessä alle viiden tulisi rakennetta käsitellä palkkina. Laattojen ja palkkien mitoitusmenetelmissä ovat kuitenkin samanlaisia. Rakenneosien rakenteellista toimintaa ja mitoitusmenetelmiä käsitellään periaatteellisesti



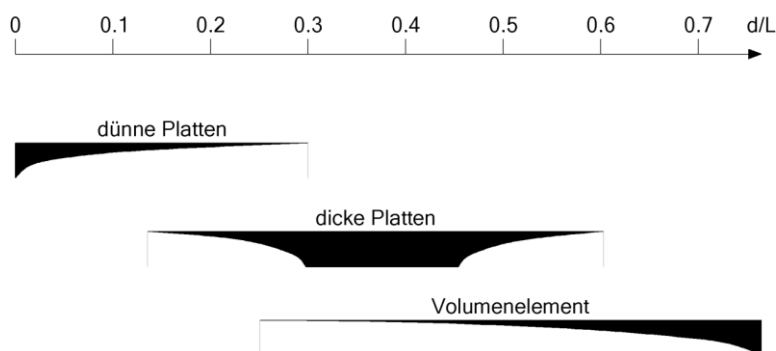
luvussa 4.1 ja 4.2. Taulukossa 1 on esitetty yhteenveto laattateorioista, olennaisimmasta vaikutuksesta ja sovellettavuusrajoista.

TAULUKKO 1. Laattateorioiden yhteenveto

	Kirchhoff laattateoria	Reissner-Mindlin laattateoria
Huomioiko leikkausmuodonmuutoksen?	EI	KYLLÄ
Soveltuvuus jännevälin $L$ ja paksuuden $d$ suhteella ilmaistuna?	$L/d \geq 5$	$L/d < 5$
Palkkiteorian kaksiulotteinen yleistys?	Euler-Bernoulli	Timoshenko

### 3.5 Laattateorioiden vaikutus käytännössä

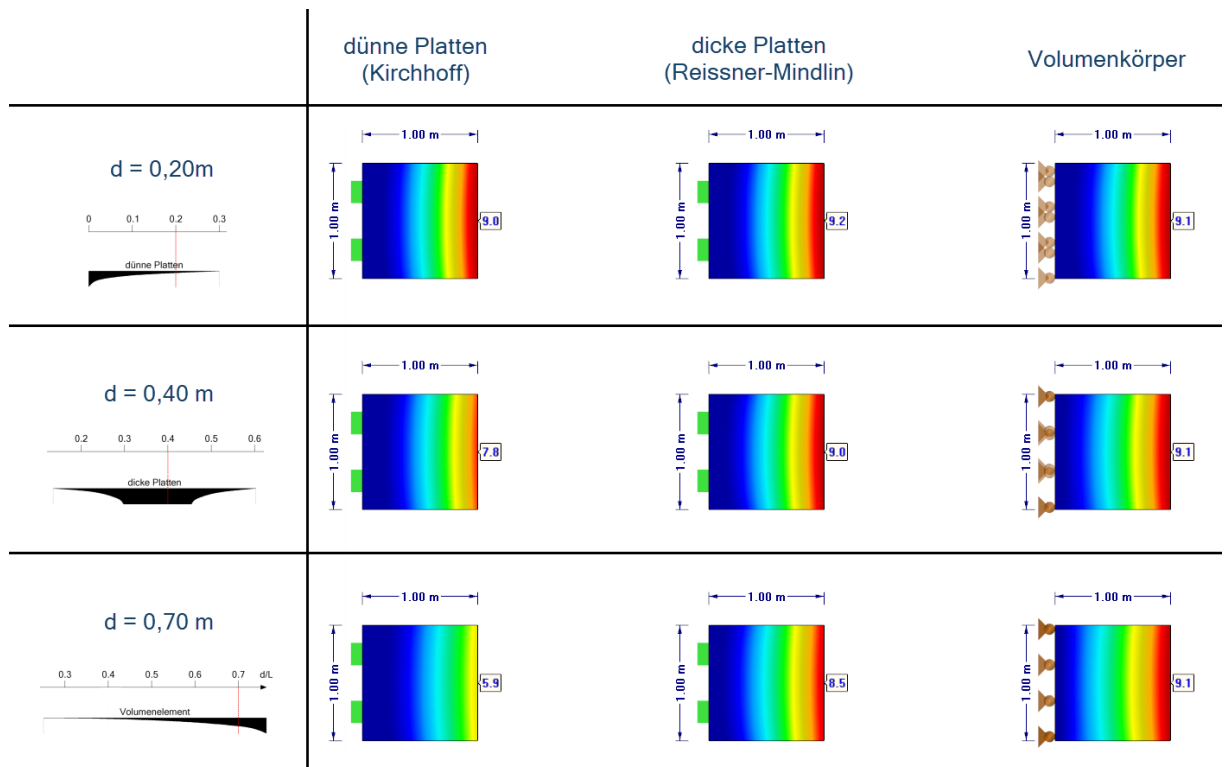
Laatoissa elementtimenetelmää hyödyntämällä laskentamalli voidaan muodostaa joko kaksi- tai kolmiulotteisena. Kaksiulotteisilla laskentamalleilla voidaan käyttää haluttua laattateoriaa, koska ne ovat kaksiulotteisia yleistyksiä. Kolmiulotteisella laskentamallilla laskenta perustuu elementtimenetelmään. Kuvassa 26 on esitetty ohjeelliset raja-arvot laattateorian ja laskentamenetelmän valintaan.



KUVA 26. Dlubalin ohjeellinen taulukko laattateorian ja laskentamenetelmän valintaan paksuuden  $d$  ja jännevälin  $L$  suhteen perusteella (Dlubal 2019b)

Kuvassa 26 on esitetty ohuen- ja paksun laatan (saksaksi dünne- ja dicke platten) ohjeelliset paksuuden  $d$  ja jännevälin  $L$  suhteet kaksiulotteiselle laskentamallille.

Niiden huomataan tukevan aiemmin esitettyjä jännevälin ja paksuuden suhteellisia arvoja, mutta rajanveto on häilyvämpi. Kuvasta 26 huomataan myös, että kaksi- ja kolmiulotteisen laskentamallin (saksaksi volumenelement) valinnalle on vaikea muodostaa yksiselitteistä rajaa. Kuvan 26 kuvaajat ja raja-arvot perustuvat Dlubalin DI Gerhard Rehmin (2019) mukaan Christian Barthin ja Walter Rustlerin saksankieliseen elementtimenetelmää käsittelevään teokseen Finite Elemente in der Baustatik-Praxis (2010). Kuvassa 27 on esitetty kuvan 26 ohjeellisen taulukon laattateorian ja laskentamenetelmän vaikutus käytännössä.



KUVA 27. Laattateorian ja laskentamenetelmän valintataulukon vaikutus käytännössä (Dlubal 2019b)

Dlubalin (2019b) kuvan 27 esimerkissä on tarkasteltu kolmea eri paksuista ulokelaattaa; 200 mm, 400 mm ja 700 mm. Jännevälin ollessa 1000 mm saadaan paksuuden  $d$  ja jännevälin  $L$  suhteiksi 0.2, 0.4 ja 0.7. Ilmoitettuna jännevälin ja paksuuden suhteilla, kuten laattateorioita käsitellessä, suhteet ovat 5, 2 ja 1.43. Esimerkissä ylintä riviä vasemmalta lukien kahden ensimmäisen laatan laskentamalli on muodostettu kaksiulotteisena käyttäen Kirchhoff laattateoriaa ja Reiss-

ner-Mindlin laattateoriaa. Kolmannen laatan laskentamalli on muodostettu kolmiulotteisena. Kuormitus on muodostettu kaikille tapauksille paksuuden suhteessa niin, että taipuman täytyisi olla sama 9,1 mm.

Kuvan 27 tuloksista huomataan kuinka ohuella laaatalla,  $d/L = 0.2$  tai  $L/d = 5$ , laattateorian tai laskentamenetelmän valinnalla ei ole suurta vaikutusta tuloksiin. Paksulla laaatalla paksuuden ja jännevälin suhteen kasvaessa,  $d/L = 0.4$  tai  $L/d = 2$  tuloksissa huomataan kaksiulotteisen laskentamallin Kirchhoff laattateorialla antavan virheellisen tuloksen. Kaksiulotteinen laskentamalli Reissner-Mindlin laattateorialla ja kolmiulotteinen laskentamalli antavat saman oikean tuloksen. Edelleen paksuuden kasvaessa,  $d/L = 0.7$  tai  $L/d = 1.43$ , huomataan, että Reissner-Mindlin laattateorian mukainen kaksiulotteinen laskentamalli antaa virheellisen tuloksen verrattuna kolmiulotteiseen laskentamalliin. Kaikissa kolmiulotteinen laskentamalli antaa oikean 9,1 mm taipuman.

Dlubalin (2019b) ohjeellisesta taulukosta (kuva 26) ja käytännön sovelluksesta (kuva 27) huomataan laattateorian ja sen mukaisen leikkausmuodonmuutoksen vaikutus. Lisäksi huomataan kirjallisuuden ohjeellisten raja-arvojen paikkansapitävyys. Ohuilla laatoilla laskentamenetelmän ja laattateorian valinnalla ei ole suurta merkitystä, sillä tulosten erot ovat hyvin pieniä. Paksuilla laatoilla laskentamenetelmän ja laattateorian merkitys kuitenkin kasvaa, rajojen kuitenkin ollessa häilyviä. Kaksiulotteisen laskentamallin voidaan olettaa soveltuvan  $d/L = 0,4 \dots 0,5$  tai  $L/d = 2,5 \dots 2$  asti, tämän jälkeen muodonmuutoksia olisi tulkittava kolmiulotteisella laskentamallilla. Kaksiulotteisen laskentamallin soveltuvuusrajaksi voidaan myös soveltaa Eurokoodin seinämäisen palkin määritelmää  $L/d = 3$ . Johtopäätöksenä voidaan todeta ohjeellisiksi laskentamallin ulottuvuuden ja käytettävän laattateorian raja-arvoiksi:

- Kirchhoff laattateoria ja kaksiulotteinen laskentamalli, kun jännevälin ja paksuuden suhde on suurempi tai yhtä suuri kuin 5
- Reissner-Mindlin laattateoria ja kaksiulotteinen laskentamalli, kun jännevälin ja paksuuden suhde on alle 5, mutta yli 3
- Kolmiulotteinen laskentamalli soveltuu, kun jännevälin ja paksuuden suhde on alle 3
- Kolmiulotteista laskentamallia voidaan käyttää vertailevana laskentamenetelmänä kaksiulotteiselle laskentamallille

## 4 BETONIRAKENTEIDEN ERITYISPIIRTEITÄ

Betoni on maailman yleisin rakennusmateriaali. Betoni koostuu kiviaineksesta, vedestä ja sideaineesta eli sementistä. Sementti on betonin tärkein osa-aine. Sementin reagoiessa veden kanssa, se luo lujan sementtikiven, joka sitoo kiviaineksen yhteen. Kiviaineksen ja sementin laatu vaikuttavat eniten lopputuotteen eli kovettuneen betonin ominaisuuksiin. Myös veden suhteellisella määrällä on vaikutusta betonin ajasta riippuvaisiin ominaisuuksiin. Betonirakenteiden suunnittelun tämän hetkinen työkalu Suomessa on Eurokoodi, joka on eurooppalainen suunnittelustandardi. (Leskelä 2009, 27; Nykyri 2013, 8-11; Betoniteollisuus ry.)

Betonin käyttö yleisimpänä rakennusmateriaalina perustuu sen hyvään puristuslujuuteen. Betonin vetolujuus on heikko, vain noin 6-9% puristuslujuudesta, minkä takia betoni raudoitetaan betoniteräksin vetoalueiltaan. Näin muodostuu komposiitti ja epähomogeeninen kahden eri materiaalin yhdistelmä, jossa hyödynnetään betonin puristuslujuutta ja betoniteräksen vetolujuutta. (Leskelä 2009, 34; Rombach 2011, 3, 8; Nykyri 2013, 44.)

Luvuissa 2 ja 3 käsiteltiin elementtimenetelmää ja laattateorioita. Näissä materiaalin otaksuttiin käyttäytyvän lineaarisesti elastisesti eli kimmoisesti. Betoni on kuitenkin hyvin epälineaarinen materiaali ja sillä on myös ajasta riippuvaisia ominaisuuksia, kuten viruma ja kutistuminen. Lisäksi betoni halkeaa sen vetolujuuden ylittyessä. Niin betonin kuin betoniteräksen suhteellinen puristuma tai venymä on lineaarista pienillä jännityksillä. Näin ollen FEM-rakenneanalyysissä lineaarisesti elastisesti käyttäytyvä materiaali on riittävän tarkka oletus. (Leskelä 2009, 34; Rombach 2011, 3, 8; Nykyri 2013, 44.)

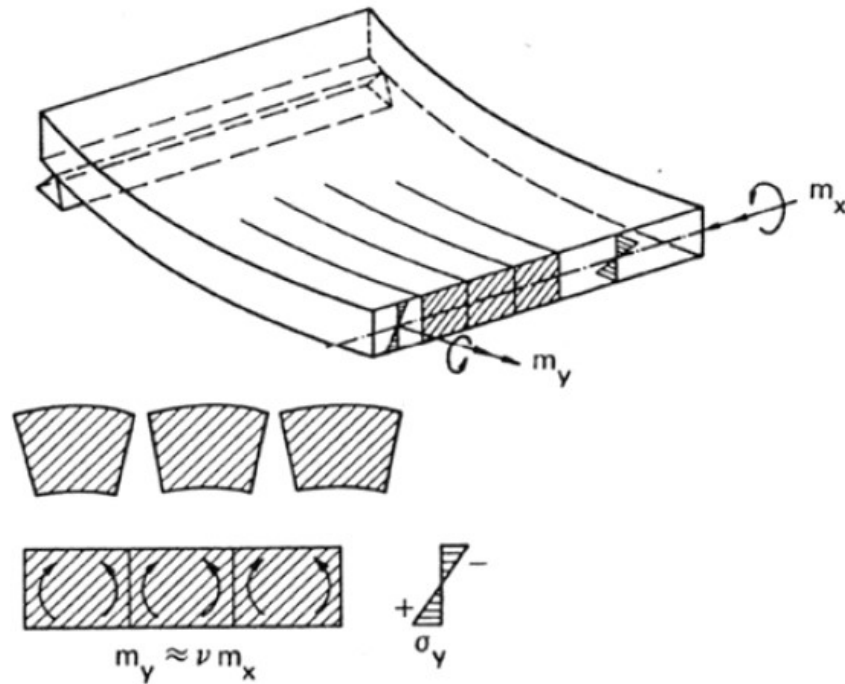
Lineaarisesti elastisesti käyttäytyvän materiaalin otaksumasta huolimatta rakennesuunnittelijan tulee tiedostaa ja huomioida betonin materiaaliominaisuuksien erityispiirteet. Teräsbetonilaattojen tapauksessa viruma redusoi kimmokerrointa ja halkeilu redusoi jäyhyysmomenttiä, jolloin taivutusjäykkyys pienenee sen muodostuessa kimmokertoimen ja jäyhyysmomentin tulona. Esimerkiksi hyvin hoivassa ja toisen kertaluvun vaikutuksille herkissä rakenteissa edellä mainittujen ilmiöiden vaikutusten huomiointi on kriittistä. (Leskelä 2009, 34; Rombach 2011, 3, 8; Nykyri 2013, 44.)

#### 4.1 Rakenneosien määritelmät

Rakenneosien määritelmä esitettiin luvussa 3, kuvassa 20. Rakenneosa määriteltiin laataksi, kun pienin sivumitta oli 5 kertaa suurempi kuin laatan paksuus. Mikäli pienin sivumitta jäi alle tämän, rakenneosa luokiteltiin palkiksi, kuitenkin niin, että jännevälin tulee olla vähintään 3 kertaa suurempi kuin palkin paksuus. Mikäli jänneväli on pienempi kuin 3 kertaa palkin paksuus, on kyseessä seinämäinen palkki. (SFS-EN 1992-1-1 + A1 + AC 2015, 57.)

Rakenneosien määrittely on tärkeää niiden rakenteellisen toiminnan erotessa toisistaan. Laatoissa ja palkeissa mitoitusperiaatteet ovat samanlaiset. Taivutusmitoitus perustuu tekniseen taivutusteoriaan ja leikkausmitoitus perustuu betonin leikkauskestävyyteen, puristusvyöhykkeeseen, raudoituksen vaarnavaikutukseen sekä ristikkoanalogian mukaiseen leikkausraudoituksen toimintaan, mikäli leikkausraudoitusta on käytetty. Seinämäisillä palkeilla tekninen taivutusteoria ei päde ja mitoitusmenetelmät perustuvat plastisuusteoriaan perustuvaan ristikkomenetelmään. (Saarinen n.d. 21-22, Rombach 2011, 3; SFS-EN 1992-1-1 + A1 + AC 2015, 57, 62, 82-89.)

Laattojen toiminnassa olennaisena erona suhteessa palkkeihin on niin sanottu laattavaikutus, jota on havainnollistettu kuvassa 28. Siitä huomataan, kuinka poikittaiset muodonmuutokset estettynä rakenteeseen muodostuu myös niin sanottuun pääsuuntaan nähden kohtisuoraan jännityksiä eli toisen suunnan taivutusmomenttia. (Rombach 2011, 3, 159; SFS-EN 1992-1-1 + A1 + AC 2015, 82; Kerkoski 2019.)



KUVA 28. Laattavaikutus, poikittaiset käyritykset on estetty ja näin syntyy myös y-suunnan mukaisia jännityksiä ja niistä y-suunnan taivutusmomentti (Kerokoski 2019)

## 4.2 Laattojen rakenteellinen toiminta

Laatat voivat olla tuettu viivamaisesti seinillä tai palkeilla sekä pistemäisesti pila-reilla. Yhteen suuntaan kantavalla laatalta tarkoitetaan laattaa, jonka kuormitus jakaantuu pääosin kahdelle yhdensuuntaiselle viivamaiselle tuelle. Ristiin kanta-valla laatalta tarkoitetaan laattaa, joka toimii kahteen eri suuntaan kuormitusten jakaantuessa laatan jännemittojen ja jäykkyyksien suhteessa. Laatan paksuuden määrittelyssä olennaista ovat taivutuskestävyys sekä muodonmuutosten eli tai-pumien hallinta. Yleensä mitoittavaksi kriteeriksi muodostuu muodonmuutosten hallitseminen. Taivutuskestävyys saavutetaan yleensä suhteellisen alhaisella raudoituksella ja leikkauskestävyys viivamaisella tuella todetaan riittäväksi leik-kauskestävyyden minimiarvon perusteella. (Nykyri 2013, 9-11.)

Laatta raudoitetaan tyypillisesti vetoalueeltaan eli kentässä alapinnassa ja tuella yläpinnassa laatan sivun suuntaisin raudoituksin. Näistä suunnista käytetään x-

ja y-suunnan tunnuksia, aivan kuten elementtimenetelmän koordinaatistoissa, jotka esiteltiin luvussa 2.1. Laatan rakenneanalyysin toteuttamiseksi suunnittelijan on muodostettava x- ja y-suunnan voimasuureet, joiden määrittämiseen voidaan käyttää FEM-rakenneanalyysia. (Luntta 2009, 2; Rombach 2011, 173, RFEM 2016, 336-338.)

### 4.3 Betonin materiaaliominaisuudet

Luvussa 2.2.4 käsiteltiin RFEM-ohjelmiston ja yleisesti elementtimenetelmää hyödyntävien ohjelmistojen laskentaan tarvittavia materiaaliominaisuuksia. Tässä luvussa käsitellään Eurokoodin mukaisia materiaaliominaisuuksia, huomioiden elementtimenetelmässä tarvittavat lähtötiedot laskennan suorittamiselle. Eurokoodissa puristuslujuus luo perustan kaikille betonin materiaaliominaisuuksille, sillä sen pohjalta muodostetaan myös vetolujuus sekä kimmokerroin. (Nykyri 2013, 37-45.)

#### 4.3.1 Puristus- ja vetolujuus

Eurokoodin mukaan betonin puristuslujuutta kuvataan lieriö- ja kuutiolujuutena ja esitetään näiden suhteena. Lieriölujuuden ominaisarvoa merkitään  $f_{ck}$ , kun taas kuutiolujuuden ominaisarvoa merkitään  $f_{ck,cube}$ . Lisäksi lieriölujuuden keskiarvoa merkitään  $f_{cm}$ . Annetut lujuudet perustuvat 28 vuorokauden ikäisen betonin puristuslujuuskokeiden 5%:n ominaisarvoon, mikä tarkoittaa käytännössä sitä, että 95% tuote-erästä täyttää lujuusarvon ja 5% ei täytä. Lieriö- ja kuutiolujuuden suhde ei ole vakio, vaan suhteen arvo muuttuu lujuuksien kasvaessa. Tyypillisesti suhde on 0,8...0,85. Näistä lujuuksista suunnittelussa käytetään lieriölujuutta, jonka on kokeellisesti osoitettu olevan varmallalla puolella. Tyypillisimmät talorakenteissa käytettävät betonin lujuusluokat on esitetty taulukossa 2. (Leskelä 2009, 29; Nykyri 2013, 35-37; SFS-EN 1992-1-1 + A1 + AC 2015, 28-30.)

TAULUKKO 2. Tyypillisimmät talorakenteissa käytettävät betonin lujuusluokat (SFS-EN 1992-1-1 + A1 + AC 2015, 30.)

Betonin lujuusluokat							
$f_{ck}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	20	25	30	35	40	45	50
$f_{ck,cube}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	25	30	37	45	50	55	60
$f_{cm}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	28	33	38	43	48	53	58

Suunnittelussa käytettävä betonin puristuslujuuden mitoitusarvo  $f_{cd}$  saadaan yhtälöstä (29) (SFS-EN 1992-1-1 + A1 + AC 2015, 35.)

$$f_{cd} = \alpha_{cc} \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \quad (29)$$

missä

- $\alpha_{cc}$  on betonin puristuslujuuskerroin, Suomessa käytetään arvoa 0,85  
 $f_{ck}$  on betonin lieriölujuuden ominaisarvo, valitun lujuusluokan mukaan  
 $\gamma_c$  on betonin materiaaliosavarmuusluku, arvo Suomessa 1,50 tai 1,35

Betonin puristuslujuuskerroin  $\alpha_{cc}$  perustuu siihen, että käytännön kuormitustilanne eroaa lieriö- ja kuutiolujuuden testaustilanteesta puristusalueen muodon, mittojen ja mittasuhteiden osalta. Lisäksi kuormitus eroaa käytännössä testaustilanteesta. (Nykyri 2013, 37.)

Eurokoodin mukaan vetolujuus lasketaan lieriölujuuden ominaisarvon  $f_{ck}$  perusteella yhtälön (30) tai (31) mukaan, riippuen lujuusluokasta. Kaavoista saatava arvo  $f_{ctm}$  on vetolujuuden keskiarvo. (SFS-EN 1992-1-1 + A1 + AC 2015, 30.)

$$f_{ctm} = 0,30 \text{ N/mm}^2 \left( \frac{f_{ck}}{\text{N/mm}^2} \right)^{2/3} \quad (30)$$

kun  $f_{ck} \leq 50 \text{ N/mm}^2$



$$f_{ctm} = 2,12 \text{ N/mm}^2 * \ln\left(1 + \frac{f_{cm}}{10 \text{ N/mm}^2}\right) \quad (31)$$

kun  $f_{ck} > 50 \text{ N/mm}^2$

Vetolujuuden keskiarvon kautta saadaan laskettua vetolujuuden 5%:n alaraja-arvo  $f_{ctk,0,05}$  sekä 95%:n yläraja-arvo  $f_{ctk,0,95}$  yhtälöistä (32) ja (33). Pääasiassa suunnittelussa käytetään alaraja-arvoa  $f_{ctk,0,05}$ . (Nykyri 2013, 38, SFS-EN 1992-1-1 + A1 + AC 2015, 30, 35.)

$$f_{ctk,0,05} = 0,7 * f_{ctm} \quad (32)$$

$$f_{ctk,0,95} = 1,3 * f_{ctm} \quad (33)$$

Suunnittelussa käytettävä vetolujuuden mitoitusarvo  $f_{ctd}$  saadaan yhtälöstä (34). (SFS-EN 1992-1-1 + A1 + AC 2015, 35.)

$$f_{ctd} = \alpha_{ct} \frac{f_{ctk,0,05}}{\gamma_c} \quad (34)$$

missä

- $\alpha_{ct}$  on betonin vetolujuuskerroin, Suomessa käytetään arvoa 1,00
- $f_{ctk,0,05}$  on betonin vetolujuuden keskiarvon 5%:n fraktiili, valitun lujuusluokan mukaan
- $\gamma_c$  on betonin materiaaliosavarmuusluku, arvo Suomessa 1,50 tai 1,35

Käytännössä betonista hyödynnetään sen puristuslujuutta. Esimerkiksi taivutusmitoituksessa olettamana on, että betonin vetolujuutta ei hyödynnetä neutraaliakselin vetopuolella. Vetorasitukset otetaan vastaan raudoituksella, eli betoniteräksillä. Vetolujuutta käytetään lähinnä ankkurointimitoituksessa tai halkeilukestävyyden määrittämisessä. (Nykyri 2013, 38; SFS-EN 1992-1-1 + A1 + AC 2015, 82.)

### 4.3.2 Kimmokerroin

Betoni on epälineaarinen materiaali, mutta pienillä jännityksillä materiaalin käyttäytyminen on kuitenkin lineaarista jännitystasolle  $0,3-0,4f_{cm}$  asti. Eurokoodissa betonin kimmokerroin on esitetty tämän suoran osuuden eli jännitysarvojen 0 ja  $0,4f_{cm}$  välisenä sekanttiarvona eli sekanttikimmokertoimena  $E_{cm}$ . Sekanttikimmokerrointa käytetään pääasiassa käyttörajatilan tarkasteluissa, joissa jännitykset pysyvät pieninä. Eurokoodissa esitetty sekanttikimmokerroin lasketaan yhtälöstä (35) betonin lieriölujuuden keskiarvon perusteella. Taulukossa 3 on esitetty talorakenteiden tyypillisten betonin lujuusluokkien sekanttikimmokertoimet. (Leskelä 2009, 34; Nykyri 2013, 44; SFS-EN 1992-1-1 + A1 + AC 2015, 29-30.)

$$E_{cm} = 22 \left[ \frac{f_{cm}}{10} \right]^{0,3} \quad (35)$$

TAULUKKO 3. Tyypillisimmät talorakenteissa käytettävien betonin lujuusluokkien sekanttikimmokertoimet (SFS-EN 1992-1-1 + A1 + AC 2015, 30)

Betonin lujuusluokkien sekanttikimmokertoimet							
Lujuusluokka	C20/25	C25/30	C30/37	C35/45	C40/50	C45/55	C50/60
$E_{cm}$ [kN/mm <sup>2</sup> ]	30	31	33	34	35	36	37

Mikäli kimmokerrointa käytetään murtorajatilan tarkasteluissa, on betonin sekanttikimmokertoimen sijasta käytettävä kimmokertoimen mitoitusarvoa  $E_{cd}$  yhtälön (36) mukaisesti. (Nykyri 2013, 44; SFS-EN 1992-1-1 + A1 + AC 2015, 68; Hokkanen 2016, 57.)

$$E_{cd} = \frac{E_{cm}}{\gamma_{CE}} \quad (36)$$

missä

$\gamma_{CE}$  on kimmokertoimen osavarmuusluku, Eurokoodin suositusarvo on 1,2

Betonin kimmokertoimeen vaikuttaa oleellisesti myös betonin ajasta riippuvaisista ominaisuuksista viruma, jolla on redusoiva vaikutus kimmokertoimeen. Käytännössä tämä vaikutus vaikuttaa lisääntyneinä muodonmuutoksina. Viruman vaikutusta käsitellään luvussa 4.4.1.

### 4.3.3 Poissonin luku ja liukukerroin

Eurokoodissa Poissonin lukua  $\nu$ , ei ole annettu, mutta sen arvo betonille on tyyppillisesti 0,2. Liikenneviraston Eurokoodin soveltamisohjeessa NCCI 2 on annettu betonin Poissonin luvuksi 0,2 halkeilemattomassa tilassa ja 0 halkeilleessa tilassa. (Liikennevirasto 2017, 11).

Poissonin luvun perusteella saadaan muodostettua liukumoduuli yhtälön (37) mukaisesti.

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (37)$$

Poissonin luku ja liukumoduuli ovat elementtimenetelmää hyödyntäessä oleellisia materiaaliominaisuuksia, mutta muuten käytännön suunnittelussa niitä tarvitaan harvoin.

### 4.3.4 Eurokoodin materiaalimallit

Betonin materiaalimallista eli jännitys-venymäyhteyden kuvaajasta käytetään betonin yhteydessä nimitystä jännitys-puristumayhteys. Materiaalimallin perusteella pystytään muodostamaan tarkasteltavan poikkileikkauksen jännitykset ja muodonmuutokset. Eurokoodissa on esitetty kolme eri materiaalimallia. Nämä materiaalimallit pätevät lyhytaikaiselle kuormitukselle. Mikäli kuormituksen kesto aika kasvaa, muodonmuutokset kasvavat. Tätä ilmiötä käsitellään virumamuodonmuutoksena. (Leskelä 2009, 34-35; Nykyri 2013, 41-42, 4; FS-EN 1992-1-1 + A1 + AC, 2015, 34-36.)

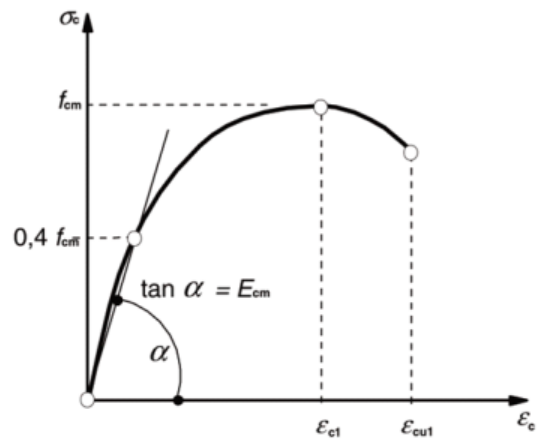
Eurokoodin materiaalmallit on muodostettu nousevaa osuutta kuvaavalla yhtälöllä sekä puristuman raja-arvoilla  $\epsilon_{ci}$  ja  $\epsilon_{cui}$ .  $\epsilon_{ci}$  kuvastaa betonin myötöpuristumaa,  $\epsilon_{cui}$  kuvastaa betonin murtopuristumaa ja  $i$  kuvastaa käytettävän Eurokoodin materiaalmallin järjestysnumeroa. Puristumien raja-arvot on esitetty taulukossa 4. Eurokoodin materiaalmalleista ensimmäinen sopii numeeriseen laskentaan. Toista ja kolmatta materiaalmallia käytetään myös käsin laskennassa ja ovatkin tyypillisemmin suunnittelussa käytettyjä.

1. Yleinen epälineaarinen materiaalmalli
2. Epälineaarinen-ideaalplastinen materiaalmalli
3. Kimmoinen-ideaalplastinen materiaalmalli

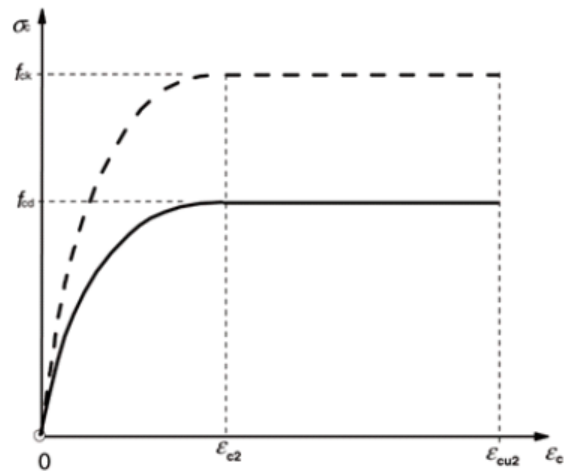
(Nykyri 2013, 41-43; SFS-EN 1992-1-1 + A1 + AC 2015, 34-36; Hokkanen 2016, 55-58.)

Eurokoodin mukaiset materiaalmallien jännitys-venymäkuvaajat on esitetty kuvassa 29. Tässä luvussa käsitellään tarkemmin epälineaarinen-ideaalplastinen (paraabeli-suorakaide) ja kimmoinen-ideaalplastinen (lineaarinen-suorakaide tai bilineaarinen) materiaalmalli. Ne ovat tyypillisimmät käytettävät materiaalmallit.

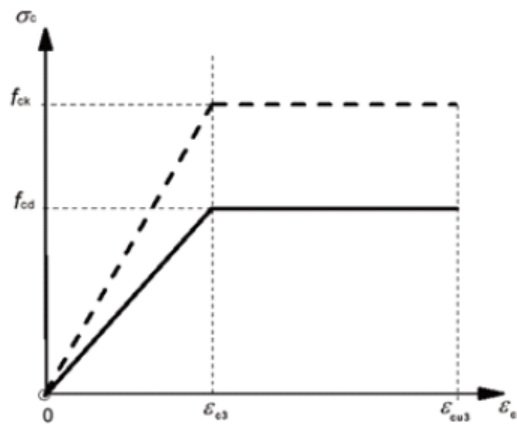
1. Yleinen epälineaarinen materiaalmalli



2. Epälineaarinen-ideaaliplastinen materiaalmalli



3. Kimmoinen-ideaaliplastinen materiaalmalli



KUVA 29. Eurokoodin materiaalmallit (SFS-EN 1992-1-1 + A1 + AC 2015, 35-36)

TAULUKKO 4. Tyypillisimmät talorakenteissa käytettävien betonin lujuusluokkien puristuman myötö- ja murtopuristumien raja-arvot sekä jännitys-puristumayhteyksissä tarvittava eksponentti  $n$  (SFS-EN 1992-1-1 + A1 + AC 2015, 30)

Betonin lujuusluokkien myötö- ja murtopuristumien raja-arvot ja eksponentti $n$							
Lujuusluokka	C20/25	C25/30	C30/37	C35/45	C40/50	C45/55	C50/60
$\epsilon_{c1}$ [‰]	2,0	2,1	2,2	2,25	2,3	2,4	2,45
$\epsilon_{cu1}$ [‰]	3,5						
$\epsilon_{c2}$ [‰]	2,0						
$\epsilon_{cu2}$ [‰]	3,5						
$\epsilon_{c3}$ [‰]	1,75						
$\epsilon_{cu3}$ [‰]	3,5						
$n$	2,0						

Eurokoodin epälineaarinen-ideaaliplastinen materiaalimalli muodostetaan yhtälöiden (38) ja (39) mukaan. (SFS-EN 1992-1-1 + A1 + AC 2015, 36).

$$\sigma_c = f_{cd} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c2}} \right)^n \right] \quad (38)$$

kun  $0 \leq \epsilon_c \leq \epsilon_{c2}$

$$\sigma_c = f_{cd} \quad (39)$$

kun  $\epsilon_{c2} \leq \epsilon_c \leq \epsilon_{cu2}$

missä

$n$  on taulukon 4 mukainen eksponentti

$\epsilon_{c2}$  on taulukon 4 mukainen muodonmuutos maksimilujuuden saavuttamiskohdassa

$\varepsilon_{cu2}$  on taulukon 4 mukainen murtopuristuma

Eurokoodin kimmainen-ideaaliplastinen materiaalimalli muodostetaan yhtälöiden (40), (41), (42) ja (43) mukaan. (SFS-EN 1992-1-1 + A1 + AC 2015, 36; Hokkanen 2016, 55.)

$$\sigma_c = \frac{f_{ck}}{\varepsilon_{c3}} \varepsilon_{c3} \quad (40)$$

kun  $0 \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{c3}$

$$\sigma_c = f_{ck} \quad (41)$$

kun  $\varepsilon_{c3} \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu3}$

$$\sigma_c = \frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c3}} \varepsilon_{c3} \quad (42)$$

kun  $0 \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{c3}$

$$\sigma_c = f_{cd} \quad (43)$$

kun  $\varepsilon_{c3} \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu3}$

missä

$\varepsilon_{c3}$  on taulukon 4 mukainen muodonmuutos maksimilujuuden saavuttamiskohdassa

$\varepsilon_{cu3}$  on taulukon 4 mukainen murtopuristuma

Jokaisella materiaalilla on oma materiaalimallinsa. Rakennesuunnittelijan on ymmärrettävä käytettävän materiaalin käyttäytyminen, eli muodonmuutosten ja jännitysten välinen yhteys sekä niiden aiheuttamat reunaehdot materiaalin käytölle.

#### 4.4 Betonin ajasta riippuvaisten ominaisuuksien vaikutus

Betonilla on ajasta riippuvaisia ominaisuuksia, jolla tarkoitetaan virumista ja kutistumista. Viruminen on jännityksistä riippuvainen ilmiö ja kutistuminen jännityksistä riippumaton ilmiö. Molempiin ilmiöihin vaikuttavat ympäristön kosteus, rakenneosan mitat ja betonin koostumus. (Leskelä 2009, 40; SFS-EN 1992-1-1 + A1 + AC 2015, 31.)

Viruminen ja kutistuminen huomioidaan pääasiallisesti käyttörajatilassa ja murto-rajatilassa vain silloin, kun niiden vaikutukset ovat merkittäviä, kuten esimerkiksi tarkasteltaessa toisen kertaluvun vaikutuksille herkkiä rakenteita. Murto-rajatilan muissa tapauksissa virumaa ja kutistumaa ei tarvitse tarkastella, mikäli rakenneosan sitkeys ja kiertymiskyky ovat riittäviä. (SFS-EN 1992-1-1 + A1 + AC 2015, 24.)

##### 4.4.1 Viruminen

Virumisen tekninen loppuarvo saavutetaan viimeistään 70 vuodessa. Viruman suuruuteen vaikuttavia sisäisiä tekijöitä ovat kapillaarihuokoisuus ja vesi-sementti-suhde sekä ulkoisia tekijöitä ympäristön suhteellinen kosteus ja betonin ikä kuormituksen alkaessa. Viruminen näkyy käytännössä vähitellen lisääntyneenä taipumana ajan kuluessa. Taipumat voivat kasvaa noin kolminkertaisiksi kimmoiseen muodonmuutokseen verrattuna. Virumalla on myös edullisia vaikutuksia, sillä sen ansiosta rakenteen jännityshuiput voivat pienentyä, halkeilu vähentyä ja kestävyys parantua. (Leskelä 2009, 45-46; Nykyri 2013, 45-46.)

Virumista käsitellään virumaluvun  $\varphi$  avulla. Virumaluvulla tarkoitetaan virumamuodonmuutoksen suhdetta jännityksen aiheuttamaan lyhytaikaiseen muodonmuutokseen. Eli toisin sanoen lukua millä kimmainen muodonmuutos  $\varepsilon_c$  on kerrottava, jotta saadaan virumamuodonmuutos  $\varepsilon_{cc}$  yhtälön (44) mukaisesti. Kimmoisella muodonmuutoksella tarkoitetaan välittömästi lineaarisen jännitysalueen jännityksen aiheuttamaa muodonmuutosta. (Leskelä 2009, 44; Nykyri 2013, 46.)



$$\varepsilon_{cc} = \varepsilon_c \varphi \quad (44)$$

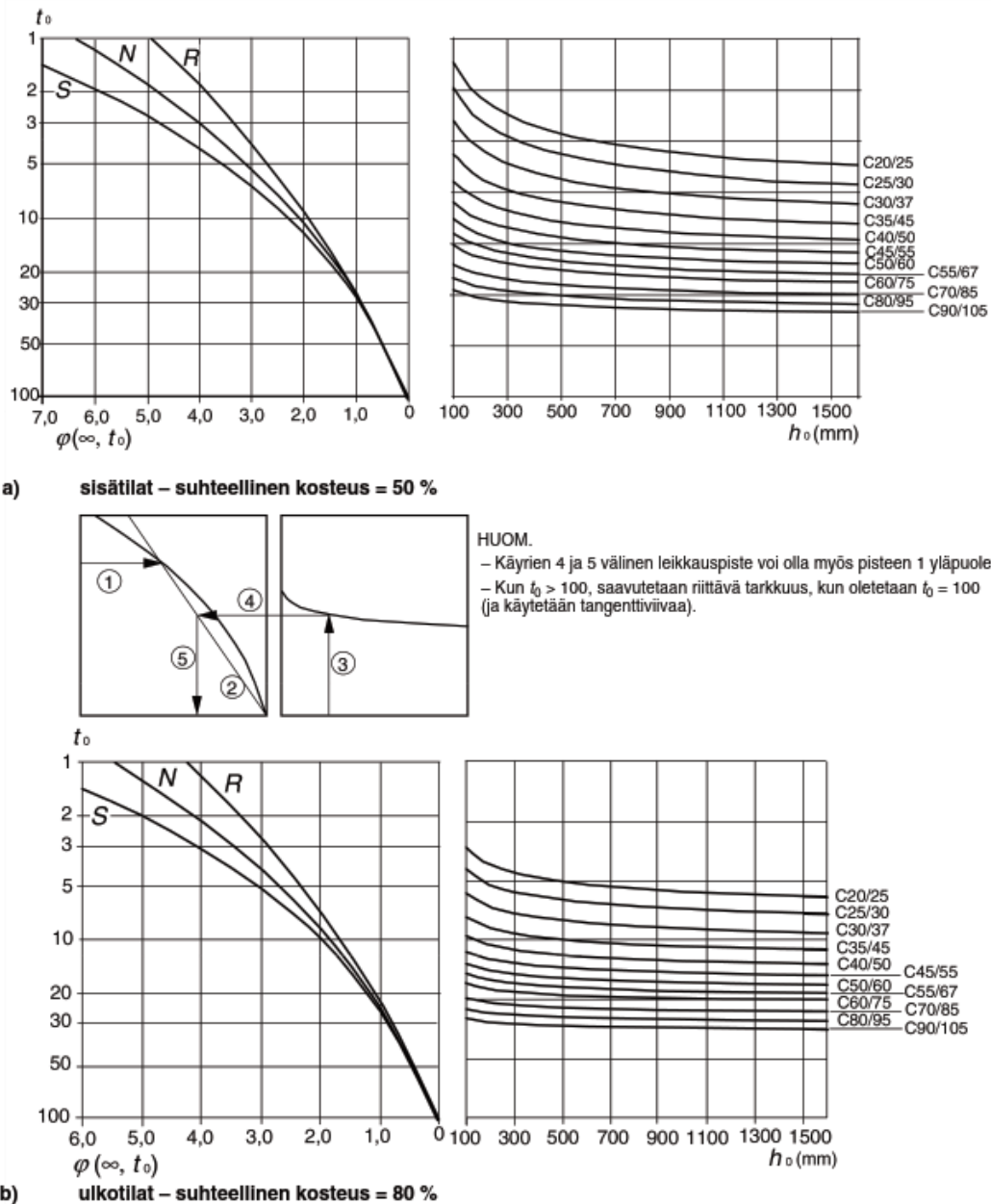
Aikavälillä  $t_0$  ja  $t$  tapahtuva virumamuodonmuutos saadaan yhtälöstä (45). (Nykyri 2013, 46; SFS-EN 1992-1-1 + A1 + AC 2015, 31).

$$\varepsilon_{cc}(t, t_0) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c} \varphi(t, t_0) \quad (45)$$

missä

$t_0$	on betonin ikä vuorokausina kuormitushetkellä
$t$	on ajankohta, jolloin betonin viruma lasketaan
$\sigma_c(t_0)$	on betonin jännitys, jonka vaikutus alkaa ajan hetkellä $t_0$
$E_c$	on betonin tangenttikimmokerroin betonin ollessa 28 vuorokauden ikäistä, voidaan käyttää arvoa $1,05E_{cm}$
$\varphi(t, t_0)$	on virumaluku, joka antaa viruman aikavälillä $(t, t_0)$

Virumaluku voidaan määrittää Eurokoodin liitteen B mukaan laskennallisesti. Loppuviruma  $\varphi(\infty, t_0)$  voidaan myös määrittää Eurokoodin käyrästöjen avulla (kuva 30). Käyrästöt on muodostettu sisätiloille (RH 50%) ja ulkotiloille (RH 80%). Loppuvirumalla tarkoitetaan hyvin pitkän ajan jälkeen syntyvää virumaa. Loppuviruman arvot ovat tyypillisesti luokkaa 2-3 sisätilan betonirakenteille ja 1-2 ulkotilan betonirakenteille. Kuvasta 30 huomataan, kuinka kuormituksen vaikutuksen alkamisajankohta vaikuttaa kasvattavasti loppuvirumaan. (Nykyri 2013, 46; SFS-EN 1992-1-1 + A1 + AC 2015, 31.)



KUVA 30. Loppuviruman määrittämiseen tarkoitetut Eurokoodin käyrästöt (SFS-EN 1992-1-1 + A1 + AC 2015, 32)

Viruma on lineaarista, jos betonin jännitykset ovat alle  $0,45f_{ck}$ . Tällöin jännitykset eivät vaikuta virumaluvun suuruuteen. Jännitysten noustessa yli  $0,45f_{ck}$  on viruma epälineaarista. Tällöin virumalukua kasvatetaan Eurokoodin mukaisesti yhtälöllä (46). Korkeiden jännitystilojen epälineaarisuus johtuu ajan myötä tapahtuvasta mikrohalkeilusta. (Leskelä 2009, 45; Nykyri 2013, 47; SFS-EN 1992-1-1 + A1 + AC 2015, 31.)

$$\varphi_{nl}(\infty, t_0) = \varphi(\infty, t_0) \exp(1,5 (k_\sigma - 0,45)) \quad (46)$$

missä

$\varphi_{nl}(\infty, t_0)$  on epälineaarinen virumaluku, joka korvaa virumaluvun  $\varphi(\infty, t_0)$

$k_\sigma$  on jännityksen ja puristuslujuuden ominaisarvon välinen suhde ajan hetkellä  $t_0$

Virumalla on redusoiva vaikutus betonin kimmokertoimeen. Tämän takia taipumat voivat kasvaa noin kolminkertaisiksi kimmoiseen muodonmuutokseen verrattuna. Vaikutus voidaan ottaa likimääräisesti huomioon käyttämällä tehollista kimmokerrointa  $E_{c,eff}$  yhtälön (47) mukaisesti. Esimerkiksi C30/37 betonilla ja sisätilan tyypillisellä virumaluvulla 2 saadaan teholliseksi kimmokertoimeksi 11 kN/mm<sup>2</sup>, mikä on kolmasosa täydestä sekanttikimmokertoimesta  $E_{cm}$ . (Nykyri 2013, 47.)

$$E_{c,eff} = \frac{E_{cm}}{1 + \varphi(t, t_0)} \quad (47)$$

#### 4.4.2 Kutistuminen

Betoni kutistuu kuivuessaan ja kovettuessaan. Kutistuminen aiheutuu kahdesta ilmiöstä, kuivumiskutistumasta  $\epsilon_{cd}$  ja sisäisestä kutistumasta  $\epsilon_{ca}$ . Kokonaiskutistuma on näiden kahden summa. (Leskelä 2009, 40-41; Nykyri 2013, 49.)

Kuivumiskutistuma  $\epsilon_{cd}$  aiheutuu betonin huokosissa olevan veden poistumisesta, mikä aiheuttaa betonin tilavuuden pienenemisen. Kutistuma on sitä suurempi mitä suurempi vesi-sementti-suhde on. Vesi-sementti-suhdetta ei kuitenkaan käsitellä kutistuman arvoa määriteltäessä. Kuivumiskutistuman kehitys on hidasta ja sen aiheuttama muutos on tärkeämpi kuin sisäisen kutistuman tavallisissa talorakenteissa käytetyissä betonin lujuusluokissa. Kuivumiskutistuman suuruuteen vaikuttavat vesi-sementti-suhde, rakenteen mitat sekä ympäristön kosteus-tila. Ohuet rakenteet ovat herkempiä kuivumiskutistumalle kuin massiiviset rakenteet. Kuivumiskutistuman enimmäisarvot kuivissa olosuhteissa ja alhaisella betonilujuudella ovat yli 0,5 mm/m eli 0,5 ‰ (Leskelä 2009, 40-41; Nykyri 2013, 49; SFS-EN 1992-1-1 + A1 + AC 2015, 33.)

Kuivumiskutistuman loppuarvo  $\varepsilon_{cd,\infty}$  saadaan yhtälöiden (48), (49), (50) ja (51) sekä taulukon 5 avulla.

$$\varepsilon_{cd,\infty} = k_h \varepsilon_{cd,0} \quad (48)$$

missä

$k_h$  on kerroin, mikä riippuu muunnetusta paksuudesta  $h_0$

$\varepsilon_{cd,0}$  on nimellisen kuivumiskutistuman arvo

$$h_0 = \frac{2A_c}{u} \quad (49)$$

missä

$h_0$  on muunnettu paksuus

$A_c$  on poikkileikkausala

$u$  on haihtumiselle altis piiri

TAULUKKO 5.  $k_h$  arvot muunnetun paksuuden perusteella (SFS-EN 1992-1-1 + A1 + AC 2015, 33)

$h_0$	$k_h$
100	1,0
200	0,85
300	0,75
$\geq 500$	0,70

$$\varepsilon_{cd,0} = 0,85 \left[ (220 + 110 \alpha_{ds1}) \exp\left(-\alpha_{ds2} \frac{f_{cm}}{f_{cmo}}\right) \right] 10^{-6} \beta_{RH} \quad (50)$$

missä

$f_{cm}$  on betonin keskimääräinen lieriölujuus

$f_{cmo}$  10 N/mm<sup>2</sup>

$\alpha_{ds1}$  on kerroin, mikä riippuu käytetystä sementtityypistä

6, sementin tyyppi R

4 sementin tyyppi N

3 sementin tyyppi S  
 $\alpha_{ds2}$  on kerroin mikä riippuu käytetystä sementtityypistä  
 0,11 sementin tyyppi R  
 0,12 sementin tyyppi N  
 0,13 sementin tyyppi S

$$\beta_{RH} = 1,55 \left[ 1 - \left( \frac{RH}{RH_0} \right)^3 \right] \quad (51)$$

missä

$RH$  on ympäristön suhteellinen kosteus [%]

$RH_0$  on 100 %

Sisäinen kutistuma  $\epsilon_{ca}$  aiheutuu betonin kovettuessa ja ilmenee yleensä valua seuraavina päivinä. Sisäinen kutistuma aiheutuu hydratoituneen sementin reaktiosta ilman hiilidioksidin kanssa. Reaktioon osallistuneiden aineiden tilavuus on pienempi kuin siitä tuloksena saatavien yhdisteiden. Näin ollen tilavuus pienenee. Mitä enemmän betonissa on sementtiä, sitä suurempi sisäisen kutistuman suuruus on. Sisäisen kutistuman enimmäisarvot ovat alle 0,2 mm/m eli 0,2 ‰ (Leskelä 2009, 40-41; Nykyri 2013, 49; SFS-EN 1992-1-1 + A1 + AC 2015, 33.)

Sisäinen kutistuma  $\epsilon_{ca}$  lasketaan yhtälöiden (52), (53) ja (54) kautta. (SFS-EN 1992-1-1 + A1 + AC 2015, 34)

$$\epsilon_{ca}(t) = \beta_{as}(t)\epsilon_{ca}(\infty) \quad (52)$$

$$\epsilon_{ca}(\infty) = 2,5(f_{ck} - 10) 10^{-6} \quad (53)$$

$$\beta_{as}(t) = 1 - \exp(-0,2t^{0,5}) \quad (54)$$

missä

$t$  on betonin ikä vuorokausina

## 4.5 Halkeilu

Poikkileikkaus oletetaan halkeilleeksi, kun betonin vetolujuus ylittyy. Yleensä jännityksiä verrataan vetolujuuden keskiarvoon  $f_{ctm}$ , mutta Eurokoodissa on esitetty myös taivutusvetolujuuden keskiarvo  $f_{ctm,fl}$ , mikä lasketaan yhtälöstä (55). (SFS-EN 1992-1-1 + A1 + AC 2015, 37.)

$$f_{ctm,fl} = \max \left\{ \begin{array}{l} (1,6 - h/1000) f_{ctm} \\ f_{ctm} \end{array} \right. \quad (55)$$

missä

$h$  on rakenneosan kokonaiskorkeus, mm

Taivutusvetolujuuden keskiarvoa voidaan käyttää, kun poikkileikkauksessa ei esiinny vetojännityksiä esimerkiksi kutistumisesta tai lämpötilavaihteluista. Käytännössä taivutusvetolujuus korottaa vetolujuutta, mikäli tarkasteltava rakenne on alle 600 mm paksu. (SFS-EN 1992-1-1 + A1 + AC 2015, 60.)

Poikkileikkauksen tarkasteluun voidaan laskea suurin vetojännitys lujuusopin perusteorian avulla yhtälön (56) mukaisesti. Yhtälön ehdon täytyessä poikkileikkaus voidaan olettaa halkeilemattomaksi.

$$f_{ctm} \geq \frac{N}{A_c} + \frac{M}{W} \quad (56)$$

missä

$f_{ctm}$  on vetolujuuden keskiarvo

$A_c$  on poikkileikkauksen pinta-ala

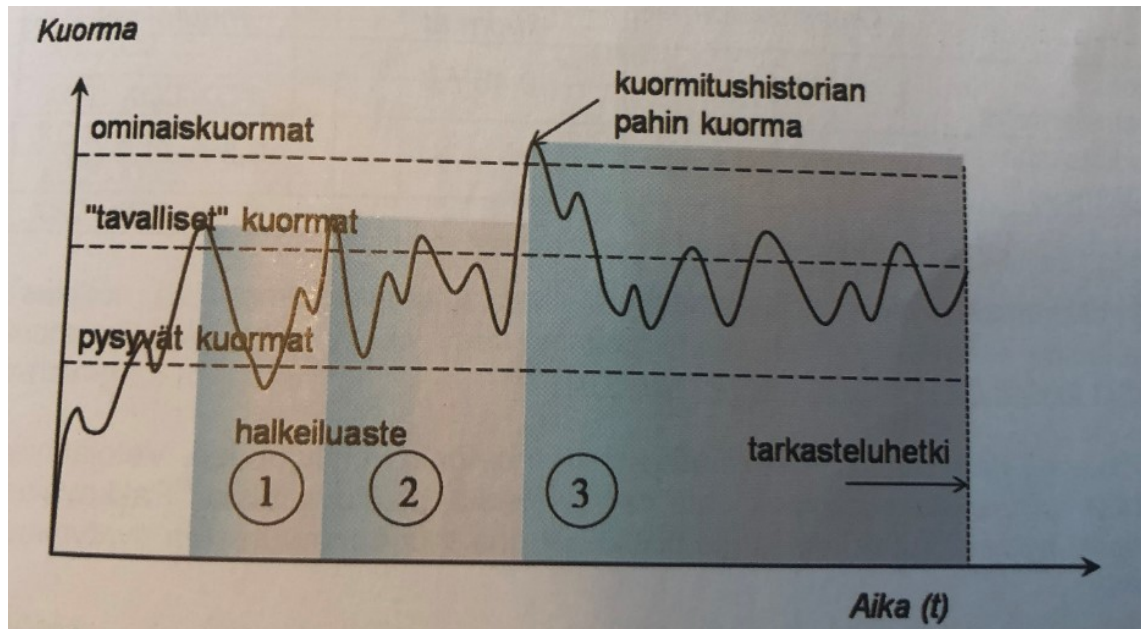
$W$  on poikkileikkauksen taivutusvastus

$N$  on poikkileikkaukseen vaikuttava vetävä normaalivoima, puristava normaalivoima voidaan huomioida negatiivisena

$M$  on poikkileikkaukseen vaikuttava taivutusmomentti

Yhtälössä (56) voimasuureet täytyy määrittää tarkasteltavan rakenteen kuormitushistorian pahimman tilanteen mukaisesti. Betonin halkeilu on palautumaton

rajatila eli halkeillut poikkileikkaus ei enää palaudu ehjäksi. Tämän takia tarkasteltavina voimasuureina käytetään käyttörajatilan ominaisyhdistelmän mukaisia voimasuureita, jota on havainnollistettu kuvassa 31. (Nykyri 2013, 209.)



KUVA 31. Kuormitushistorian vaikutus halkeiluasteeseen (Nykyri 2013, 209)

Poikkileikkauksen tarkasteluun voidaan myös laskea halkeilumomentti  $M_{cr}$  yhtälön (57) mukaisesti. Taivutusmomentin jäädessä alle halkeilumomentin, voidaan poikkileikkaus olettaa halkeilemattomaksi. (Leskelä 2009, 323; SFS-EN 1992-1-1 + A1 + AC 2015, 128).

$$M_{cr} = f_{ctm} * W \quad (57)$$

missä

$f_{ctm}$  on vetolujuuden keskiarvo

$W$  on poikkileikkauksen taivutusvastus

Mikäli poikkileikkaus halkeilee, on sillä redusoiva vaikutus poikkileikkauksen jäyhyysmomenttiin ja sitä kautta taivutusjäykkyyteen. Taivutusjäykkyys muodostuu kimmokertoimen ja jäyhyysmomentin tulona. Mikäli poikkileikkaus halkeaa, ei jäykkyys enää palaudu ennalleen. Betonteollisuus ry. on muodostanut ohjeelliset redusointikertoimet jäykkyydelle, jotka on esitetty taulukossa 6. Jäykkyyden

reduointikerroin voidaan myös laskea käsin SFS-EN 1992-1-1 kaavan 7.18 mukaisesti, mutta laskenta on työläs ja vaatii lähtötiedokseen rakenteen raudoituksen. (Brooker 2006, 6; Leskelä 2009, 323-327; Betoniteollisuus ry 2010; Nykyri 2013, 228-231.)

TAULUKKO 6. Jäykkyyden reduointikertoimet (Betoniteollisuus ry 2010)

Rakenneosia	Reduointikerroin
Seinä	0,70
Pilari	0,70
Palkki	0,35...0,50
Laatta	0,35...0,50

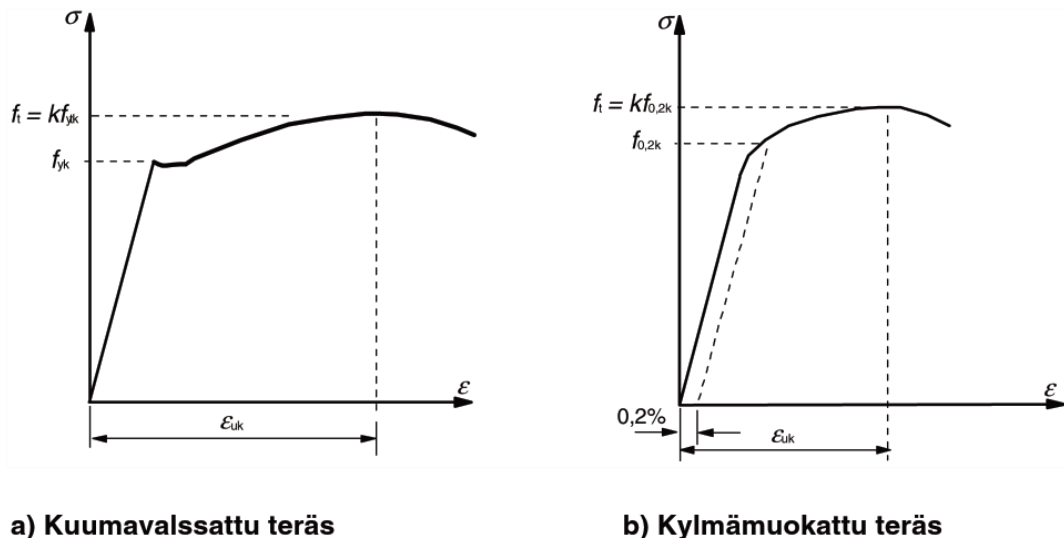
Taulukosta 6 huomataan laattojen ja palkkien reduointikertoimen olevan 0,35...0,50. Molemmille rakenneosille esitetyn saman suuruusluokan perusteella reduointikertoimen voidaan olettaa olevan samassa suuruusluokassa myös paksuille teräsbetoni-laatoille. Reduointi voidaan ottaa huomioon esimerkiksi kimmokerrointa alentamalla, mikä näin ollen reduoi samassa suhteessa taivutusjäykkyyttä. Mikäli kimmokertoimessa on huomioitu jo ennestään viruman reduoiva vaikutus, saadaan esimerkiksi sisätilan virumaluvulla 2 ja halkeilun aiheuttamalla jäykkyyden reduointikertoimella 0,50 pitkäaikaiseksi kimmokertoimeksi vain kuudesosa lyhytaikaiseen sekanttikimmokertoimeen verrattuna. Brooker (2006) toteaa myös pitkäaikaisen kimmokertoimen olevan noin neljäs-kuudesosa lyhytaikaisesta kimmokertoimesta laattojen FEM-rakennepuhtausanalyysia käsittelevässä ohjeessaan. Tämä laskentamenetelmä on kuitenkin likimääräinen. (Brooker 2006, 5, 13-14.)

Halkeilua voidaan vähentää puristavalla normaalivoimalla. Seinät ja pilarit ovat puristettuja rakenneosia, minkä takia niiden jäykkyyden reduointikertoimet ovat pienempiä suhteessa laattoihin ja palkkeihin, jotka ovat taivutettuja rakenneosia. Myös laattoihin ja palkkeihin voidaan luoda puristavaa normaalivoimaa jälkijännittämällä, joka on yksi jännittämismenetelmä esijännittämisen lisäksi. Puristava normaalivoima pienentää poikkileikkauksen vetojännitystä yhtälön (56) mukaisesti. Jälkijännittämisen tavoitteena on juurikin, että rakenne pysyisi halkeilemattomana ja sitä kautta jäykempänä. (Hanka 2019).



## 4.6 Betoniteräkset

Betonin materiaaliominaisuuksiin liittyy olennaisesti myös sen vetoalueilla käytettävä betoniteräs. Betoniteräksillä tarkoitetaan raudoittamiseen tarkoitettuja harjateräksiä, joiden pinnassa on tartuntaa parantavia harjoja. Betoniterästen materiaalmalli riippuu käytettävän teräksen tekotavasta. Tekotapoja ovat kylmävalssaus ja kylmämuokkaus. Kuvassa 32 on esitetty kuumavalssatun ja kylmämuokatun teräksen materiaalmallit, eli jännitys-venymä-kuvaajat. Kuvassa 33 murtorajaa merkitään  $f_t$  ja myötörajaa  $f_{yk}$  tai  $f_{0,2k}$ . (Nykyri 2013, 50-53.)



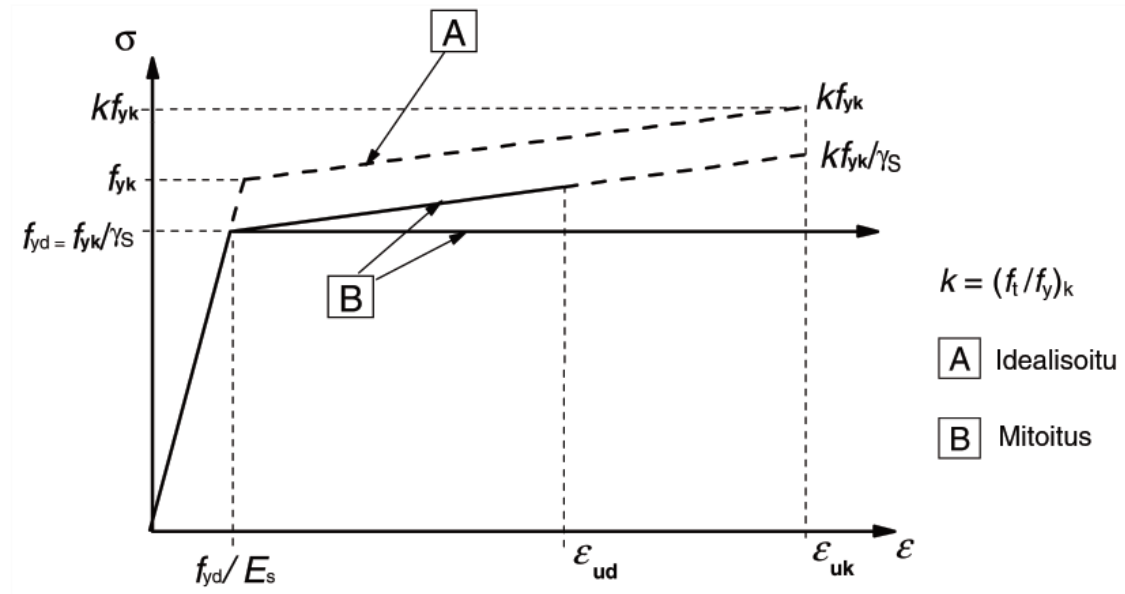
a) Kuumavalssattu teräs

b) Kylmämuokattu teräs

KUVA 32. Kuumavalssatun ja kylmämuokatun teräksen materiaalmallit (SFS-EN 1992-1-1 + A1 + AC 2015, 39)

Betoniteräkset luokitellaan myötörajan tai toisin sanoen myötölujuuden perusteella lujuusluokkiin. Tyypillisin talorakenteissa käytetty lujuusluokka on 500 N/mm<sup>2</sup>. Muita käytännön suunnittelun tärkeitä suureita ovat murtorajan, eli murtolujuuden ja myötölujuuden suhde, jota merkitään tunnuksella  $k$ , sekä kokonaisvenymä  $\epsilon_u$ . Näiden perusteella teräkset jaetaan sitkeysluokkiin, joista tyypillisin on sitkeysluokka B. Sitkeysluokissa sitkein teräs on C ja vähiten sitkein A. (Nykyri 2013, 50-53.)

Betoniterästen mitoituksessa käytetään idealisoitua eli yksinkertaistettua materiaalmallia, joka on esitetty kuvassa 33. Kuvassa 33 idealisoitua materiaalmallia on kuvattu katkoviivalla ja tunnuksella A, kun taas mitoituksessa käytettäviä materiaalmalleja on kuvattu ehjällä viivalla ja tunnuksella B. (Nykyri 2013, 50-53.)



KUVA 33. Betoniteräksen idealisoitu materiaalmalli (SFS-EN 1992-1-1 + A1 + AC 2015, 41)

Betoniteräksen vetolujuuden mitoitusarvo saadaan muodostettua yhtälön (58) mukaisesti (SFS-EN 1992-1-1 + A1 + AC 2015, 41).

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} \quad (58)$$

missä

$f_{yd}$  on betoniteräksen vetolujuuden mitoitusarvo

$f_{yk}$  on betoniteräksen myötölujuus

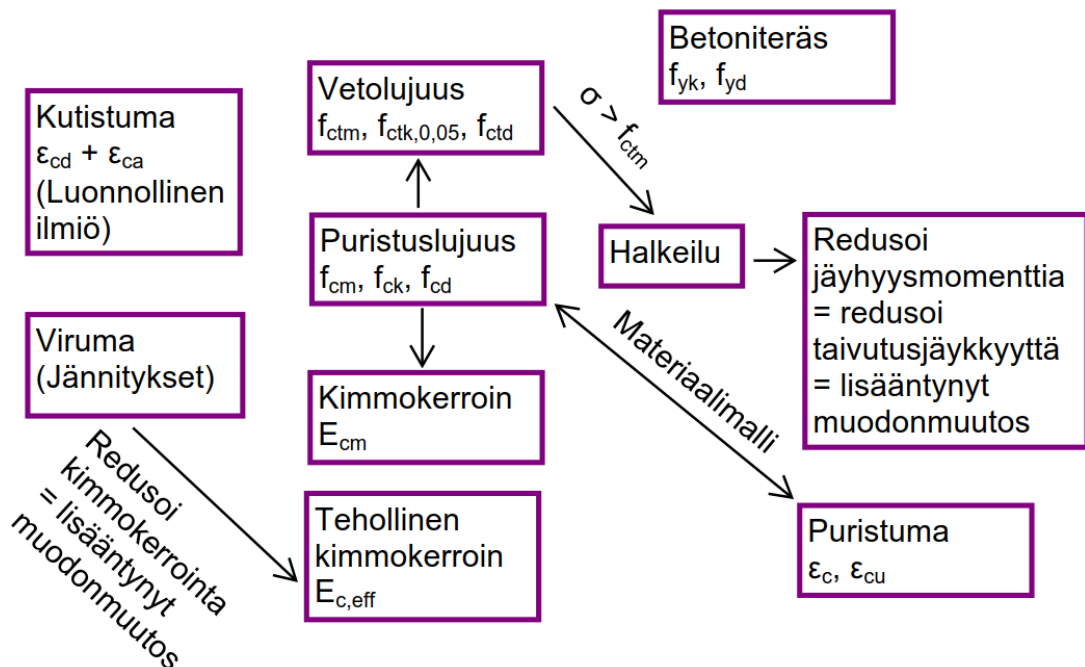
$\gamma_s$  on betoniteräksen materiaaliosavarmuusluku, arvo Suomessa 1,15 tai 1,10

Betoniterästen avulla saadaan luotua raudoitettu betoni, jossa molempien materiaalien ominaisuuksista pyritään hyödyntämään parhaat puolet. Raudoitusta tarvitaan teoriassa vain betonin vetoalueilla, mutta raudoitustapaa tyypillisesti yksinkertaistetaan asennustyön nopeuttamiseksi ja työkustannusten alentamiseksi.

#### 4.7 Betonin materiaaliominaisuuksien yhteenveto

Betoni on yleisin rakennusmateriaali, mutta silti haastava ja vieläkin yleisesti laajalti tutkittu materiaali. Betonirakenteita suunnitellessa rakennesuunnittelijan tulee tuntea niin betonin kuin betoniteräksen ominaisuudet sekä niiden yhteistointi. Kokonaisuuden hallinta ei ole helppoa kokeneemmillekaan rakennesuunnittelijoille. Lisähaasteensa betonirakenteiden suunnittelulle tuo rakennesuunnittelijasta riippumattomat asiat, kuten työmaatoteutuksen laatu, sääolosuhteet, kovettumisolosuhteet ja betonin ikä kuormitushetkellä. (Brooker 2006, 6).

Edellä mainittujen lukujen yhteenveto on esitetty kuvassa 34, jossa on pyritty esittämään lyhyesti oleelliset betonin materiaaliominaisuudet ja niiden syy-seuraussuhteet.



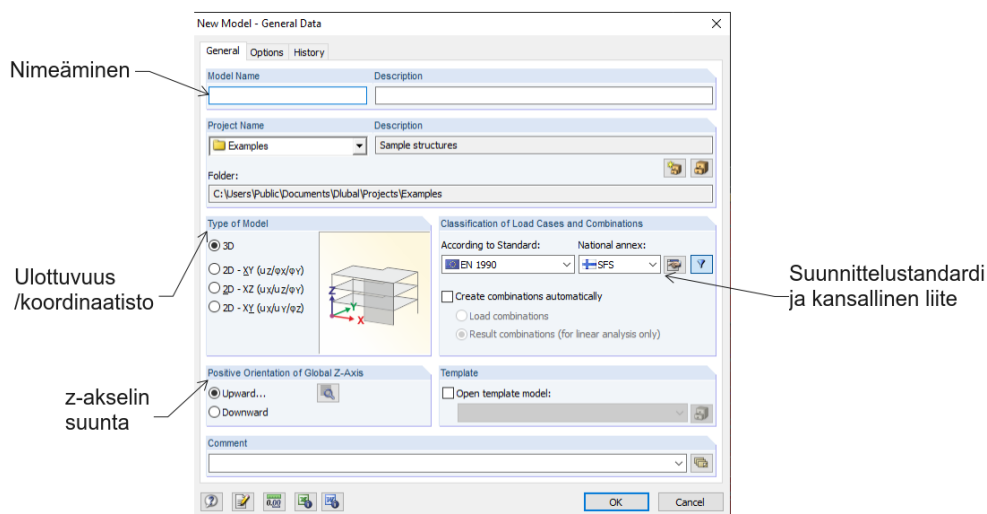
KUVA 34. Betonin materiaaliominaisuuksien ja yhteyksien yhteenveto

## 5 CASE – PAKSU LAATTA

Tässä luvussa sovelletaan edellä käsiteltyä teoriaosuutta. Luvun alun ohjeenomainen laskentamallin muodostaminen kaksi- ja kolmiulotteisena sekä tulosten muodostuminen ja tulkinta tukevat luvussa 2 esitetyjä asioita. Luvun lopussa tehdään CASE-laskenta, missä edellä mainittuja asioita toteutetaan käytännössä.

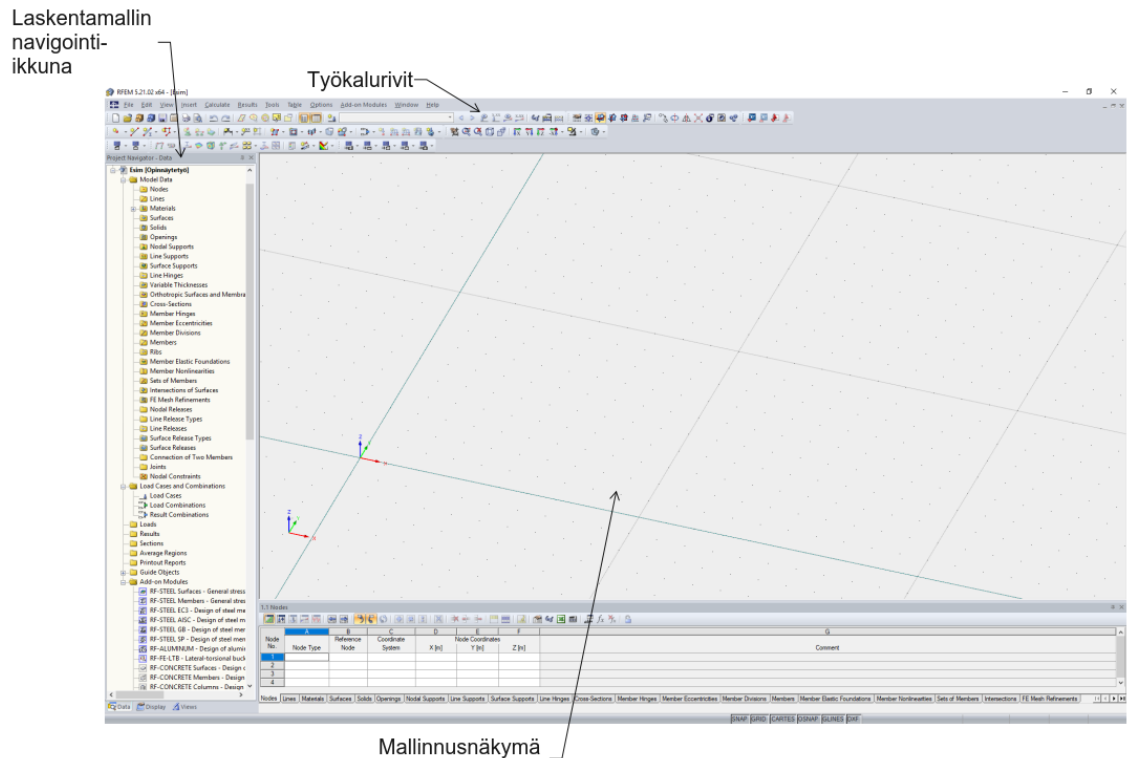
### 5.1 Kaksiulotteisen laskentamallin muodostaminen

Laskentamallin muodostaminen aloitetaan luomalla uusi laskentamalli. Laskentamalli nimetään ja sille valitaan haluttu ulottuvuus, koordinaatisto sekä z-akselin suunta. Aloitusnäkyvän asetukset on esitetty kuvassa 35. Yleensä suositus on asettaa z-akselin suunta ylöspäin. Lisäksi RFEM-ohjelmistossa voidaan valita käytettävä suunnittelustandardi ja kansallinen liite kuormitustapauksien ja -yhdistelmien automaattista luomista varten. Automaattisesti luoduista yhdistelmistä käytetään nimitystä tulosityhdistelmä (englanniksi result combination), jonka avulla voidaan luoda niin kutsuttu verhokäyrä laskentamallin kuormitusyhdistelmistä. Verhokäyrä muodostaa pahimman vaikutuksen antavat voimasuureet eri kuormitusyhdistelmistä jokaisen elementin solmukohtaan. Rakennesuunnittelijan on kuitenkin huomioitava, että verhokäyrä ei vastaa todellista tilannetta ja voi johtaa voimasuureiden yliarvioimiseen. (RFEM 2016, 204, 586.)

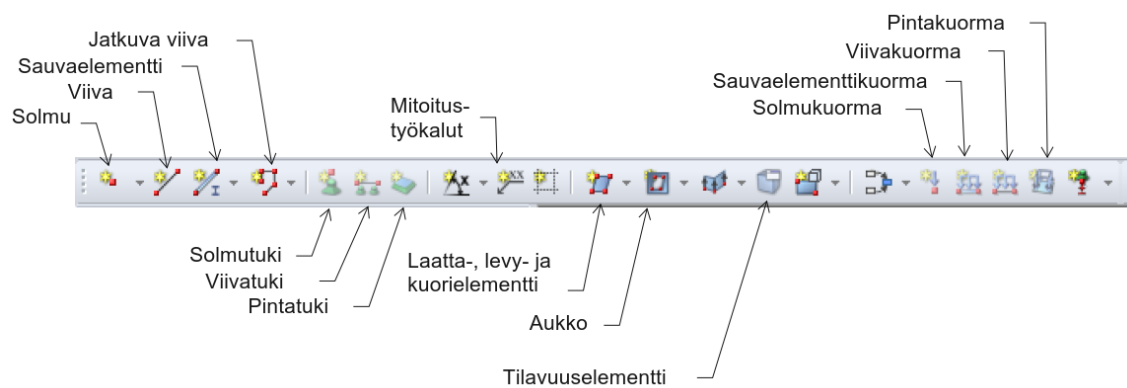


KUVA 35. RFEM-ohjelmiston uuden laskentamallin aloitusikkuna

Laskentamalliin luodaan geometria. Useissa kaupallisissa elementtimenetelmäohjelmistoissa mallinnustyökalut ovat kehittyneet yhä helppokäyttöisemmiksi. RFEM-ohjelmiston kokonaisnäkyminen on esitetty kuvassa 36 ja mallinnustyökalut kuvassa 37. Geometrian luominen voidaan toteuttaa esimerkiksi globaaleja solmuja mallintaen ja muodostaen tämän jälkeen haluttu elementti, kuten, laattaelementti solmujen välille.

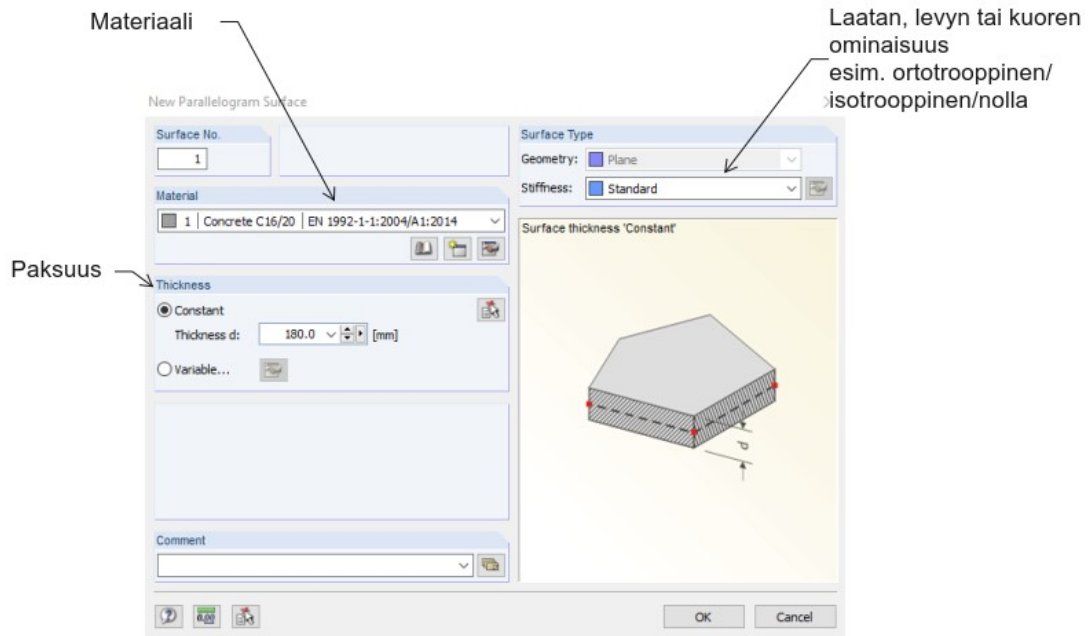


KUVA 36. RFEM-ohjelmiston mallinnusnäkyminen



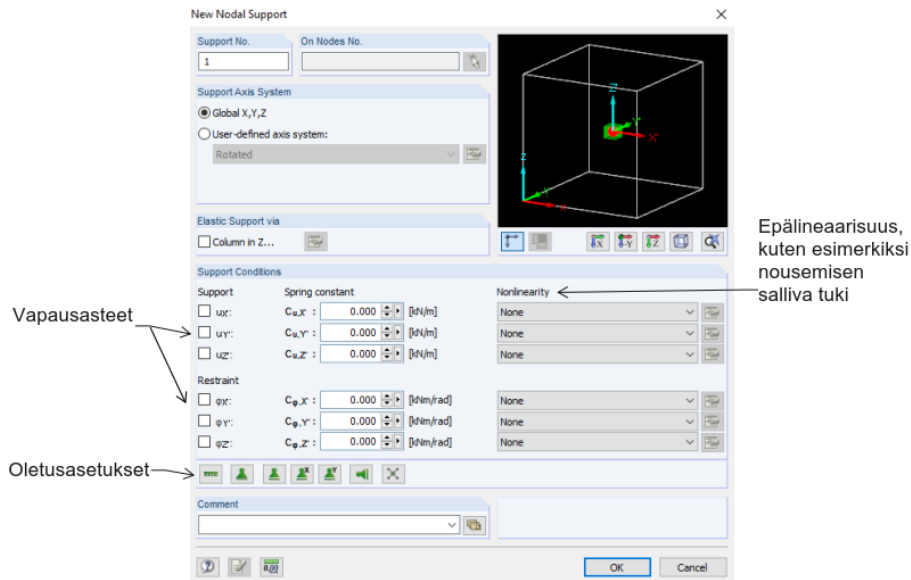
KUVA 37. RFEM-ohjelmiston mallinnus-, tuenta- ja kuormitustyökalut

Geometrian luomisen jälkeen laskentamallin luomisessa oleellista on oikeat materiaaliominaisuudet, tuennat ja kuormitukset. Materiaaliominaisuuksia voidaan muokata laatta-, levy- ja kuorielementtityökalun asetuksista kuvan 38 mukaan.



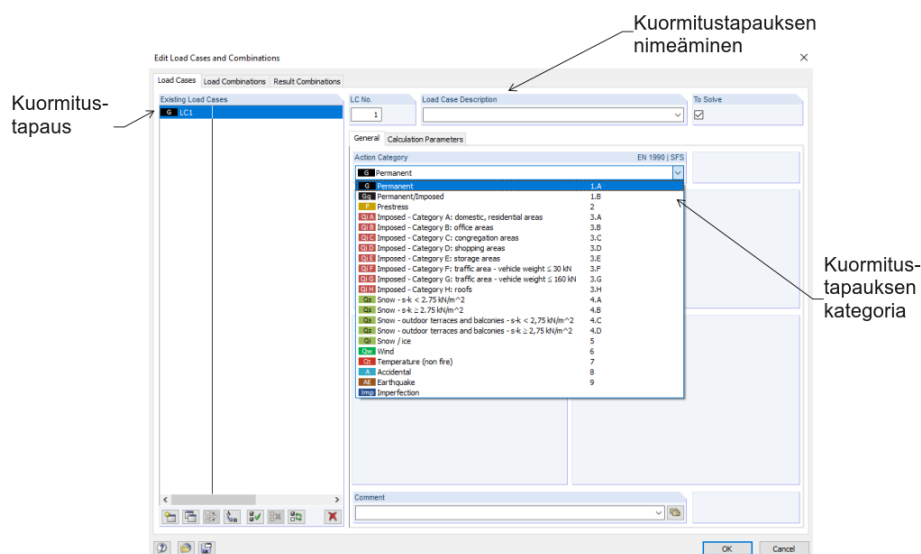
KUVA 38. RFEM-ohjelmiston laatta-, levy- ja kuorielementtityökalun asetukset

Riippuen valitusta mallitilan ulottuvuudesta, tuen vapausasteita on joko kolme tai kuusi. Mallitilan vapausasteita ja sitä kautta solmun tuentaa sekä suositeltavaa tuen mallinnusta käsiteltiin luvuissa 2.1 ja 2.2.3. Kuvassa 39 on vielä esitetty tarkemmin RFEM-ohjelmiston tukityökalun asetukset, jossa on esitetty translaatio- ja rotaatiovapausasteiden tuentamahdollisuus sekä valmiiksi tehtyjä ohjelmiston tukiasetuksia.

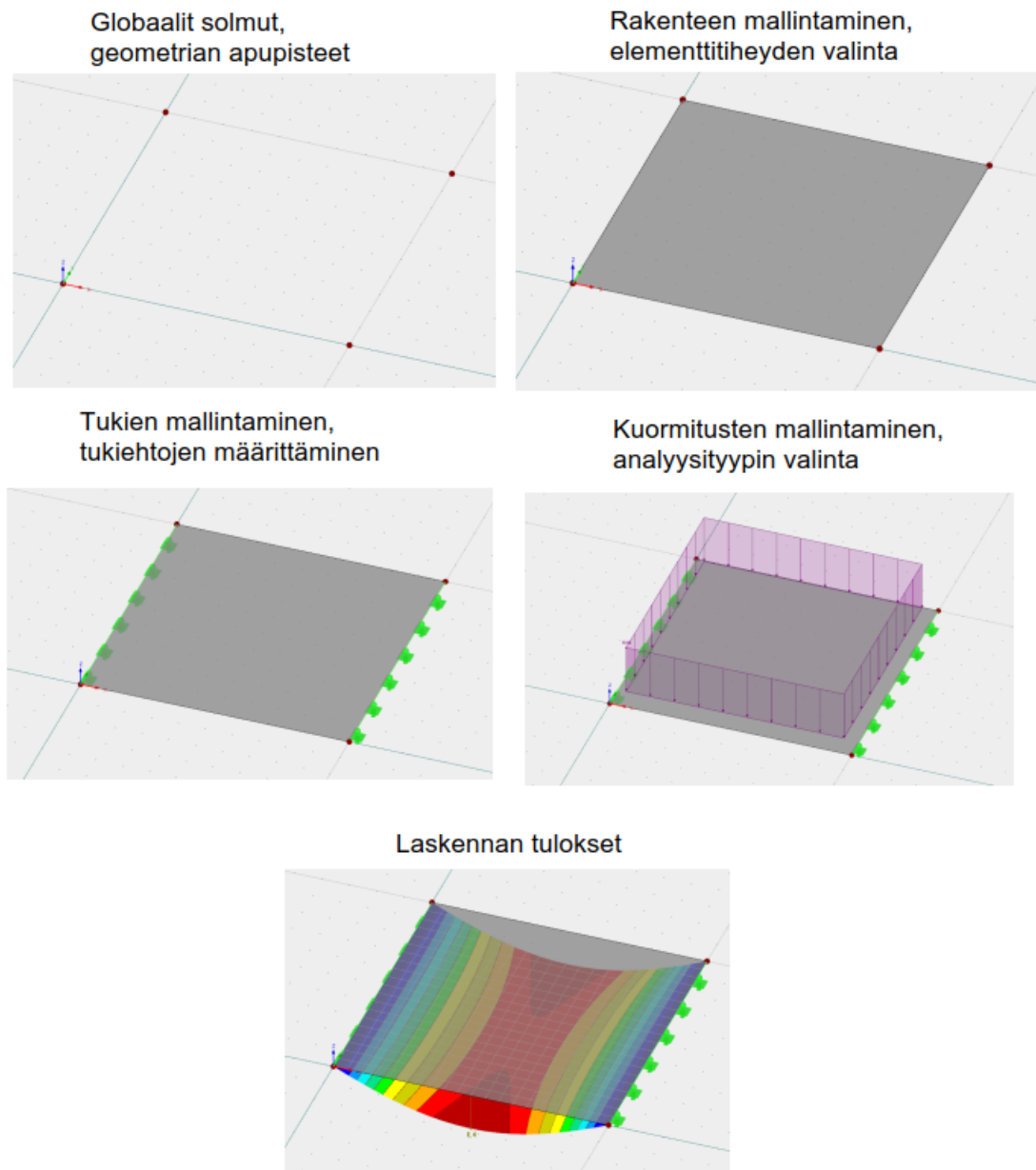


KUVA 39. RFEM-ohjelmiston solmutukityökalun asetukset kolmiulotteisessa laskentamallissa

Kuormia voidaan mallintaa kohdistumaan pistemäisesti, viivamaisesti tai tasomaisesti. Ennen kuormien mallintamista käyttäjän täytyy muodostaa kuormitustapaus, jossa kuormitus vaikuttaa (kuva 40). Kuormitustapauksen laskenta-asetusten (englanniksi calculation parameters) välilehdeltä valitaan myös haluttu analyysityyppi. Analyysityyppejä käsiteltiin luvussa 2.2.2.



KUVA 40. Kuormitustapauksen tekeminen ja asetukset RFEM-ohjelmistossa



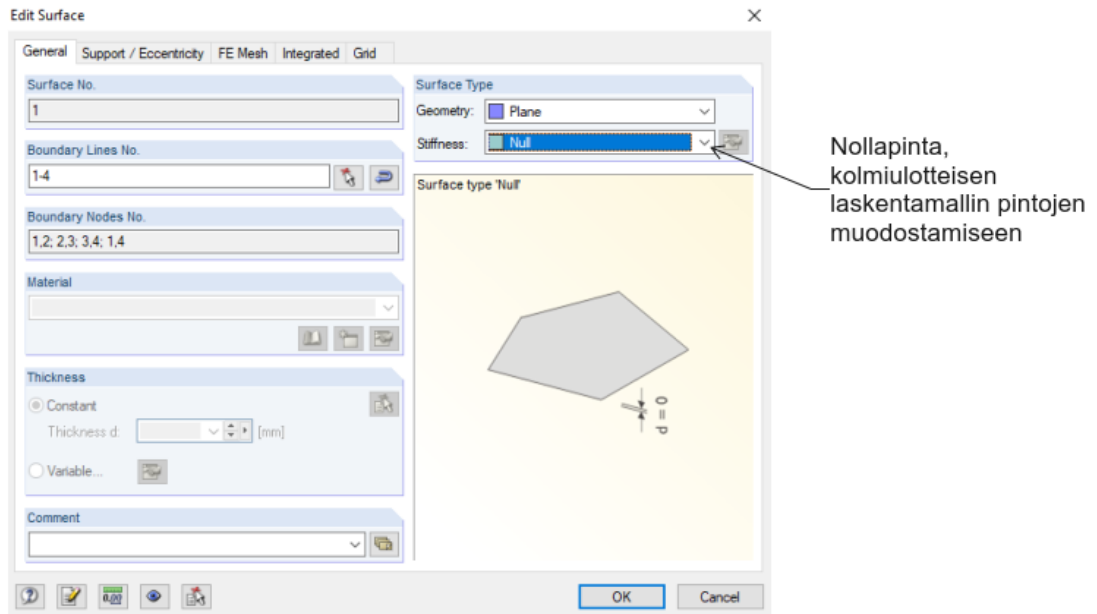
KUVA 41. Yhteenveto kaksiulotteisen laskentamallin muodostamisesta

## 5.2 Kolmiulotteisen laskentamallin muodostaminen

Laatan kolmiulotteisen laskentamallin muodostaminen noudattaa samoja periaatteita kuin kaksiulotteisessa laskentamallissa. Geometrian ja rakenteen mallintamisessa kolmiulotteiselle laskentamallille luodaan ulkopinnat nollalevyä, -laattaa tai -kuorta käyttämällä (englanniksi null) (kuva 42). Tällaisella levyllä, laatalta tai kuorella ei ole esimerkiksi jäykkyyttä tai tilavuuspainoa. Sen ainoa tehtävä on

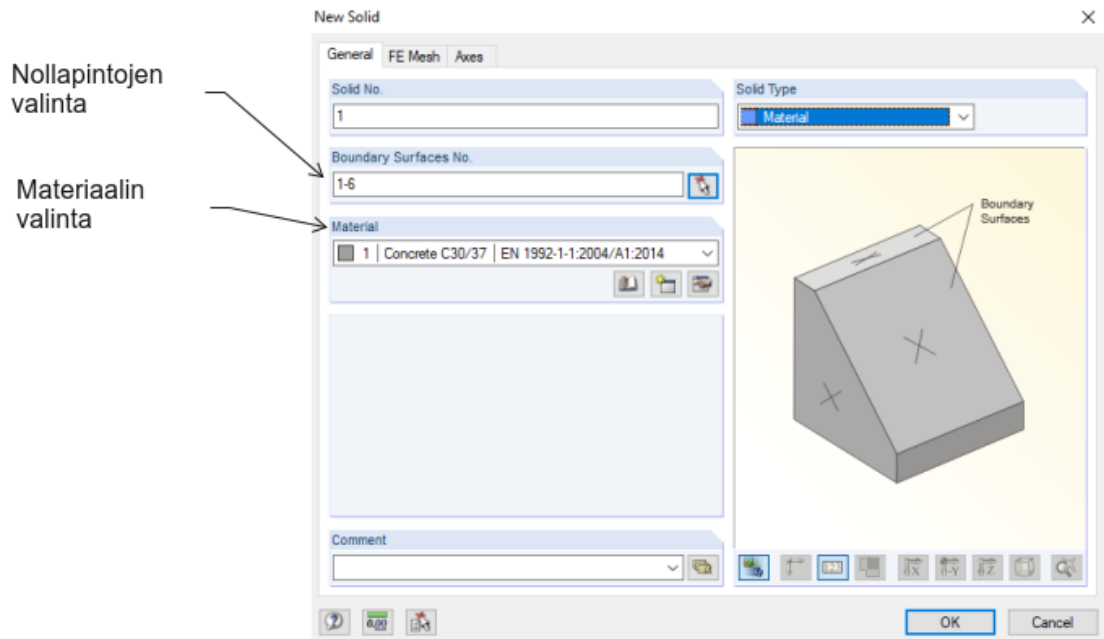


toimia kolmiulotteisen laskentamallin geometrian ulkopintana ja apuvälineenä.  
(RFEM 2016, 88.)



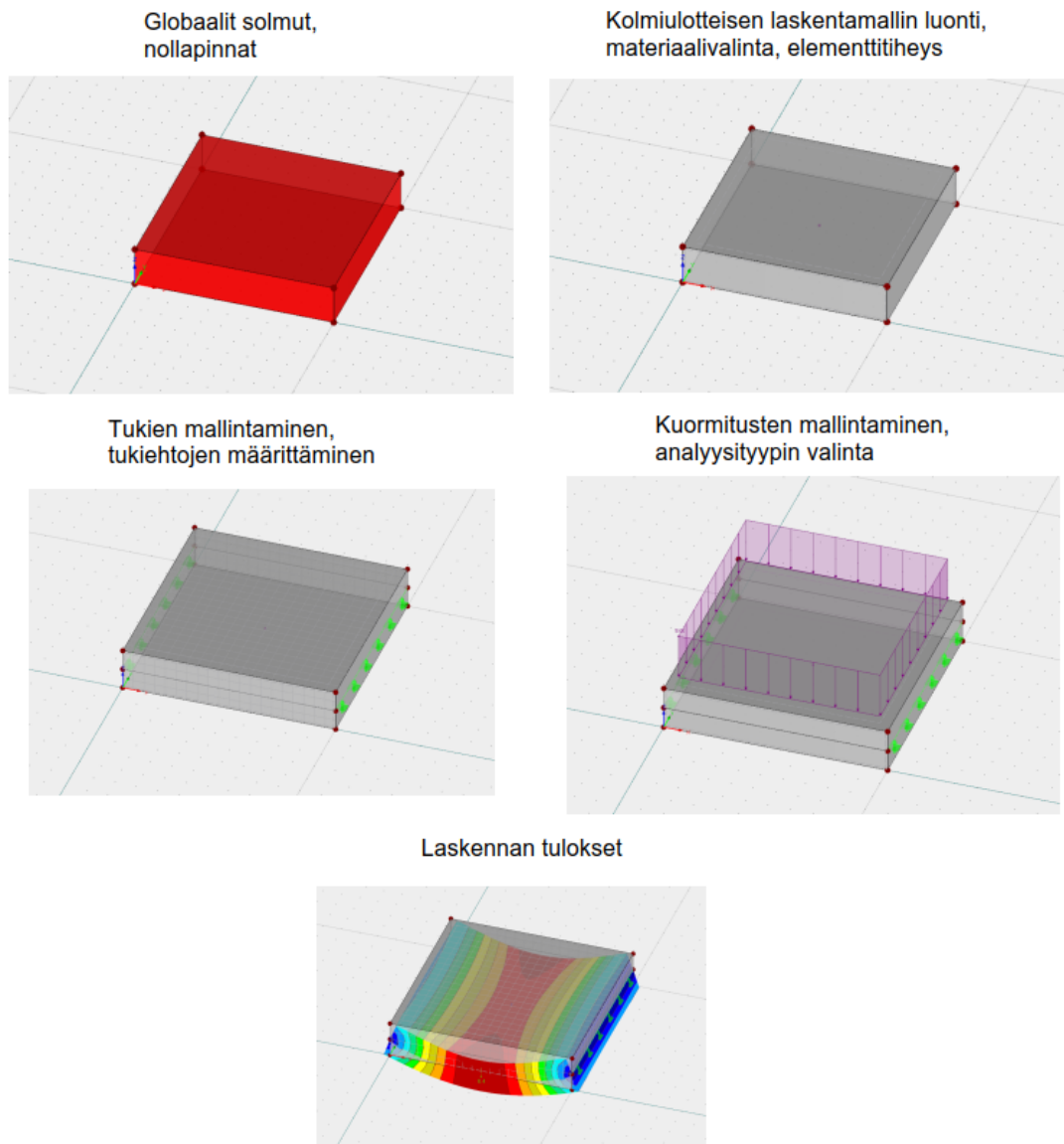
KUVA 42. Laatta-, levy- ja kuorityökalun asetukset ja tyyppin muuttaminen nollassi RFEM-ohjelmistolla

Kolmiulotteisen laskentamallin nollapintojen luonnin jälkeen voidaan luoda kolmiulotteinen laskentamalli valitsemalla halutut nollapinnat sekä materiaali. Luontityökalu on esitetty kuvassa 43.



KUVA 43. Kolmiulotteisen laskentamallin luominen RFEM-ohjelmistolla

Kolmiulotteisessa laskentamallissa geometrian, materiaaliominaisuuksien ja kuormitusten mallintaminen ei juuri eroa kaksiulotteisen laskentamallin muodostamisesta. Suurin ero muodostuu tuentojen mallintamisessa. Mikäli kolmi- ja kaksiulotteisen laskentamallin tuloksia halutaan vertailla, on tuentojen noudatettava kaksiulotteisen laskentamallin yksinkertaistusta, jossa tuenta kohdistuu laatan keskilinjaan.

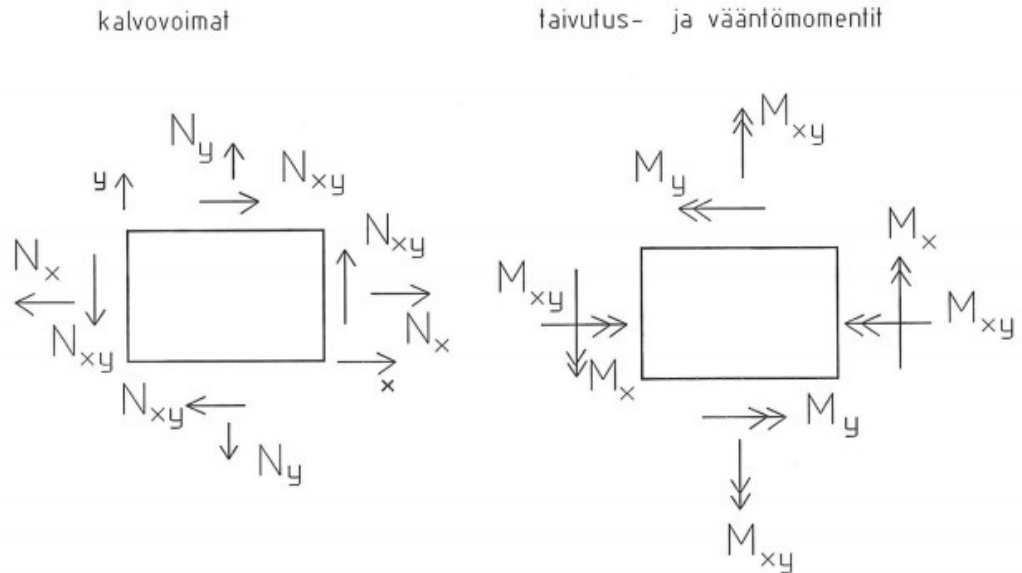


KUVA 44. Yhteenveto kolmiulotteisen laskentamallin muodostamisesta

### 5.3 Laskentamallien tulosten tulkinta

Kaksi- ja kolmiulotteisen laskentamallin tulosten tulkinta eroaa RFEM-ohjelmistossa ja yleisesti muissa ohjelmistoissa. Molemmissa laskentamalleissa tulokseksi saadaan siirtymät, venymät ja jännitykset. Kaksiulotteisessa laatassa, levyssä tai kuoressa saadaan tuloksiksi myös kalvovoimia, leikkausvoimia sekä taivutus- ja vääntömomenteja. Kalvovoimilla tarkoitetaan normaalivoimia ja taivutus- ja vääntömomenteja. Voimasuureita on havainnollistettu kuvassa

45, jossa esitettävät voimasuureet ovat niin sanottuja perusvoimasuureita, näiden pohjalta RFEM-ohjelmisto muodostaa myös mitoitusvoimasuureet. Molemmat voimasuureet kuvaavat voimaa pituusyksikköä kohden, kN/m tai kNm/m. (RFEM 2016, 337-345.)



KUVA 45. Kaksiulotteisen laskentamallin voimasuureet; kalvovoimat, taivutusmomentit ja vääntömomentit (Betoinormikortti 7 1990)

Kolmiulotteisella laskentamallilla edellä mainittuja voimasuureita ei muodostu, vaan tulosten tulkitseminen tapahtuu jännitysten kautta. Näiden jännitysten tulkitseminen on kuitenkin hankalaa ja työlästä. Tähän Dlubal on kehittänyt RFEM-ohjelmistossa olevan tulospalkin (englanniksi result beam). Tulospalkkia hyödyntämällä voidaan laskentamallista muodostaa läpileikkaus ja integroida jännityksistä voimasuureet halutulta alueelta. Tulospalkkia voidaan käyttää niin kaksi- kuin kolmiulotteisissa laskentamalleissa. (RFEM 2016, 148.)

#### 5.4 Kaksiulotteisen laskentamallin perusvoimasuureet

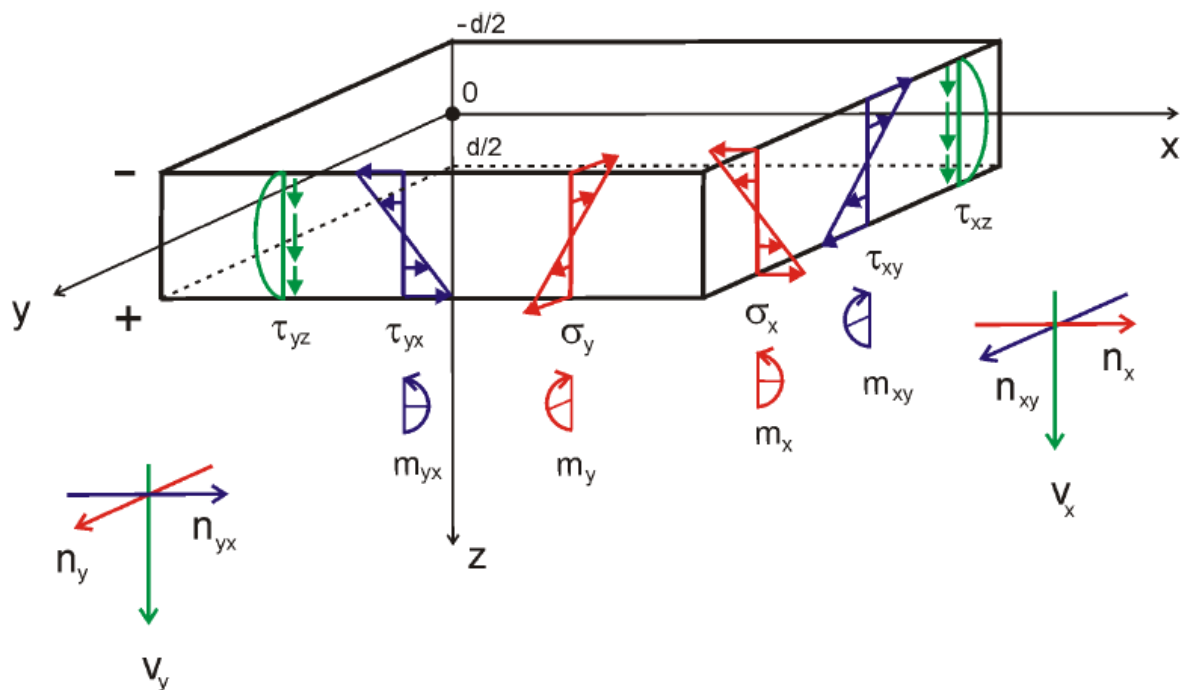
RFEM-ohjelmiston muodostamat perusvoimasuureet (englanniksi basic internal forces) ja jännitykset kaksiulotteisille laskentamalleille ovat

- taivutusmomentit x- ja y-akselin suuntaan,  $m_x$  ja  $m_y$

- vääntömomentit  $xy$ - ja  $yx$ -tasossa,  $m_{xy}$  ja  $m_{yx}$
- normaalivoimat  $x$ - ja  $y$ -akselin suuntaan,  $n_x$  ja  $n_y$
- leikkausvoimat pituussuuntaan tasoa  $x$ - ja  $y$ -akselin suuntaan,  $n_{xy}$  ja  $n_{yx}$
- leikkausvoimat kohtisuoraan tasoa  $x$ - ja  $y$ -akselin suuntaan,  $v_x$  ja  $v_y$
- normaalijännitykset  $x$ - ja  $y$ -akselin suuntaan,  $\sigma_x$  ja  $\sigma_y$
- leikkausjännitykset pituussuuntaan tasoa  $x$ - ja  $y$ -akselin suuntaan,  $\tau_{xy}$  ja  $\tau_{yx}$
- leikkausjännitykset kohtisuoraan tasoa  $x$ - ja  $y$ -akselin suuntaan,  $\tau_{xz}$  ja  $\tau_{yz}$

Perusvoimasuureita ja jännityksiä on havainnollistettu kuvassa 46.

(RFEM 2016, 336-338).



KUVA 46. RFEM-ohjelmiston havainnekuva kaksiulotteisen mallin sisäisistä voimasuureista ja jännityksistä (RFEM 2016, 337)

## 5.5 Kaksiulotteisen laskentamallin mitoitusvoimasuureet

RFEM-ohjelmiston muodostamat mitoitusvoimasuureet (englanniksi design internal forces) kaksiulotteisille laskentamalleille ovat

- mitoitusmomentti tason x-akselin suuntaisesti tason positiivisella puolella (eli z-akselin suuntaan positiivisella puolella),  $m_{x,D+}$
- mitoitustaivutusmomentti tason y-akselin suuntaisesti tason positiivisella puolella  $m_{y,D+}$
- mitoitustaivutusmomentti betonin jännitystarkasteluun tason positiivisella puolella,  $m_{c,D+}$
- mitoitustaivutusmomentti tason x-akselin suuntaisesti tason negatiivisella puolella  $m_{x,D-}$
- mitoitustaivutusmomentti tason y-akselin suuntaisesti tason negatiivisella puolella  $m_{y,D-}$
- mitoitustaivutusmomentti betonin jännitystarkasteluun tason negatiivisella puolella,  $m_{c,D-}$
- mitoitusvoima x-akselin suuntaan,  $n_{x,D}$
- mitoitusvoima y-akselin suuntaan,  $n_{y,D}$
- mitoitusvoima betonin jännitystarkasteluun,  $n_{c,D}$

(RFEM 2016, 336-338).

Mitoitusvoimasuureissa x- ja y-akselin suuntaisissa mitoitustaivutusmomenteissa huomioidaan vääntömomentti ja mitoitusnormaalivoimissa huomioidaan pituus-suuntainen leikkausvoima. Mitoitusvoimasuureet on muodostettu betonirakenteiden raudoitussuunnitteluun, sillä niin vääntömomentti kuin pituus-suuntainen leikkausvoima lisäävät betoniteräkseen kohdistuvaa vetoa. Mitoitusvoimasuureiden muodostamisen yleisimmät menetelmät ovat Wood and Armer -menetelmä sekä Baumann -menetelmä. RFEM-ohjelmiston käyttämä Wood and Armer -menetelmän mukainen mitoitusvoimasuureiden muodostuminen on esitetty kuvissa 47, 48 ja 49. Wood and Armer -menetelmän mukaiset mitoitusvoimasuureet ovat yleisesti ohjelmistossa kaikkien käyttäjien nähtävillä. Baumann -menetelmä on sisällytetty RFEM-ohjelmiston betonisten laattojen, levyjen ja kuorien raudoitussuunnitteluun käytettävään lisämaksulliseen RF-CONCRETE laskentamoduuliin. (RFEM 2016, 342.)

	Design moment in direction of local axis x on the positive side of the surface (i.e. side in direction of positive surface axis z)
$m_{x,D+}$	$m_x +  m_{xy} $ for $m_x \leq m_y$ and $m_x \geq - m_{xy} $
	for $m_x > m_y$ and $m_y \geq - m_{xy} $
	0 for $m_x \leq m_y$ and $m_x < - m_{xy} $
	$m_x + \frac{m_{xy}^2}{ m_y }$ for $m_x > m_y$ and $m_y < - m_{xy} $
	Design moment in direction of local axis y on the positive side of the surface (i.e. side in direction of positive surface axis z)
$m_{y,D+}$	$m_x +  m_{xy} $ for $m_x \leq m_y$ and $m_x \geq - m_{xy} $
	for $m_x > m_y$ and $m_y \geq - m_{xy} $
	$m_y + \frac{m_{xy}^2}{ m_x }$ for $m_x \leq m_y$ and $m_x < - m_{xy} $
	0 for $m_x > m_y$ and $m_x < - m_{xy} $
	Design moment for concrete stress design on positive side of surface
$m_{c,D+}$	$-2 m_{xy} $ for $m_x \leq m_y$ and $m_x \geq - m_{xy} $
	for $m_x > m_y$ and $m_y \geq - m_{xy} $
	$m_x - \frac{m_{xy}^2}{ m_x }$ for $m_x \leq m_y$ and $m_x < - m_{xy} $
	$m_y - \frac{m_{xy}^2}{ m_y }$ for $m_x > m_y$ and $m_x < - m_{xy} $

KUVA 47. Sisäisen z-akselin positiivisen puolen mitoitustaivutusmomentit (RFEM 2016, 343-345)

	Design moment in direction of axis x on negative side of surface	
$m_{x,D-}$	$-m_x +  m_{xy} $	for $m_x \leq m_y$ and $m_y \leq  m_{xy} $
		for $m_x > m_y$ and $m_x \leq  m_{xy} $
	$-m_x + \frac{m_{xy}^2}{ m_y }$	for $m_x \leq m_y$ and $m_y >  m_{xy} $
	0	for $m_x > m_y$ and $m_x >  m_{xy} $
	Design moment in direction of axis y on negative side of surface	
$m_{y,D-}$	$-m_y +  m_{xy} $	for $m_x \leq m_y$ and $m_y \leq  m_{xy} $
		for $m_x > m_y$ and $m_x \leq  m_{xy} $
	0	for $m_x \leq m_y$ and $m_y >  m_{xy} $
	$-m_y + \frac{m_{xy}^2}{ m_x }$	for $m_x > m_y$ and $m_x >  m_{xy} $
	Design moment for concrete stress design on negative side of surface	
$m_{c,D-}$	$-2 m_{xy} $	for $m_x \leq m_y$ and $m_y \leq  m_{xy} $
		for $m_x > m_y$ and $m_x \leq  m_{xy} $
	$-m_y - \frac{m_{xy}^2}{ m_y }$	for $m_x \leq m_y$ and $m_y >  m_{xy} $
	$-m_x - \frac{m_{xy}^2}{ m_x }$	for $m_x > m_y$ and $m_x >  m_{xy} $

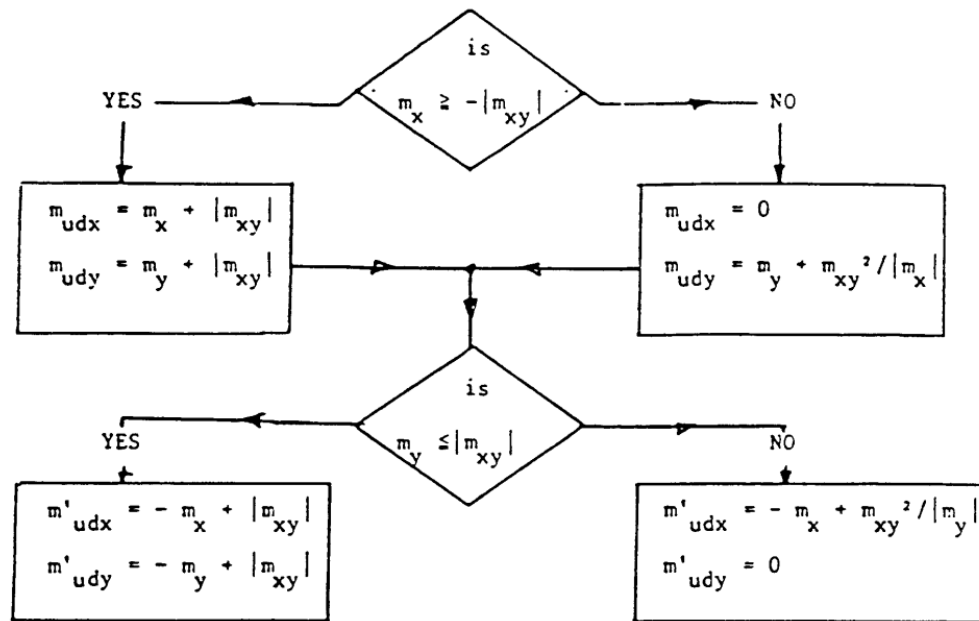
KUVA 48. Sisäisen z-akselin negatiivisen puolen mitoitusmomentit (RFEM 2016, 343-345)



	Design force in direction of local axis x
$n_{x,D}$	$n_x +  n_{xy} $ for $n_x \leq n_y$ and $n_x \geq - n_{xy} $
	for $n_x > n_y$ and $n_y \geq - n_{xy} $
	0 for $n_x \leq n_y$ and $n_x < - n_{xy} $
	$n_x + \frac{n_{xy}^2}{ n_y }$ for $n_x > n_y$ and $n_y < - n_{xy} $
	Design force in direction of local axis y
$n_{y,D}$	$n_y +  n_{xy} $ for $n_x \leq n_y$ and $n_x \geq - n_{xy} $
	for $n_x > n_y$ and $n_y \geq - n_{xy} $
	$n_y + \frac{n_{xy}^2}{ n_x }$ for $n_x \leq n_y$ and $n_x < - n_{xy} $
	0 for $n_x > n_y$ and $n_y < - n_{xy} $
	Design force for concrete stress design
$n_{c,D}$	$-2 n_{xy} $ for $n_x \leq n_y$ and $n_x \geq - n_{xy} $
	for $n_x > n_y$ and $n_y \geq - n_{xy} $
	$- n_x  - \frac{n_{xy}^2}{ n_x }$ for $n_x \leq n_y$ and $n_x < - n_{xy} $
	$- n_y  - \frac{n_{xy}^2}{ n_y }$ for $n_x > n_y$ and $n_y < - n_{xy} $

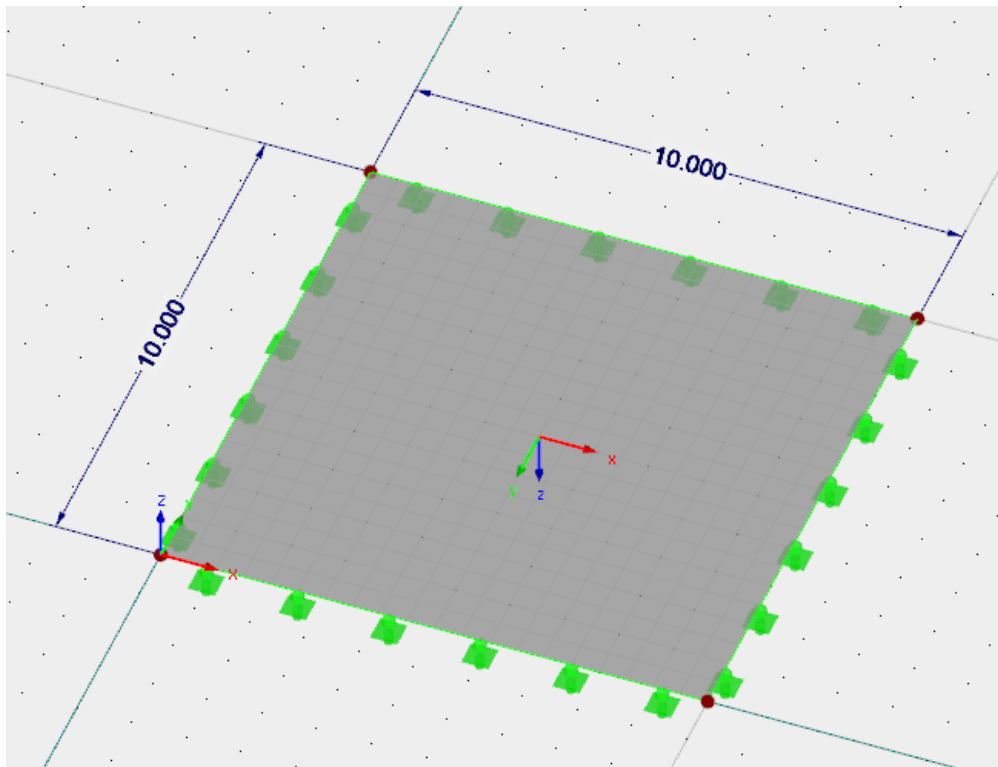
KUVA 49. Sisäisten x- ja y-akseleiden suuntaiset mitoitusnormaalivoimat (RFEM 2016, 343-345)

Wood and Armer -menetelmä on kehitetty vuonna 1968. Sama menetelmä on esitetty esistandardin ENV1992-1-1 liitteessä A2.8 vuokaaviona. Esistandardin vuokaavio on esitetty kuvassa 50. Tätä ei ole kuitenkaan esitetty nykyisessä Suomessa käytettävässä Eurokoodissa. (Wood 1968; RFEM 2016, 343-345.)



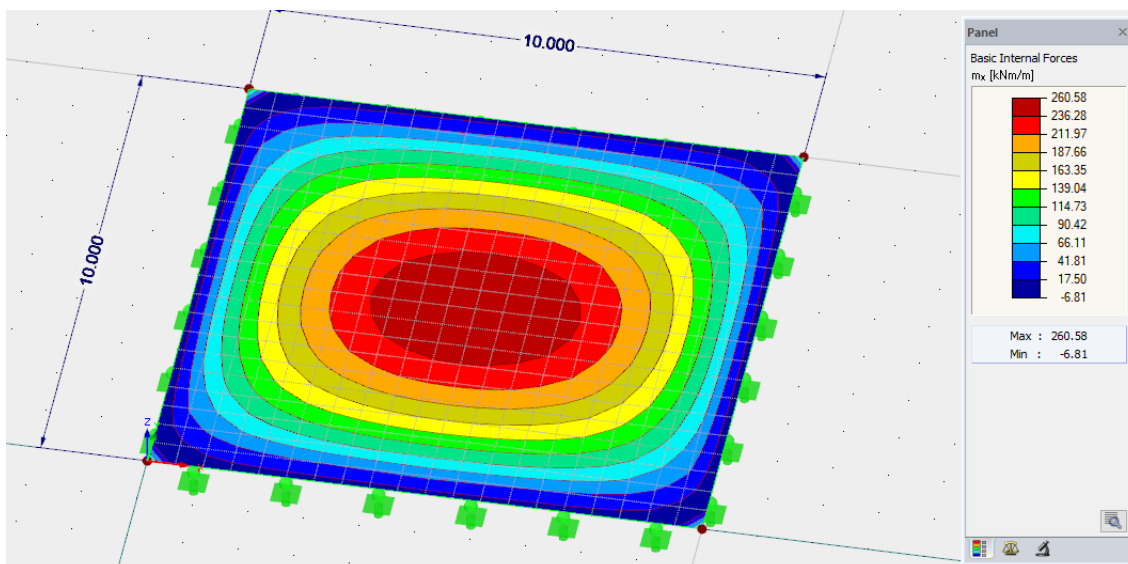
KUVA 50. Taivutusmomenttien ja vääntömomenttien yhdistäminen mitoitusvoimasuureiksi, vuokaavio esistandardista ENV 1992-1-1

Vääntömomentin vaikutus mitoitustaivutusmomenteissa voidaan havainnollistaa käytännön sovelluksessa, jossa on mallinnettu sivumitoiltaan 10 m ja 500 mm paksu laatta. Laattaa kuormittaa tasainen kuormitus ja se on tuettu neljältä sivulta tuilla, jotka tukevat laatan translaatiosiirtymiltä, mutta sallivat rotaatiosiirtymät eli käytännössä tuet ovat nivelellisiä. Laatan laskentamalli on esitetty kuvassa 51, jossa laatan keskellä näkyvä koordinaatisto kuvastaa sisäistä koordinaatistoa.

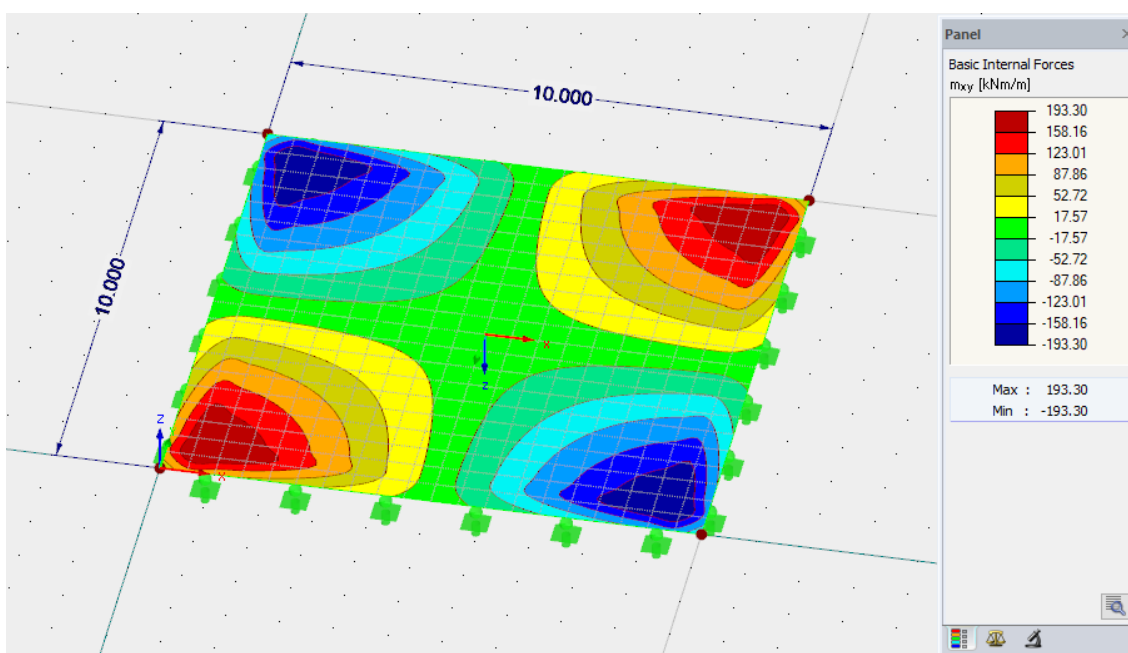


KUVA 51. Yksinkertainen laatan kaksiulotteinen laskentamalli

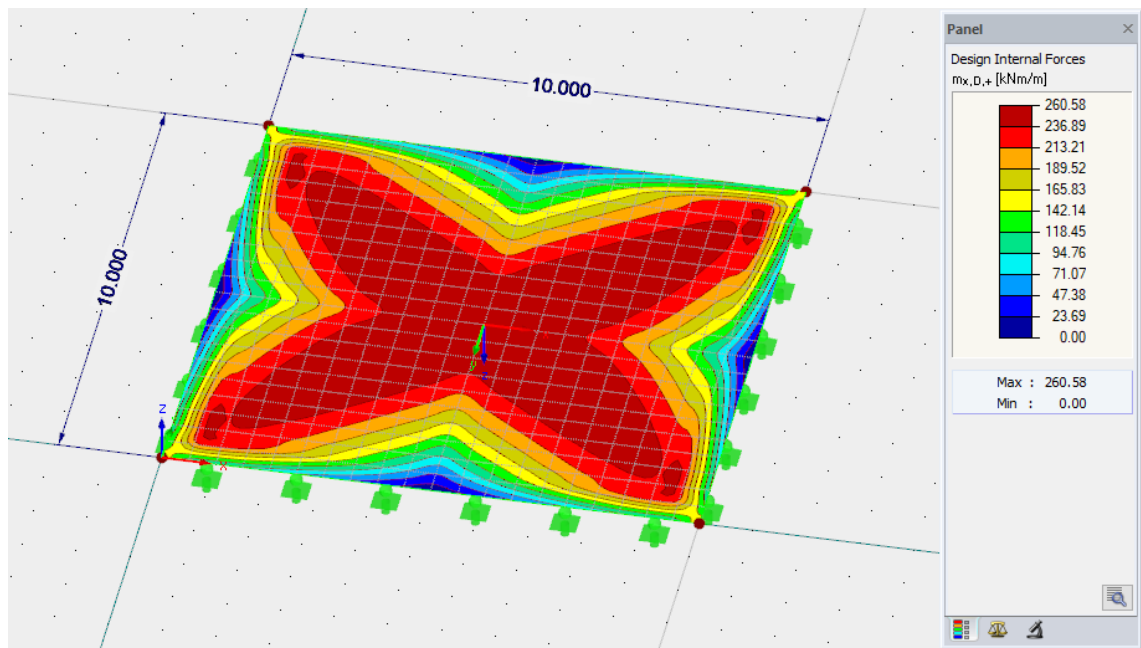
Kuvissa 52, 53 ja 54 on esitetty sisäisen x-akselin suuntainen taivutusmomentti, vääntömomentti xy-tasossa sekä näiden kautta muodostettu sisäisen x-akselin suuntainen ja sisäisen z-akselin positiivisen puolen eli alapinnan mitoitusmomentti. Kuvista huomataan vääntömomentin vaikutus ja se, miten vääntö- ja taivutusmomentin yhdistäminen lisää rasiitusta laatan nurkkapisteitä kohti. Tämä tarkoittaa käytännössä sitä, että maksimitaivutusmomentin mukaista raudoitusta täytyy levittää koko laatan alueelle. Sen sijaan, että raudoitus optimoidaan vain laatan keskialueelle.



KUVA 52. Sisäisen x-akselin suuntainen taivutusmomentti, maksimitaivutusmomentti 261 kNm/m



KUVA 53. Vääntömomentti xy-tasossa, maksimivääntömomentti +/-193 kNm/m



KUVA 54. Sisäisen x-akselin suuntainen mitoitustaivutusmomentti Wood and Armer -menetelmällä, mitoitustaivutusmomentti on edelleen 261 kNm/m, mutta sen vaikutusalue on laajempi vääntömomentin huomioimisen vaikutuksesta

Toinen RFEM-ohjelmiston käyttämä menetelmä vääntömomentin huomioimiseen on vuonna 1972 kehitetty Baumann-menetelmä, jota käytetään ohjelmiston sisäisessä laattojen, levyjen ja kuorien laskentaan tarkoitetussa lisämoduulissa RF-CONCRETE. Sama menetelmä on esitetty vanhentuneessa Betoninormikortti 7:ssä. Betoninormikortti on vanhentunut Rakennusmääräyskokoelman rajatilamitoituksen osalta, mutta ei elementtimenetelmän ja sen tuottamien voimasuureiden käsittelyn osalta. Baumann-menetelmä perustuu kappaleen raudoitussuuntien ja siihen kohdistuvien voimien minimienergiaperiaatteen mukaiseen tasapainotilaan. Tasapainotilaa kuvataan yhtälöillä (59), (60) ja (61), joissa materiaalin oletetaan käyttäytyvän lineaarisesti elastisesti. (Rombach 2011, 257-260; RC-CONCRETE 2018, 5.)

$$\cot^4 \varphi_1 + \cot^3 \varphi_1 \frac{\tan \alpha + k \cot \alpha}{1 - k} - \cot \varphi_1 \quad (59)$$

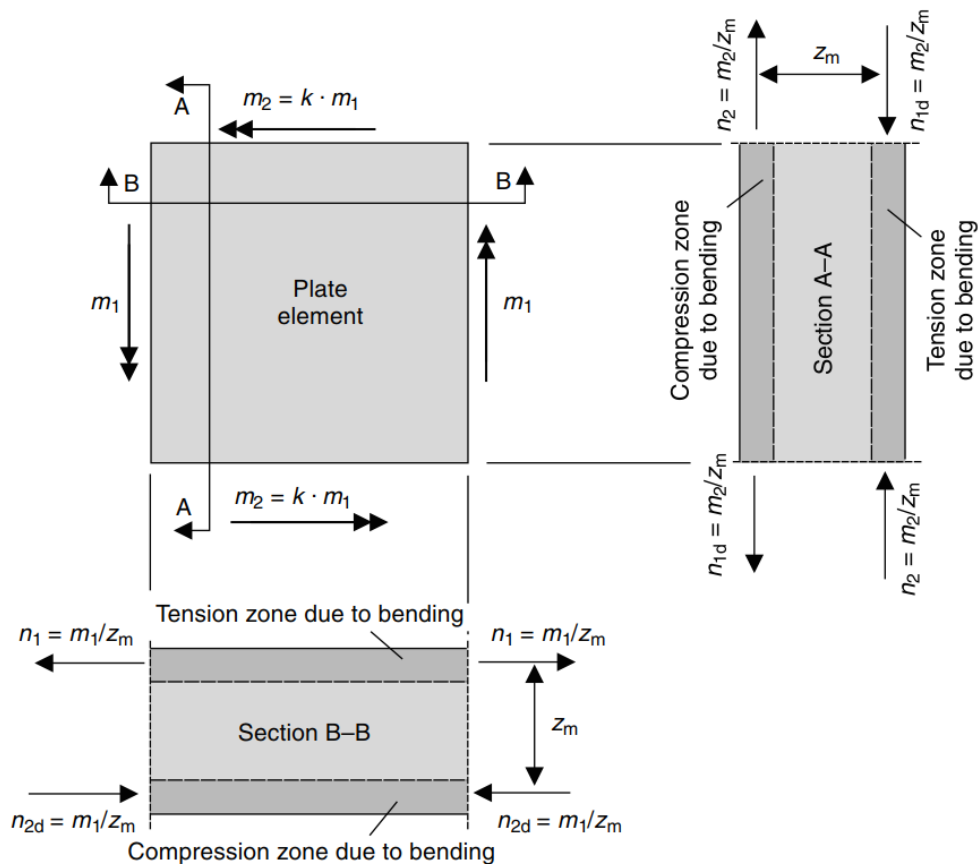
$$\frac{\cot \alpha + k \tan \alpha}{\lambda (1 - k)} - \frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{\lambda} (1 - \cot^4 \varphi_1)$$

$$\lambda = \frac{a_{sx}}{a_{sy}} \quad (60)$$

$$\nu = \frac{a_{sx}}{h} \frac{E_s}{E_c} \quad (61)$$

missä

- $\varphi$  on halkeaman kulma suhteessa raudoitukseen, ks. kuva 57
- $\alpha$  on raudoituksen kulma suhteessa kohdistuvaan vetoon, ks. kuva 57
- $k$  on taivutusmomenttien päätaivutusmomenttien  $m_2/m_1$  kautta voimaparin kautta muodostuvien päävoimien suhde  $n_2/n_1$ , ks. kuva 55
- $E_s$  on betoniteräksen kimmokerroin
- $E_c$  on betonin kimmokerroin
- $h$  on laatan paksuus
- $s_x$  on x-suunnan betoniteräksen tunnus
- $s_y$  on y-suunnan betoniteräksen tunnus



KUVA 55. Päätaivutusmomenttien muunnos normaalivoimiksi ylä- ja alapinnan tasoon (Rombach 2011, 257)

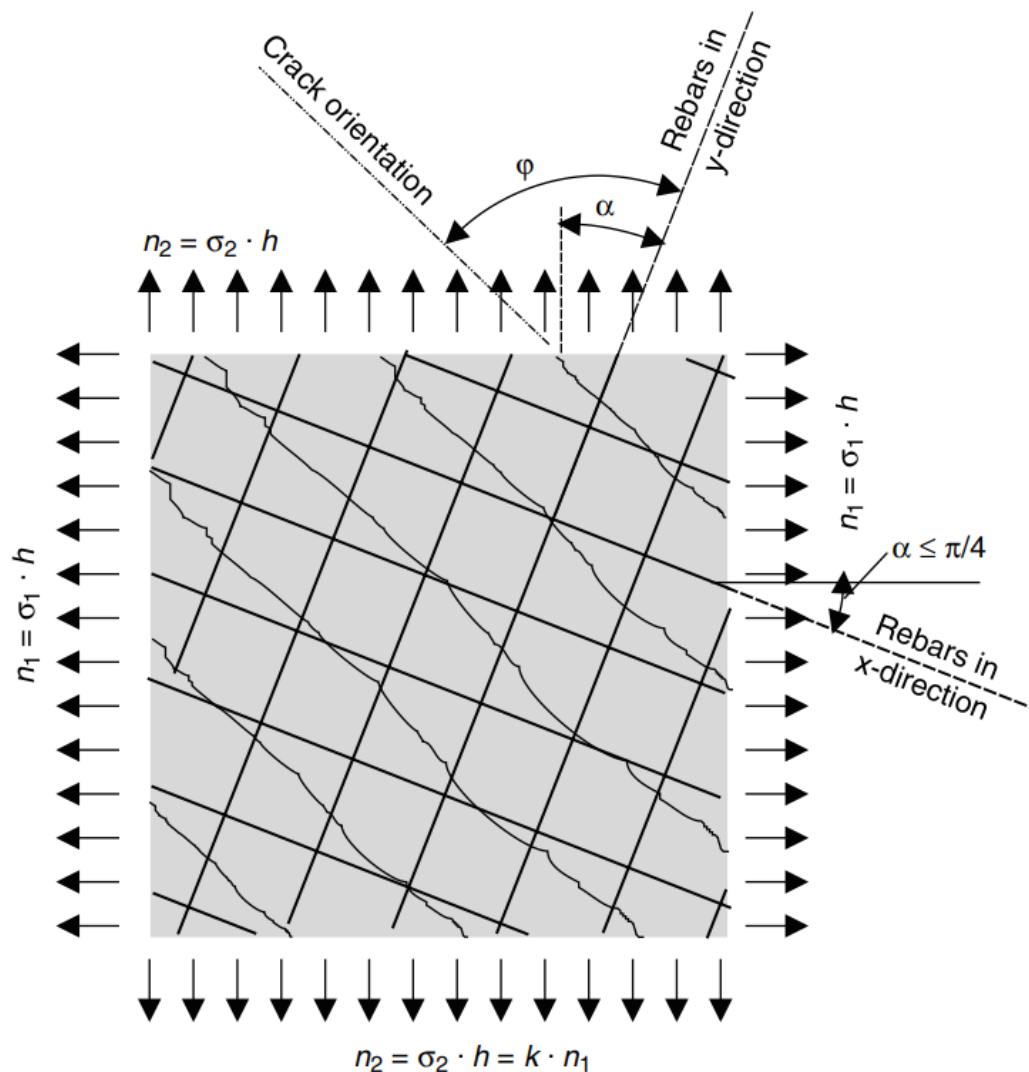
Yhtälöissä (59), (60) ja (61) tarvittavilla päätaivutusmomenteilla (englanniksi principal moments)  $m_1$  ja  $m_2$  tarkoitetaan pääakseleiden 1 ja 2 suuntaisia taivutusmomenteja. Pääakselin 1 suhteen taivutusmomentti on maksimiarvo ja pääakselin 2 suhteen taivutusmomentti on minimiarvo. Yhtälössä (59) tunnuksella  $\alpha$  kuvattiin näiden pääakseleiden eli samalla päätaivutusmomenttien kulmaa suhteessa betoniteräkseen. RFEM-ohjelmiston päätaivutusmomenttien ja edellä mainitun kulman muodostuminen on esitetty kuvassa 56. (Rombach 2011, 257-260; RFEM 2016.)

	Bending moment in direction of principal axis 1
$m_1$	$\frac{1}{2} \left( m_x + m_y + \sqrt{(m_x - m_y)^2 + 4m_{xy}^2} \right)$
	Bending moment in direction of principal axis 2
$m_2$	$\frac{1}{2} \left( m_x + m_y - \sqrt{(m_x - m_y)^2 + 4m_{xy}^2} \right)$
	Angle between local axis x (or y) and principal axis 1 (or 2)
$\alpha_b$	$\frac{1}{2} \left[ \arctan \left( \frac{2m_{xy}}{m_x - m_y} \right) \right]$

KUVA 56. Päätaivutusmomentit  $m_1$  ja  $m_2$  ja niiden välinen kulma  $\alpha_b$  suhteessa sisäiseen x- tai y-akseliin (RFEM 2016, 340)

Kuvasta 56 huomataan, että päätaivutusmomenteissa on huomioitu vääntömomentin vaikutus. Kulmasta  $\alpha$  käytetään tunnusta  $\alpha_b$  ja se kuvastaa päätaivutusmomentin kulmaa suhteessa laatan sisäiseen koordinaatiston x- ja y-akselin suuntaan. Tyypillisesti rauditus sijoitetaan juurikin laatan sivujen eli x- ja y-akselin suuntaisesti. Baumann-menetelmässä näitä päätaivutusmomenteja käsiteltiin voimaparimuunnoksen kautta niin kutsutulla sandwich-menetelmällä, aivan kuten yhtälöissä (59), (60) ja (61) ja kuvassa 55 esitettiin. Huomionarvoista siis on, että Baumann-menetelmässä rakennesuunnittelijan on tunnettava alustava betoniteräksen koko ja sijainti. (Rombach 2011, 257-260; RFEM 2016, 340.)

Raudoitussuuntien, päätaivutusmomenttien ja niiden suuntien sekä normaalivoimamuunnoksen jälkeen tasoja voidaan tarkastella erikseen. Tasoissa voidaan muodostaa minimienergiaperiaatteen mukainen tasapainotila. Alla esitetty kuva 57 tukee yhtälöitä (59), (60), (61) ja on kuvan 55 sandwich-mallin taso, johon vetävät normaalivoimat kohdistuvat. Kuvaa 57 tarkastelemalla huomataan, että betoniterästen suunnat tiedetään (laatan, levyn tai kuoren sisäisen x- ja y-akselin suuntaisesti), voimien suunnat suhteessa näihin tiedetään ( $\alpha_b$  kulma suhteessa edellä mainittuihin x- ja y-akseliin). Halkeaman kulmaa suhteessa raudoitukseen ei tiedetä. Kuvassa 57 halkeaman kulmaa suhteessa y-suunnan betoniteräksiin on merkitty tunnuksella  $\varphi$ . (Rombach 2011, 258.)



KUVA 57. Halkeamien kulma suhteessa raudoitukseen sekä raudoituksen kulma suhteessa kohdistuvaan normaalivoimaan havainnollistettuna (Rombach 2011, 258)



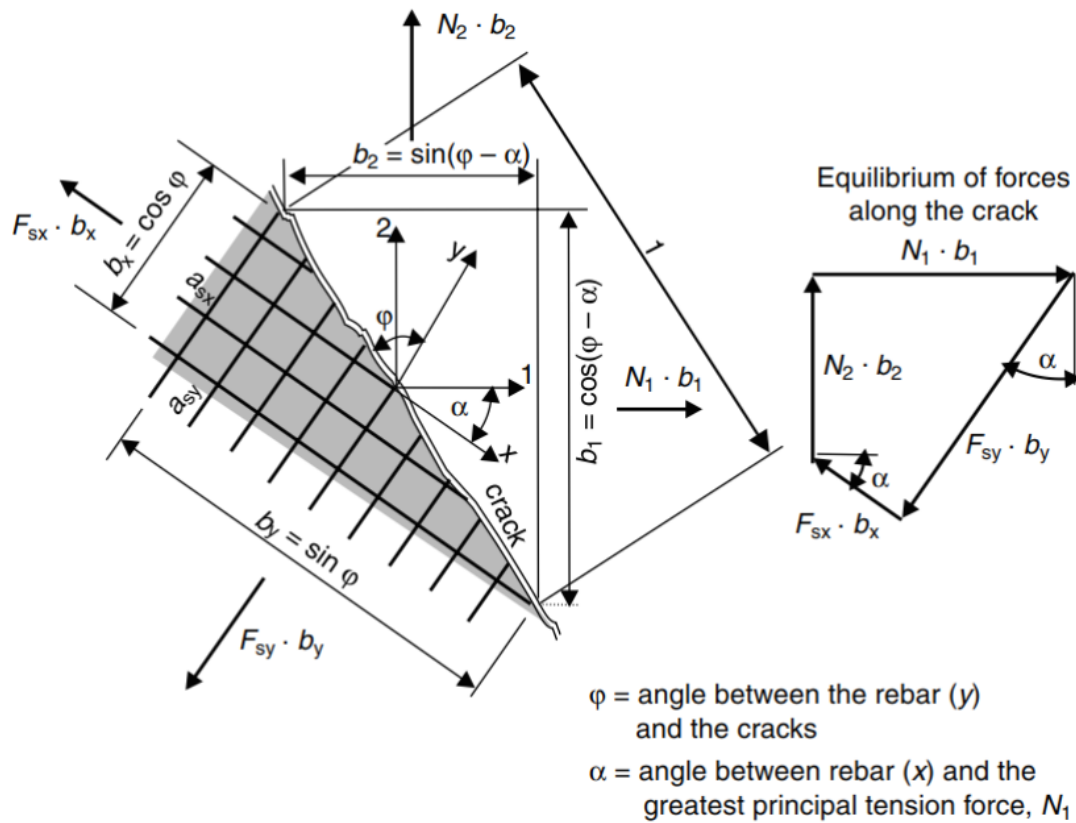
Rombach (2011) käsittelee kuvan 57 jälkeen halkeaman kulmaa suhteessa y-suunnan betoniteräksiin tunnuksella  $\varphi_1$ , kun leikkausvoimia ei oteta huomioon ja tunnuksella  $\varphi_2$ , kun betoniteräs on saavuttanut myötölujuutensa. Mikäli molempien suuntien betoniteräkset saavuttavat myötölujuutensa saadaan yhtälöt (62) ja (63), minkä perusteella voidaan laskea kulma  $\varphi_2$ . (Rombach 2011, 257-260.)

$$\tan \varphi_2 = -C + \sqrt{C^2 + \lambda} \quad (62)$$

$$C = \frac{1 + \tan^2 \alpha * (k - \lambda) - k * \lambda}{2 * \tan \alpha * (1 - k)} \quad (63)$$

Menetelmän lähestymistapaa voidaan myös yksinkertaistaa olettamukseen, että molemmissa suunnissa betoniteräksissä vaikuttaa sama jännitys, tämä oletamus ei tosin ole aina mahdollista. Tähän olettamukseen perustuen  $\varphi$  ja  $\varphi_1$  ovat vakio  $\pi/4$ . (Rombach 2011, 257-260.)

Näiden periaatteiden ja yhtälöiden pohjalta voidaan soveltaa Baumann-menetelmää. Rombachin (2011) kuvan 58 esimerkissä on tarkasteltu kappaletta, johon kohdistuu vetoa kahteen eri suuntaan. Voimaparin kautta muunnettuja normaali-voimia on kuvattu tunnuksilla  $N1$  ja  $N2$ , niiden vaikutusleveys on projisoitu kohtisuoraan tarkasteltavaa halkeamaa kohti. Halkeaman pituus on 1. Voimien tasapainotilan muodostus on havainnollistettu kuvassa oikealla graafisesti. Kuvassa 59 tämä graafinen esitys on kuvattu myös matemaattisin kaavoin, joissa on esitetty raudoituksiin aiheutuvat normaalivoimat  $F_{sx}$  ja  $F_{sy}$ . (Rombach 2011, 257-260.)

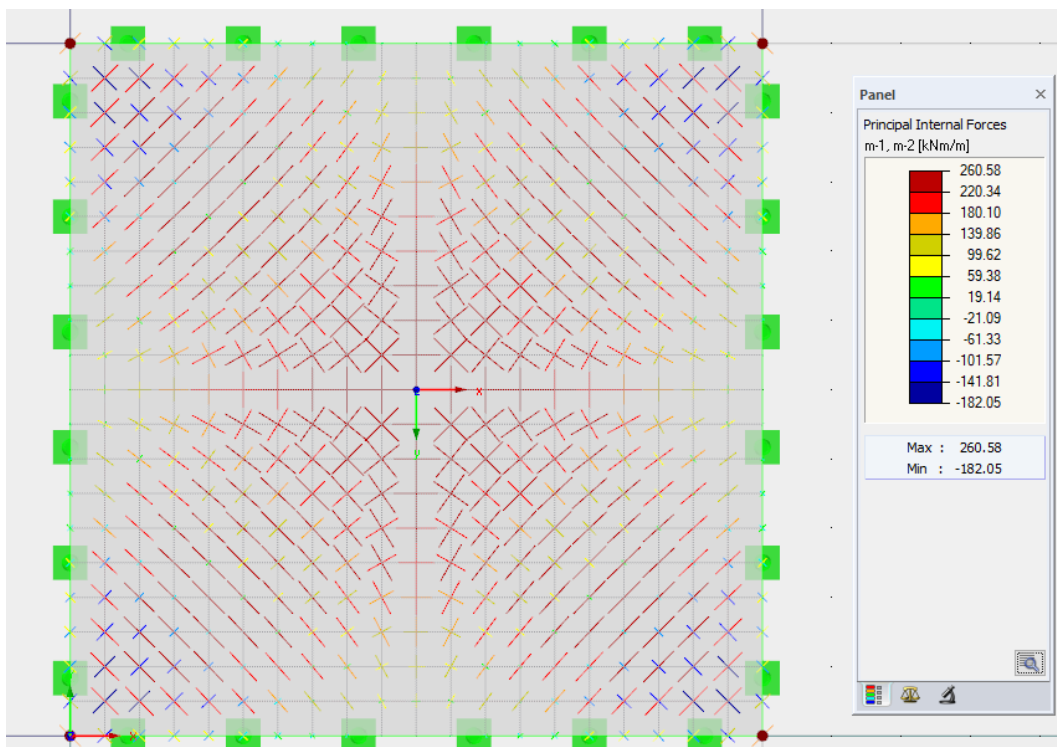


KUVA 58. Vektorasitusten ja raudoituksen tasapainotila, graafinen esitys (Rombach 2011, 259)

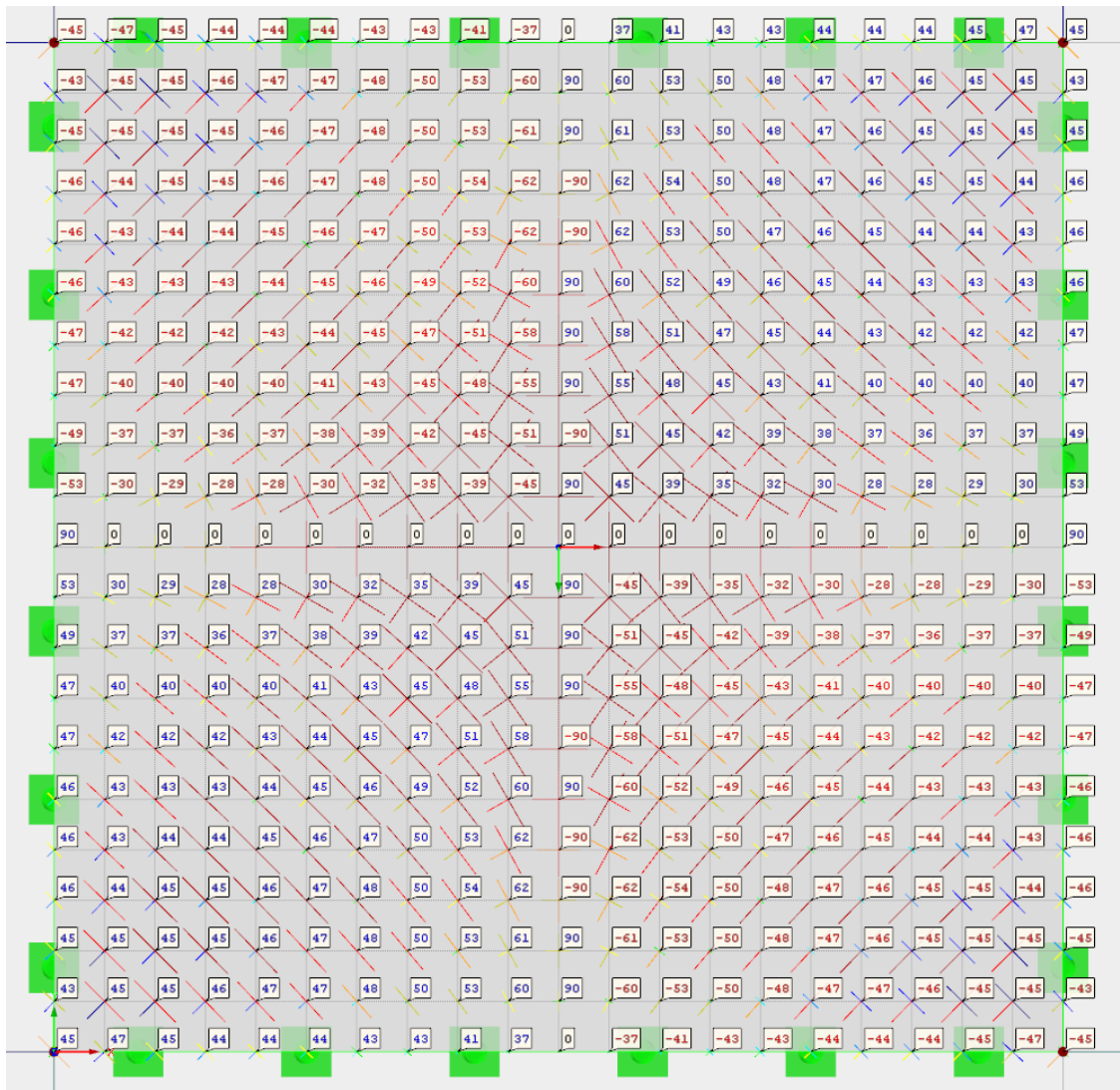
$k$	$k = n_2/n_1 \geq \tan(\alpha + \pi/4) \cdot \tan \alpha$
$\varphi =$	$\pi/4$
$F_{sx} =$	$n_1 + \frac{n_1 - n_2}{2} \cdot \sin 2\alpha \cdot (1 - \tan \alpha)$
$F_{sy} =$	$n_2 + \frac{n_1 - n_2}{2} \cdot \sin 2\alpha \cdot (1 + \tan \alpha)$
$F_c =$	$(n_1 - n_2) \cdot \sin 2\alpha$

KUVA 59. Vektorasitusten ja raudoituksen tasapainotila, yhtälöt (Rombach 2011, 259)

RFEM-ohjelmiston RF-CONCRETE lisämoduuli käsittelee laattaa tämän teorian mukaisesti. Kuvissa 60 ja 61 on havainnollistettu päätaivutusmomenteja ja niiden suuntia suhteessa tarkasteltavan laatan sisäiseen koordinaatistoon.

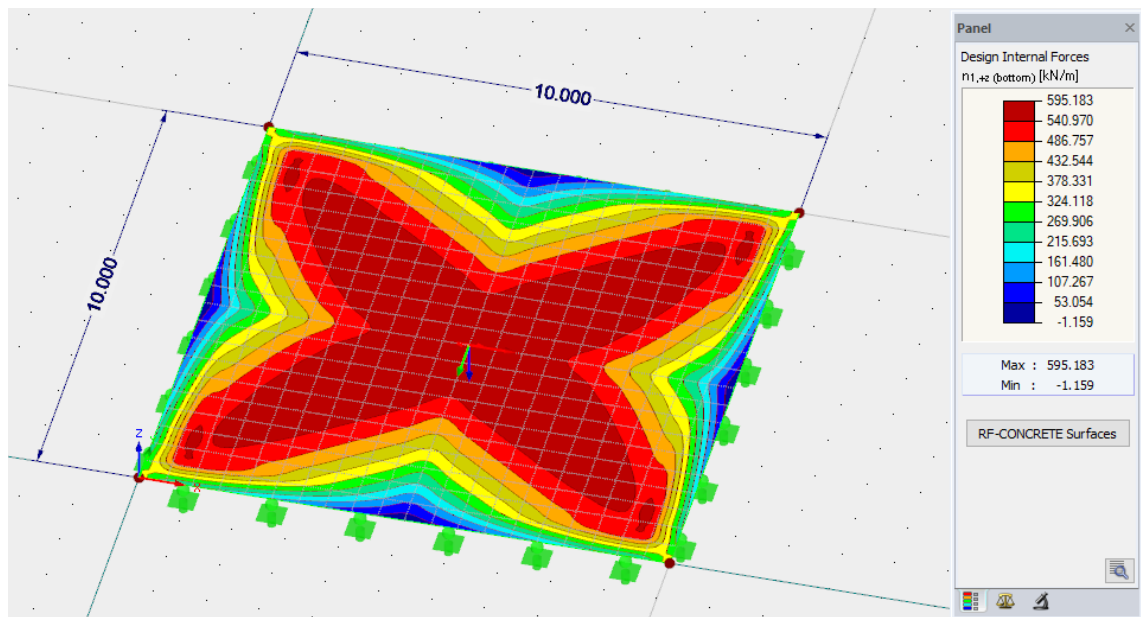


KUVA 60. Päätaivutusmomentit ja niiden vaikutussuunnat graafisesti, suurin päätaivutusmomentti 261 kNm/m



KUVA 61. Päätaivutusmomenttien vaikutussuunnat suhteessa sisäiseen koordinaatistoon

Kuvan 60 suurin päätaivutusmomentti ja sen jakauma, jossa on huomioitu myös vääntömomentti, vastaa Wood and Armer -menetelmällä saatuja mitoitustaivutusmomentteja ja jakaumaa. Tässä yksinkertaisessa sovelluksessa menetelmien huomataan antavan samanlaisia tuloksia. Baumann-menetelmän mukaisesti RF-CONCRETE muodostaa päätaivutusmomentin kautta suurimman raudoituksen suuntaisen vedon, joka tässä tapauksessa on 595 kN/m (kuva 62), sisäisenä momenttivartena on käytetty 0,438 m.



KUVA 62. Alapinnan suuntainen suurin veto sisäisellä momenttivarrella 0,438 m ja sen vaikutussuunta punaisella merkinnällä laatan keskipisteessä

Kaksiulotteiselle laskentamallille tulosten tulkinta on kehittyntä ja käytettävissä on ainakin kaksi eri menetelmää mitoittavien voimasuureiden muodostamiseen ja raudoitussuunnitteluun. Yksinkertaisella käytännönsovelluksessa Wood and Armer – ja Baumann-menetelmän huomataan antavan esimerkissä samankaltaisia tuloksia, mutta eri tavalla. Wood and Armer -menetelmä on menetelmistä yksinkertaisempi ja sen antamissa voimasuureissa ei tarvitse lähtötiedoksi betoniterästen kokoa ja sijaintia. Lisäksi Wood and Armer -menetelmä on sisällytetty RFEM-ohjelmiston perusversioon, jolloin menetelmä on kaikkien käyttäjien saatavilla, Baumann-menetelmän ollessa lisämaksullisessa RF-CONCRETE laskentamoduulissa. Wood and Armer -menetelmä on myös yleisempi menetelmä, sen ollessa sisällytetty moneen kaupalliseen elementtimenetelmäohjelmistoon.

## 5.6 Kolmiulotteisen laskentamallin jännitysten tulkitseminen

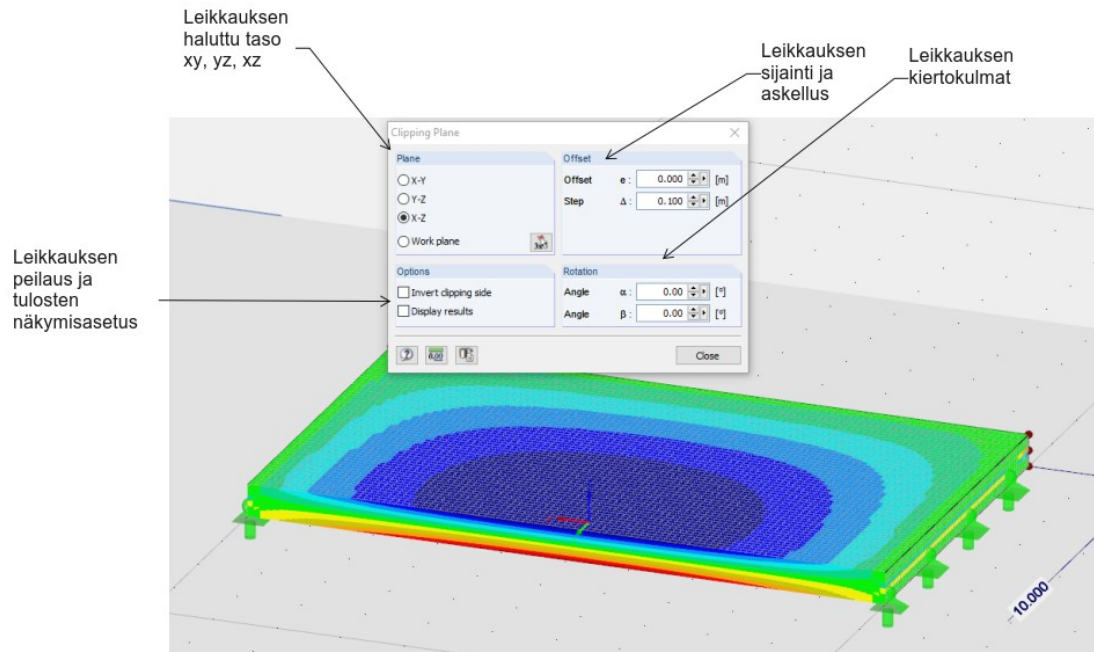
Kolmiulotteisella laskentamallilla kalvovoimia, taivutusmomentteja tai leikkausvoimia ei muodostu. Saatavat tulokset ovat siirtymät, venymät ja jännitykset. RFEM-ohjelmiston muodostamat jännitykset kolmiulotteiselle laskentamallille ovat

- normaalijännitykset mallitilan globaalin koordinaatiston x-, y- ja z-akselin suuntaan:  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$

- leikkausjännitys mallitilan globaalien koordinaatiston xy-tasossa,  $\tau_{xy}$
  - leikkausjännitys mallitilan globaalien koordinaatiston xz-tasossa,  $\tau_{xz}$
  - leikkausjännitys mallitilan globaalien koordinaatiston yz-tasossa,  $\tau_{yz}$
- (RFEM 2016, 336-338).

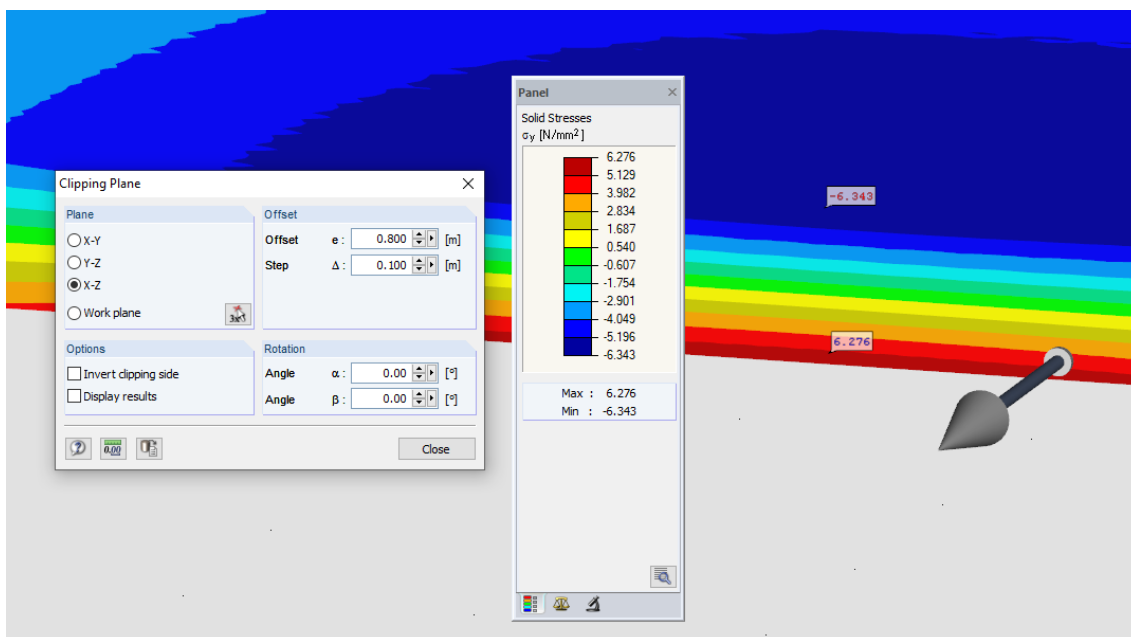
RFEM-ohjelmisto muodostaa yllä esitetyt jännitykset kolmiulotteisen laskentamallin solmuihin eli saatavien tulosten tarkkuus riippuu elementtitiheydestä. Hankalaksi ja työlääksi jännitysten tulkinnan tekee suuri tiedon määrä. Käsiteltäessä samaa käytännön sovellusta kuin luvussa 5.5, sivumitoiltaan 10 m ja 500 mm paksuiseen laattaan muodostuu 60 000 tiiliskivielementtiä 0,1 m elementin suurimmalla sallitulla sivumitalla. Elementtitiheyden arviointi on rakennesuunnittelijan vastuulla. Tässä tapauksessa 0,1 m suurin sallittu elementtitiheys luo 5 elementtiä korkeussuunnassa, mikä on hyvin karkea elementtitiheys. Elementtien määrään korkeussuunnassa voitaisiin soveltaa luvun 2.2.1 mukaista RFEM-ohjelmiston suosittelemaa 8-10 elementtimäärää tukivälille, suositeltava määrä olisi syytä olla tätäkin suurempi. 0,05 m elementin suurimmalla sallitulla sivumitalla, eli korkeussuunnassa 10 elementillä, saadaan laskentamalliin jo 120 000 tiiliskivielementtiä.

Jännityksiä pystytään tulkitsemaan värikuvaajan ja skaalan kautta tai yksittäisen solmukohdan arvojen perusteella. Solmusuureiden tulkinta on tarkempaa, mutta RFEM-ohjelmisto luo tarkan taulukoidun (englanniksi table) tiedon vain nollapintojen eli globaalien mallitilan solmujen jännityksistä. Rakennesuunnittelijaa kiinnostaa jännitysten suuruus ja jakautuminen poikkileikkauksessa, eli kolmiulotteisen laskentamallin sisällä. Tähän tarkoitukseen voidaan käyttää leikkaustyökalua (englanniksi clipping plane), jonka käyttö ja asetukset on esitetty kuvassa 63. (RFEM 2016, 368.)

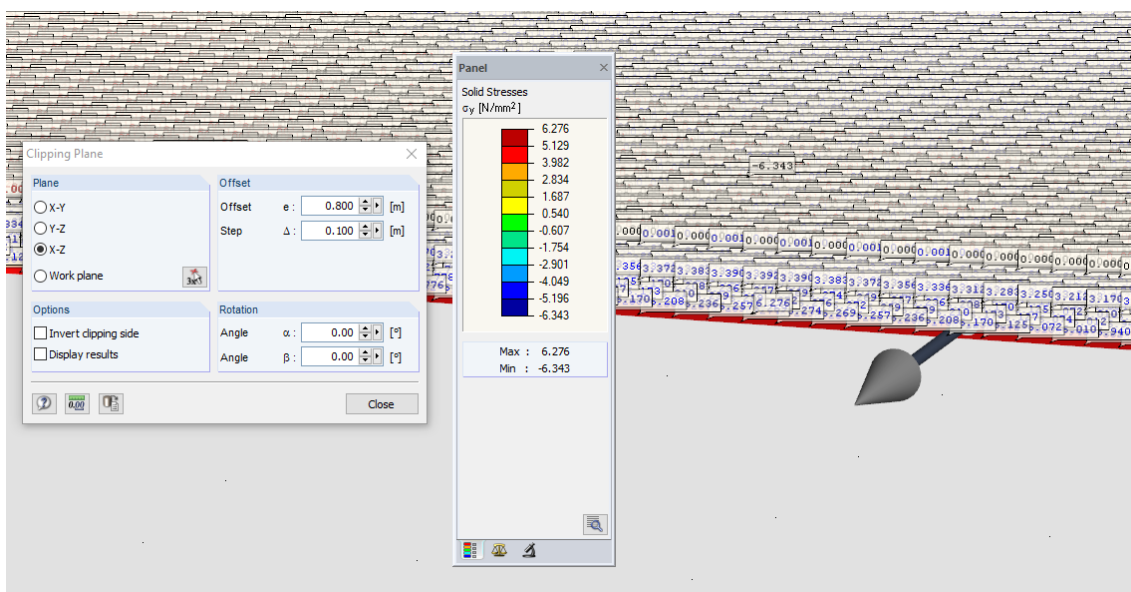


KUVA 63. Leikkaustyökalun käyttö RFEM-ohjelmistossa

Leikkaustyökalulla sisäisten jännitysten jakautumista voidaan tulkita värikuvaajan ja skaalan avulla halutusta kohdasta kolmiulotteista laskentamallia. RFEM-ohjelmisto muodostaa nopeasti maksimi- ja minimiarvot ja näyttää solmut, joissa jännitykset vaikuttavat. Kuvassa 64 on esitetty laskentamallin leikkaus, väriskaala ja y-suunnan normaalijännityksen maksimi- ja minimiarvot. Mikäli tuloksia haluttaisiin tarkastella tarkemmin, eli tutkia solmusuureita laajemmalta alueelta, on ainut tapa asettaa tulokset näkyviin jokaisessa solmussa. Mikäli kolmiulotteisen laskentamallin tarkkuus halutaan pitää hyvänä, on solmuja ja solmusuureita paljon, mitä on havainnollistettu kuvassa 65.



KUVA 64. Kolmiulotteisen laskentamallin leikkaus, väriskaala ja normaalijännityksen maksimi- ja minimiarvot globaalin y-akselin suuntaisesti



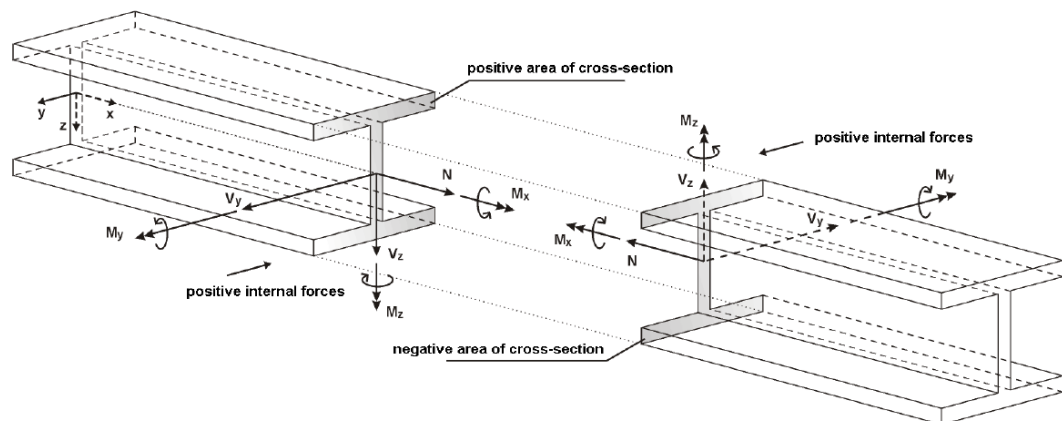
KUVA 65. Kolmiulotteisen laskentamallin leikkaus, väriskaala ja kaikkien solmujen normaalijännitykset globaalin y-akselin suuntaisesti

Lujuusopin perusyhtälöiden mukaan jännitysten kautta voimasuureet pystyttäisiin muodostamaan, mutta itse jännitysten tulkitseminen on hankalaa. Tulkitsemiseen lisähaasteen tuo vääntömomentti ja sen huomioiminen. Jännityksiä voidaan kuitenkin käsitellä tulospalkilla (englanniksi result beam), jonka ominaisuuksia ja käyttöä käsitellään seuraavassa luvussa.



## 5.7 Kolmiulotteisen laskentamallin tulokset tulospalkilla

Niin kaksi- kuin kolmiulotteisilla laskentamalleilla voidaan RFEM-ohjelmistossa hyödyntää tulospalkkia, joka integroi halutun alueen jännityksistä voimasuureita. Tulospalkilla saatavat voimasuureet ovat sauvan voimasuureita eli yksiulotteisia voimasuureita. Niiden muodostuminen RFEM-ohjelmistossa on esitetty kuvassa 66. (RFEM 2016, 8).

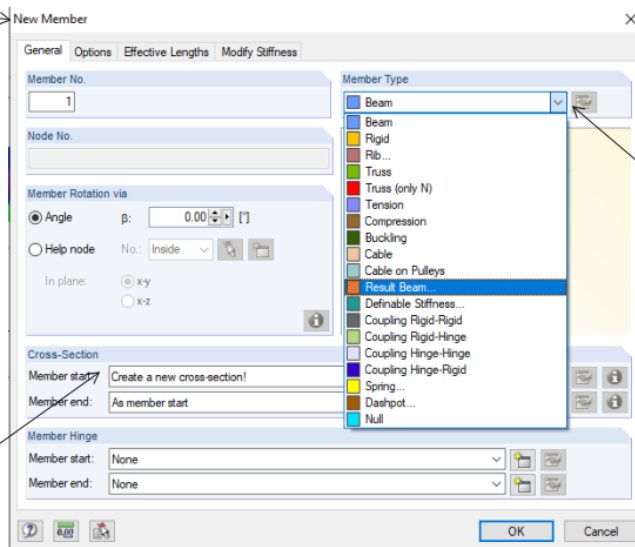


KUVA 66. RFEM-ohjelmiston muodostamat voimasuureet sauvoille

RFEM-ohjelmistossa käyttäjä voi asettaa tulospalkin mihin tahansa kohtaan laskentamallia. Tulospalkki mallinnetaan laskentamalliin sauvaelementtinä, jonka ominaisuudeksi on valittu tulospalkki. Sauvaelementtityökalun asetukset on esitetty kuvassa 67. (RFEM 2016, 147-148.)

Sauvaelementti-  
työkalu

Sauvalle on myös  
annettava  
poikkileikkaus,  
mutta tällä on  
merkitystä vain  
mikäli palkki  
mitoitetaan RFEM-  
ohjelmiston  
laskentamoduuleilla



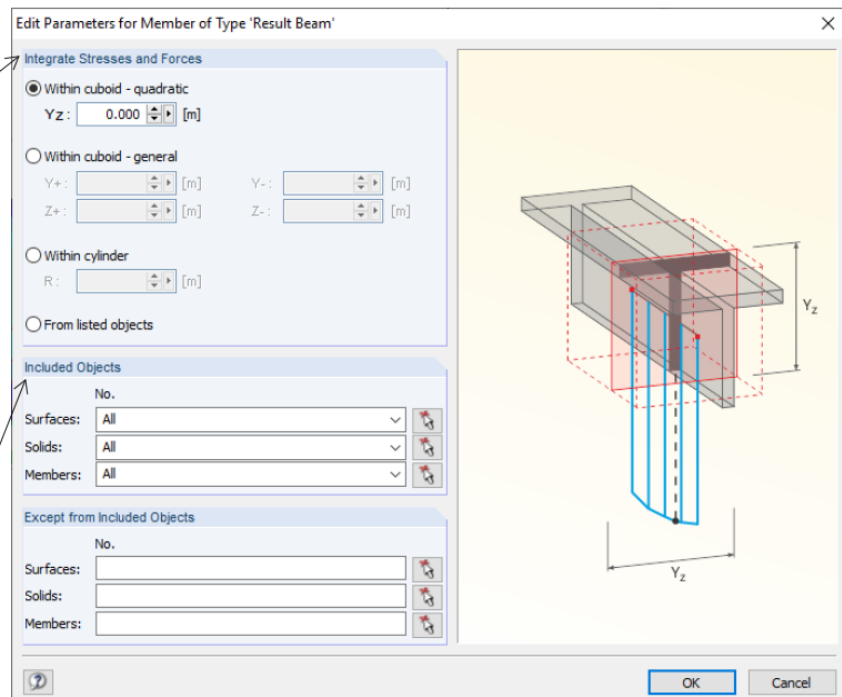
Valitaan sauvan  
tyypiksi  
tulospalkki

KUVA 67. Sauvaelementin muuntaminen tulospalkiksi

Tämän jälkeen tulospalkille on annettava halutut asetukset eli integroitava alue ja elementit, joista voimasuureet integroidaan. Integroitava alue voidaan antaa neliönä, suorakaiteena tai pyöreänä. Tulospalkin asetukset on esitetty kuvassa 68.

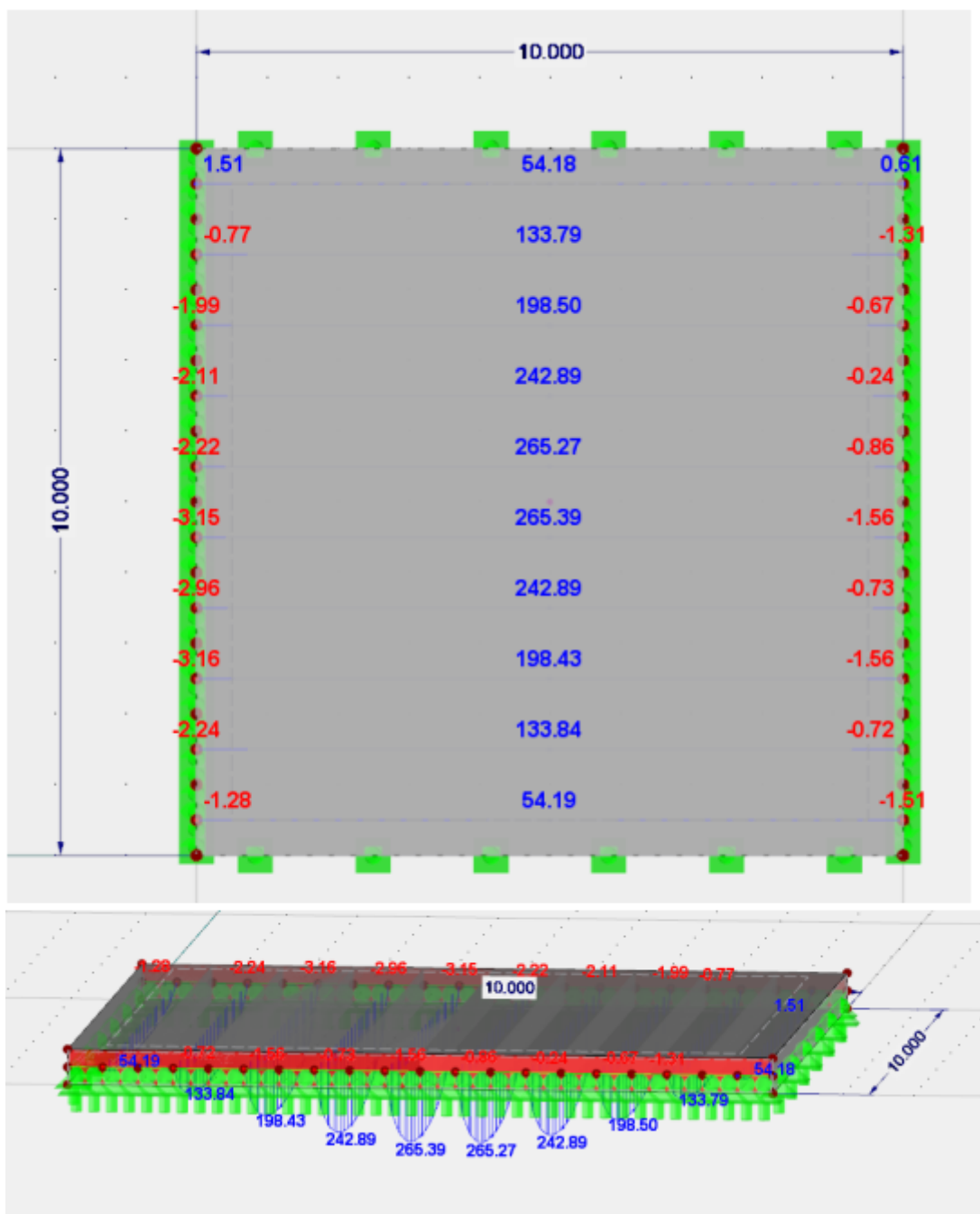
Integroitavan  
alueen määrittäminen  
- neliö  
- suorakaide  
- pyöreä

Integroitavien  
elementtien  
määrittäminen

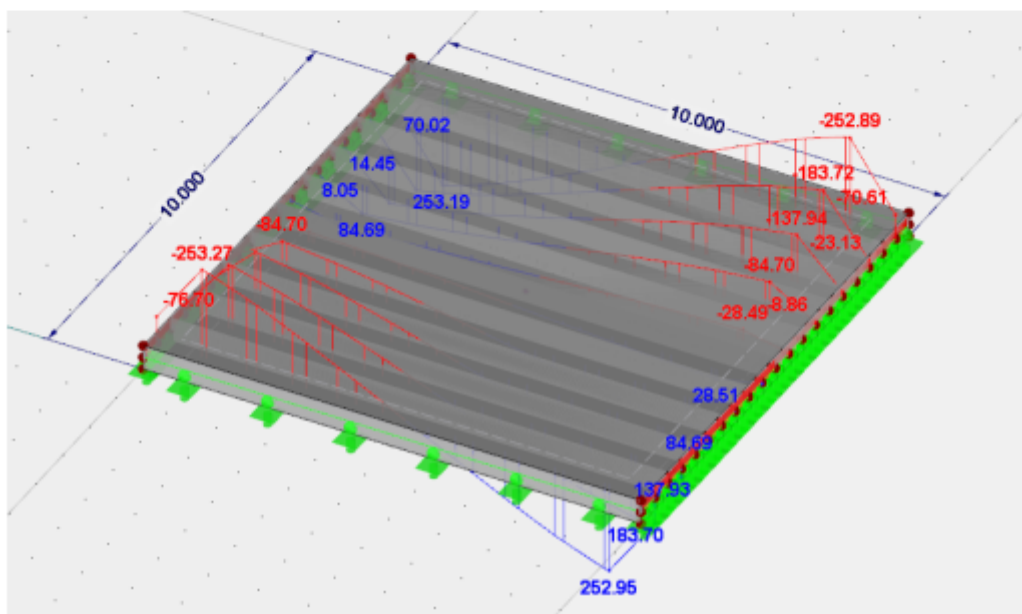
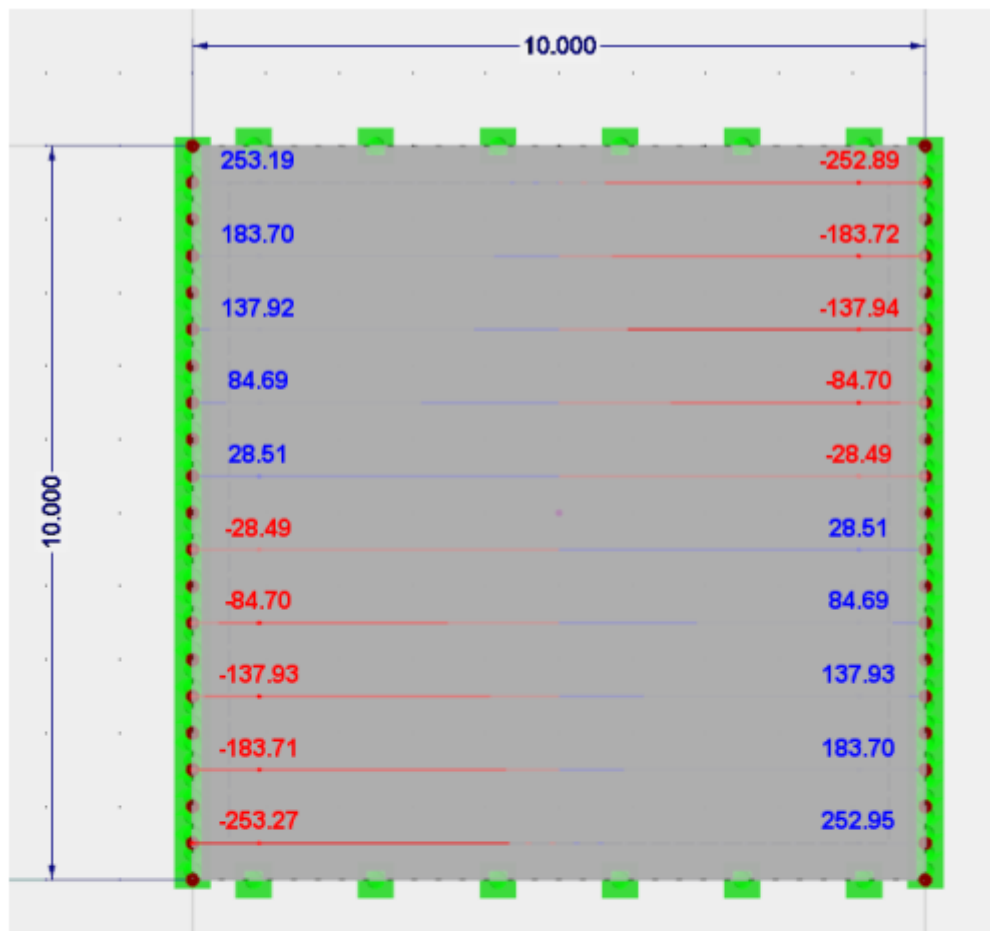


KUVA 68. Tulospalkin asetukset

Mallintamalla 10 tulospalkkia leveydeltään 1000 mm voidaan luvun 5.6 kolmiulotteista laskentamallia käsitellä 1 metrin kaistoina. Kuvassa 69 on esitetty taivutusmomentti  $M_y$  sauvan sisäisen y-akselin ympäri sekä kuvassa 70 vääntömomentti  $M_T$ . Kuvista voidaan huomata tässä yksinkertaisessa käytännön sovelluksessa suuruusluokkien paikkansa pitävyys verrattuna kaksiulotteiseen laskentamalliin.



KUVA 69. Tulospalkkien taivutusmomentit, suurin taivutusmomentti kentässä 265 kNm/m, ero kaksiulotteiseen antamaan taivutusmomenttiin on +1,5%



KUVA 70. Tulospalkkien vääntömomentit, suurin vääntömomentti on +/- 253 kNm/m, ero kaksikulotteiseen laskentamalliin on +23%

Tulospalkilta saatavista tuloksista ei automaattisesti pystytä laskemaan Wood and Armer- tai Baumann -menetelmien mukaisia taivutus- ja vääntömomentin yh-

distäviä mitoitusvoimasuureita, vaan tämä täytyy tehdä käsin. Tämän takia kaksiulotteinen laskentamalli on suositeltavampi ja yksinkertaisempi vaihtoehto mitoitettavien voimasuureiden muodostamiseksi. Lisäksi tulospalkin integrointimenetelmistä ei löytynyt RFEM-manuaalista tarkempia perusteita. Tulospalkki on lisäksi työkalu työkalun sisällä, joten sen käytön tulisi olla suunnittelua tukevaa, eikä sitä pääasiallisesti ohjaavaa.

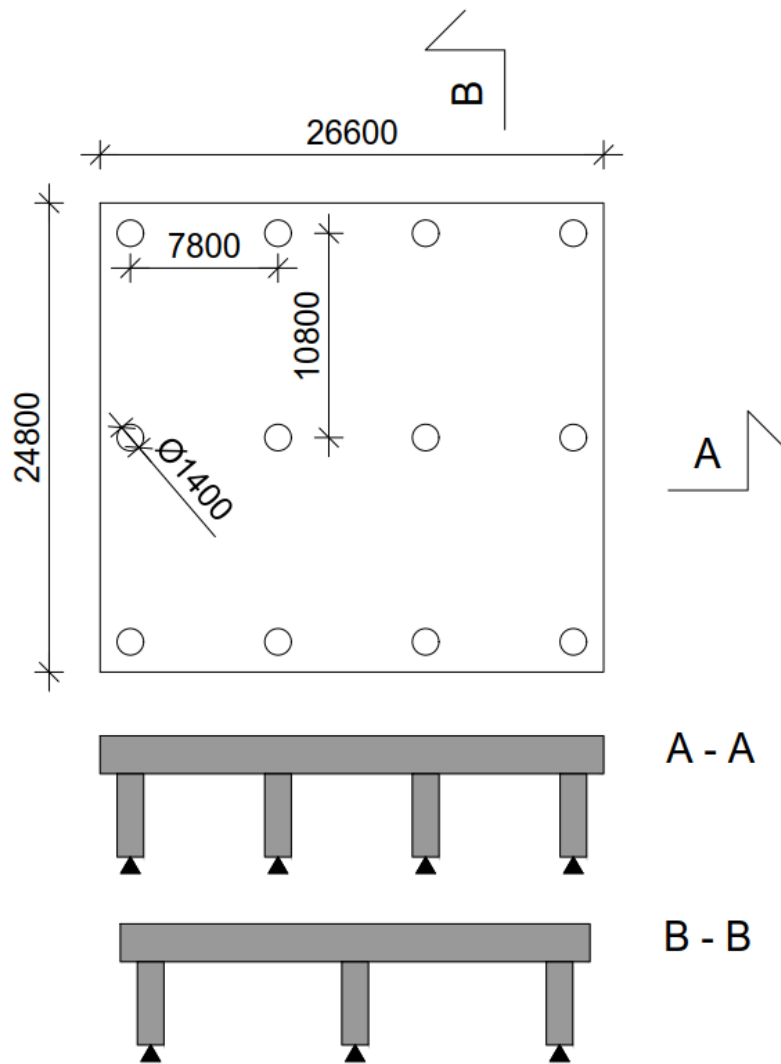
## 5.8 Käytännön CASE-laskenta

Käytännön CASE-laskentana käsitellään 2000 mm paksua pilarilaattaa, joka on tuettu pilarein 7,8 m x 10,8 m ruudussa (kuva 71). Laskennassa muodostetaan laskentamalli kahdella eri tavalla, kaksi- ja kolmiulotteisesti. Laskennassa käytetään kaksiulotteisessa laskentamallissa kahta eri laattateoriaa: Kirchhoff laattateoriaa ja Reissner-Mindlin laattateoriaa. Kuormituksena käytetään tasaista kuormaa sekä viivakuormia, joista molemmat kuvaavat kuvitteellisen ja yksinkertaistetun 11-kerroksisen asuinkerrostalon aiheuttamaa kuormitusta. Tasaisen kuorman ja viivakuormien käytöllä on pyritty havainnollistamaan rakennesuunnittelijan lähtötietopuutetta asuinrakennuksen kuormalinjoista ja sen aiheuttamasta laskennan yksinkertaistamisesta.

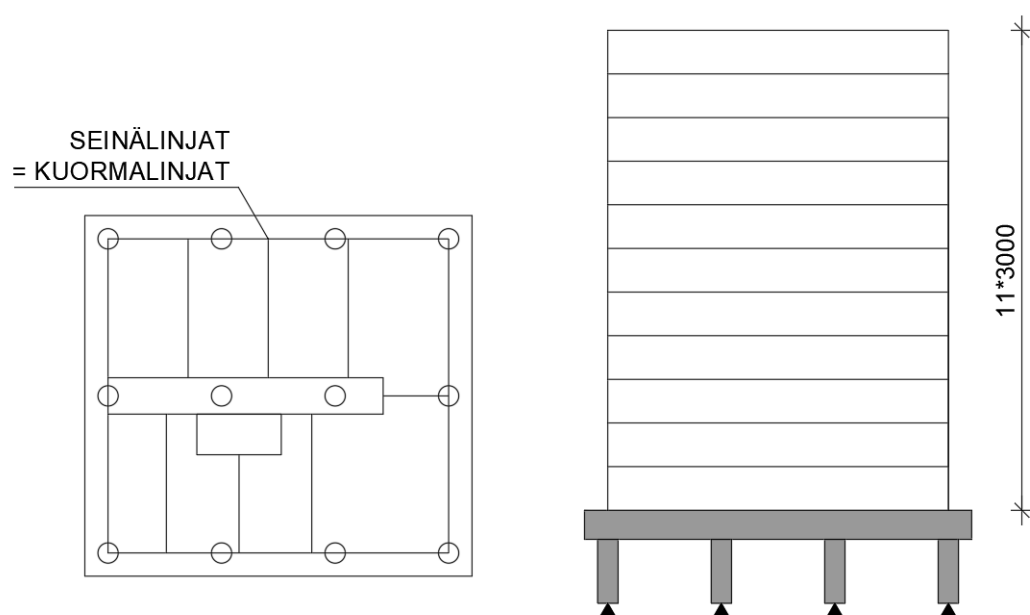
Laskentamallit on muodostettu seuraavin oletuksin:

- Laatta mallinnettu kolmiulotteisessa mallitilassa
- Käytetään lineaarisesti staattista analyysiä missä materiaalin otaksutaan käyttäytyvän lineaarisesti elastisesti
- Elementin suurimpana sallittuna sivumittana on käytetty 200 mm
- Betonilujuutena käytetty C35/45
- Betonin sekanttikimmokerroin lujuusluokan mukainen,  $E_{cm} = 34 \text{ kN/mm}^2$
- Taipumatarkastelussa jäykkyyttä on redusoitu viruman ja halkeilun vaikutuksesta alentamalla kimmokerrointa kuudesosaan, tämä vastaa virumalukua 2 ja halkeilun mukaista jäykkyyden redusointikerrointa 0,50,  $E_{pitkäaikainen} = 5,67 \text{ kN/mm}^2$
- Redusoitua jäykkyyttä käytetään vain taipumatarkastelussa, tämä on likimääräinen menetelmä, joka ei huomioi mm. vetojäykistysvaikutusta
- Laattaa tukevat pilarit on mallinnettu

- Pilareiden alapään tuki ja liitos laattaan on nivelellinen
- Laatta tuettu sivusuunnassa ja on näin ollen sivusiirtymätön
- Huomioidaan kuormituksena yksinkertaistetun 11-kerroksisen asuinkerrostalon kuormitus, kuormituksessa huomioidaan vain pysyvät ja muuttuvat pystysuuntaiset kuormat, vaakakuormien vaikutusta ei huomioida
- Asuinkerrostalon kuormitusten suuruusluokan oikeellisuus varmistettu yksinkertaisella laskentamallilla, laskentamallissa huomioitu 200 mm paksuisten seinien ja 300 mm paksuisen holvin pysyvä kuorma sekä tasojen hyötykuorma  $3 \text{ kN/m}^2$  (kuva 72)
- Asuinkerrostalon erillisellä laskentamallilla on muodostettu yksinkertaistettu murto- ja käyttörajatilan viivakuorma kaikille seinälinjoille
  - $630 \text{ kN/m}$  murtorajatilassa
  - $400 \text{ kN/m}$  käyttörajatilassa
- Tasainen kuorma on muodostettu kertomalla edellä esitetyt viivakuorma kokonaiseinäpituudella  $200,7 \text{ m}$  ja jakamalla tämä kokonaiskuorma projisoituna asuinkerrostalon pinta-alalle  $505,4 \text{ m}^2$ , saadut tulokset pyöristetty ylöspäin lähimpään  $5 \text{ kN/m}^2$ 
  - $250 \text{ kN/m}^2$  murtorajatilassa
  - $160 \text{ kN/m}^2$  käyttörajatilassa



KUVA 71. CASE-laskennan pilarilaatan geometria



KUVA 72. CASE-laskennan kuvitteellinen ja yksinkertaistettu asuinkerrostalo

CASE-laskentaan saadaan 6 eri laskentatapausta, jotka on esitetty taulukossa 7.

TAULUKKO 7. CASE-laskennan laskentatapaukset

Laskenta- tapaus	Laskentamalli	Laattateoria	Kuormitus
1	Kaksiulotteinen	Kirchhoff (ohut laatta)	Tasainen kuorma
2	Kaksiulotteinen	Reissner-Mindlin (paksu laatta)	Tasainen kuorma
3	Kaksiulotteinen	Kirchhoff (ohut laatta)	Viivakuormitus
4	Kaksiulotteinen	Reissner-Mindlin (paksu laatta)	Viivakuormitus
5	Kolmiulotteinen	Elementtimene- telmä	Tasainen kuorma
6	Kolmiulotteinen	Elementtimene- telmä	Viivakuormitus

Laskentamalleista saaduista tuloksista tehdään seuraavat vertailut:

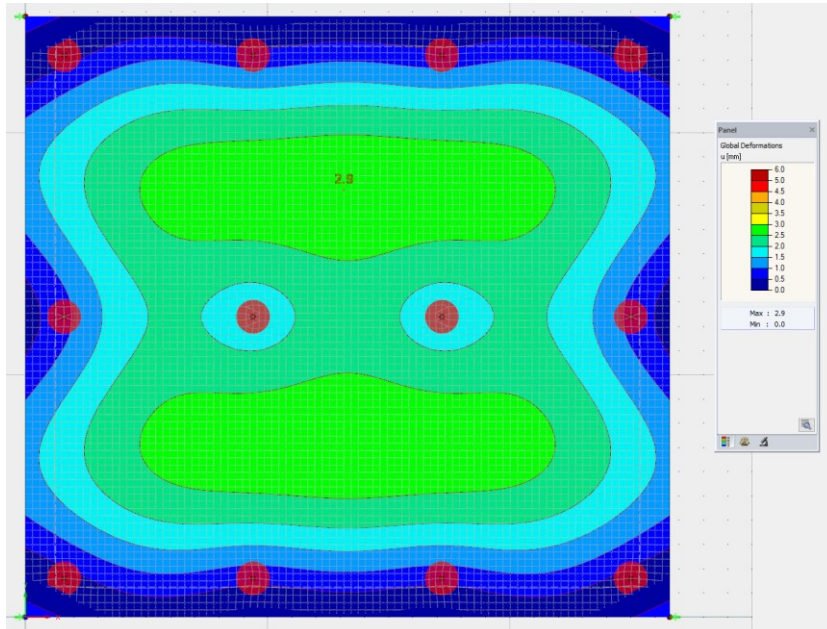
- Taipumavertailu tasaisella kuormituksella - tapaukset 1, 2, 5
- Taipumavertailu viivakuormituksella - tapaukset 3, 4, 6
- Maksimitaivutusmomenttijakaumavertailu - tapaukset 2, 4
- Maksimivääntömomenttijakaumavertailu - tapaukset 2, 4
- Mitoitustaivutusmomenttijakaumavertailu – tapaukset 2, 4

Laskentamalleista saaduista tuloksista ei tässä CASE-laskennassa vertailla leikkausvoimajakaumia tai tukireaktiota. Tämä CASE-laskenta keskittyy muodonmuutoksien eli taipuman laskentaan, havainnollistaen luvuissa 2 ja 3 esitettyjä laskentamallin ulottuvuuksien ja laattateorioiden vaikutusta. Lisäksi CASE-laskennassa keskitytään mitoitusvoimasuureiden muodostumisen sekä taivutus- ja vääntömomentin yhdistämisen vaikutuksen havainnollistamiseen. Kaksiulotteisen laskentamallin mitoitusvoimasuureita käsiteltiin luvussa 5.5.

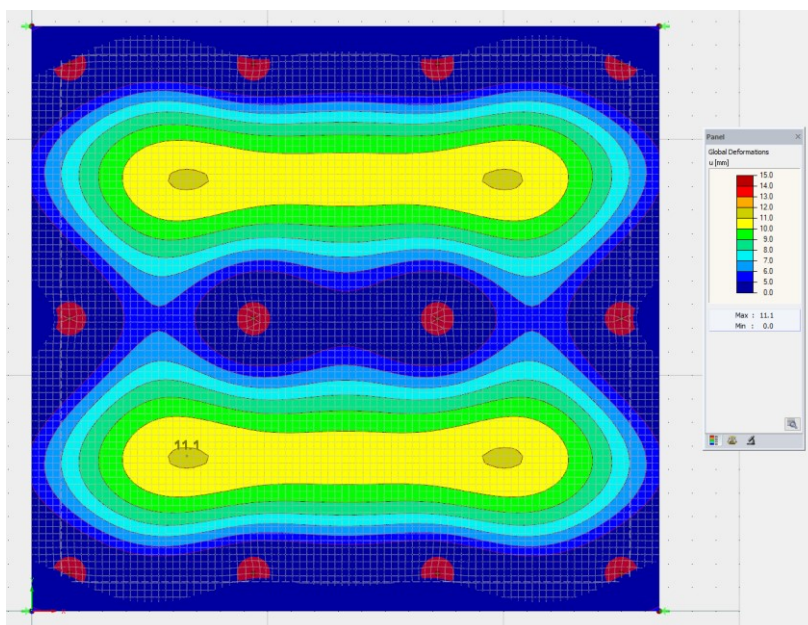


### 5.8.1 Taipumavertailu tasaisella kuormituksella

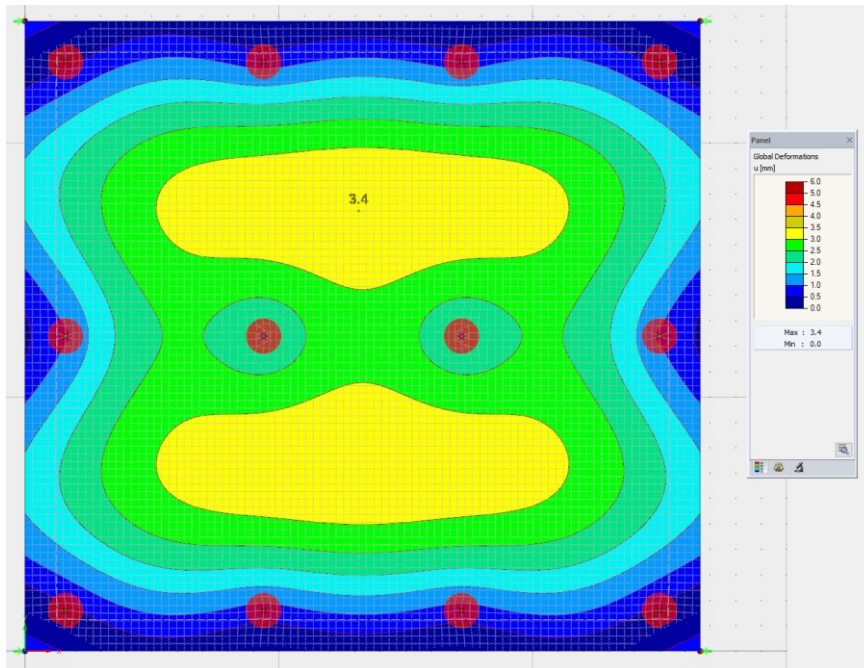
Laskentatapausten tulokset on esitetty kuvissa 73, 74, 75, 76, 77 ja 78. Tulosten vertailu on esitetty taulukossa 8.



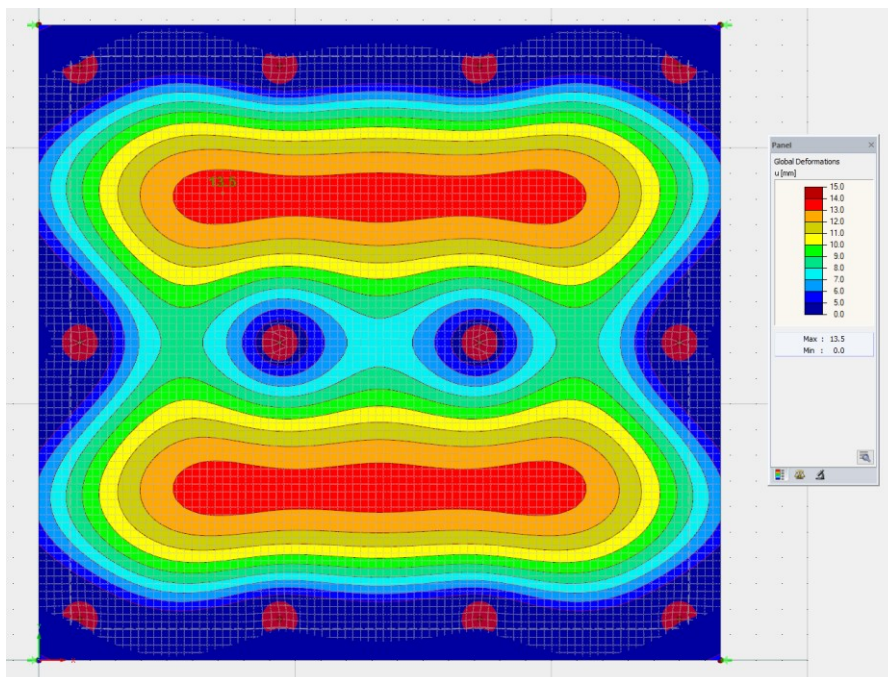
KUVA 73. Laskentatapaus 1, kaksikulotteinen laskentamalli, Kirchhoff laattateoria, täysi kimmokerroin, suurin taipuma 2,9 mm



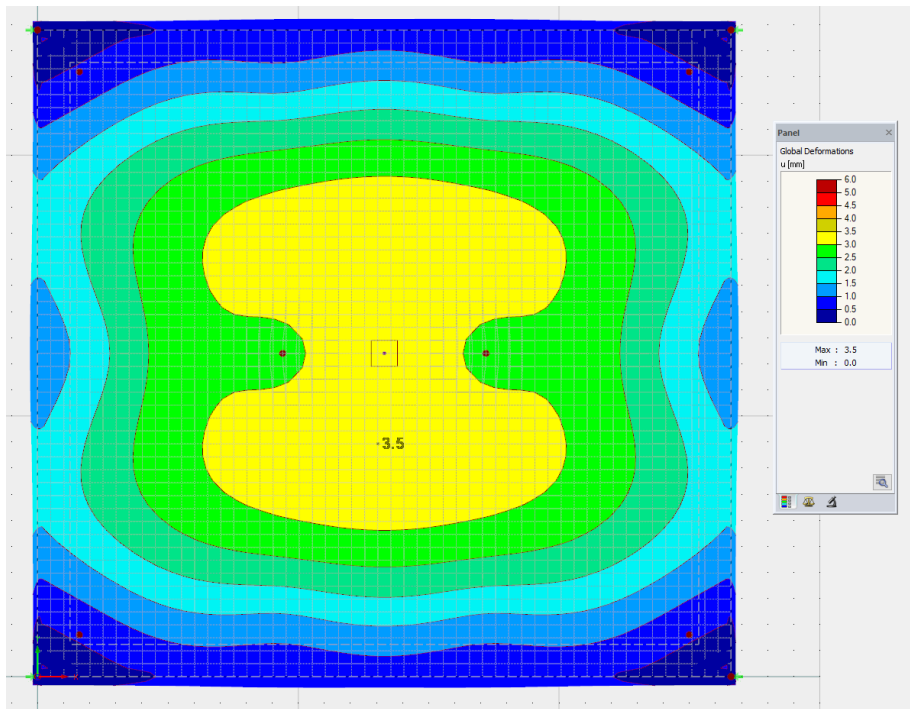
KUVA 74. Laskentatapaus 1, kaksikulotteinen laskentamalli, Kirchhoff laattateoria, reduced kimmokerroin viruman ja halkeilun vaikutuksesta, suurin taipuma 11,1 mm (taipuma 3,8-kertainen verrattuna täyteen kimmokertoimeen)



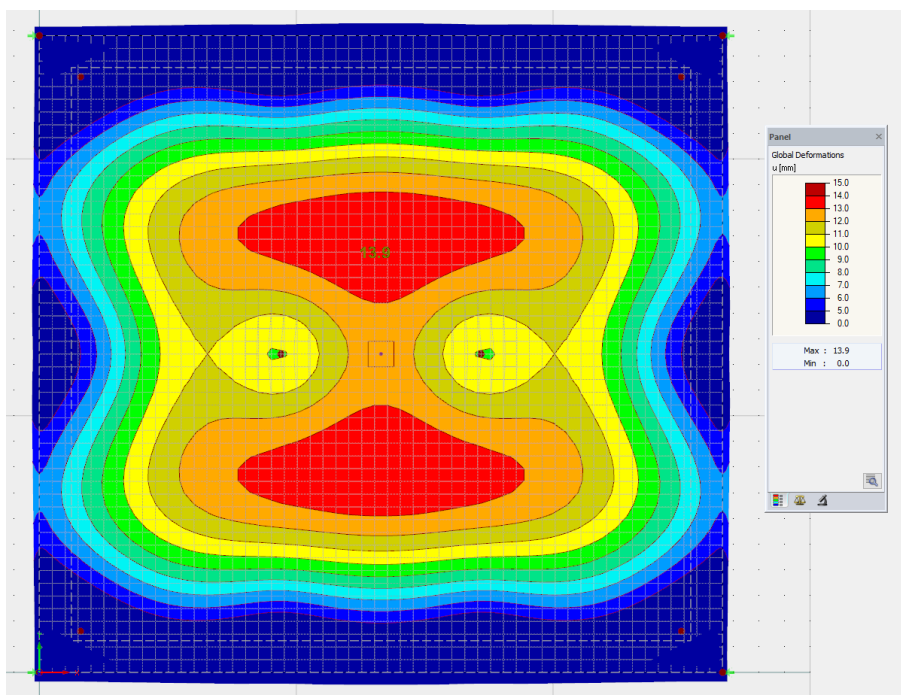
KUVA 75. Laskentatapaus 2, kaksiulotteinen laskentamalli, Reissner-Mindlin laattateoria, täysi kimmokerroin, suurin taipuma 3,4 mm



KUVA 76. Laskentatapaus 2, kaksiulotteinen laskentamalli, Reissner-Mindlin laattateoria, redusoitu kimmokerroin, suurin taipuma 13,5 mm (taipuma 4,0-kermainen verrattuna täyteen kimmokertoimeen)



KUVA 77. Laskentatapaus 5, kolmiulotteinen laskentamalli, täysi kimmokerroin, suurin taipuma 3,5 mm



KUVA 78. Laskentatapaus 5, kolmiulotteinen laskentamalli, redusoitu kimmokerroin, suurin taipuma 13,9 mm (taipuma 4,0-kertainen verrattuna täyteen kimmokerrotimeen)

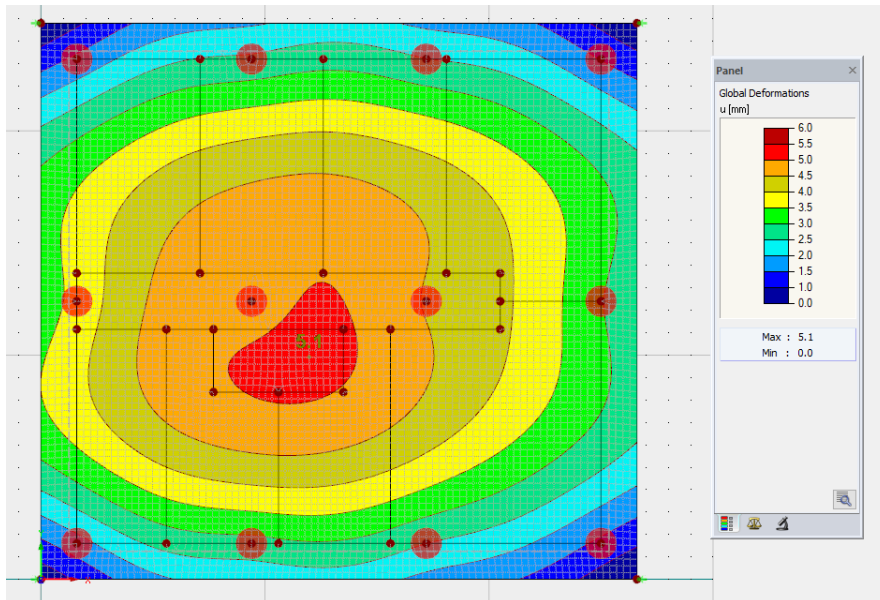
TAULUKKO 8. Taipumavertailu tasaisella kuormituksella, taulukon prosentuaaliset suhdeluvut on muodostettu valitun arvon suhteella suurimpaan saatuun arvoon

Laskenta- tapaus	Taipuma (täysi kimmokerroin)	Suhde suurimpaan taipumaan
1	2,9 mm	83 %
2	3,4 mm	97 %
5	3,5 mm	100 %
	Taipuma (redusoitu kimmokerroin)	Suhde suurimpaan taipumaan
1	11,1 mm	80 %
2	13,5 mm	97 %
5	13,9 mm	100 %

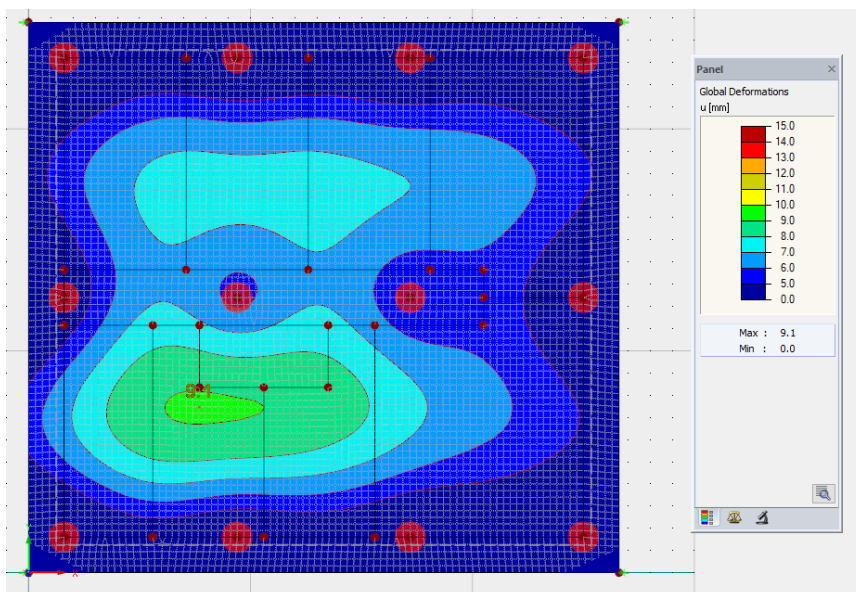
Taipumavertailussa huomataan luvun 3.5 mukainen laattateorioiden vaikutus. Kaksiulotteinen laskentamalli Reissner-Mindlin laattateoriolla antaa saman suuruusluokan tuloksen kuin kolmiulotteinen laskentamalli. Niiden ero niin täydellä kuin redusoidulla jäykkyydellä on 3 %. Kaksiulotteinen laskentamalli Kirchhoff laattateoriolla antaa noin 15 % pienemmän taipuman täydellä kimmokertoimella ja 18-20 % pienemmän taipuman redusoidulla kimmokertoimella. Jännevälien suhde laatan paksuuteen on toiseen suuntaan 3.9 ja toiseen 5.4, lyhimmän jännevälän ja paksuuden suhteen ollessa alle 5 olisi leikkausmuodonmuutokset huomioitava. Redusoitu kimmokerroin kasvattaa taipuman suhteessa täyteen kimmokertoimeen noin nelinkertaiseksi.

## 5.8.2 Taipumavertailu viivakuormituksella

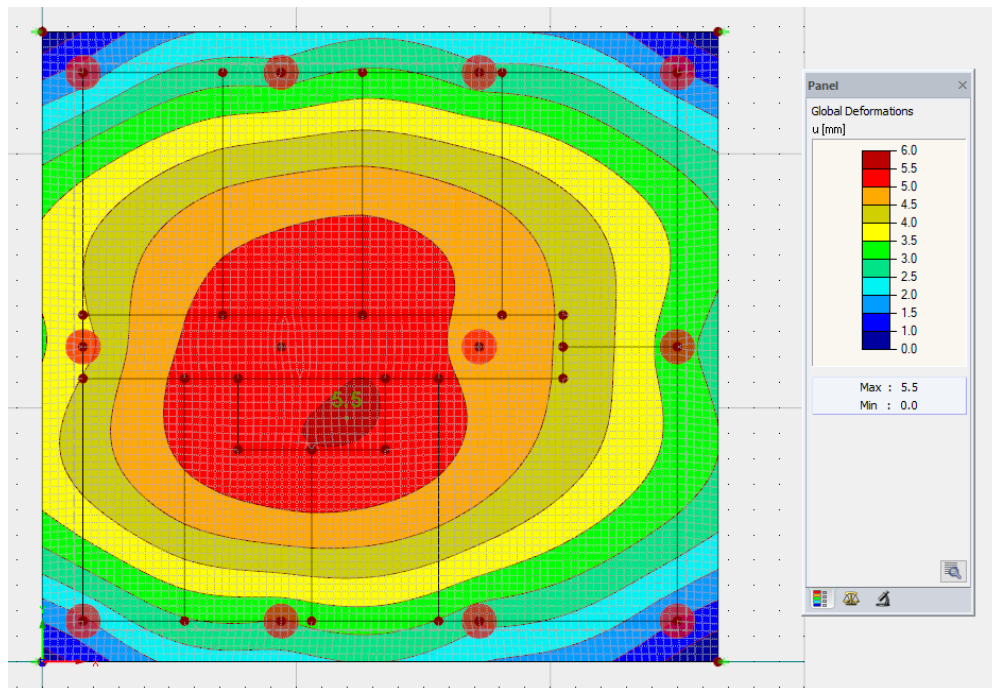
Laskentatapausten tulokset on esitetty kuvissa 79, 80, 81, 82, 83 ja 84. Tulosten vertailu on esitetty taulukossa 9.



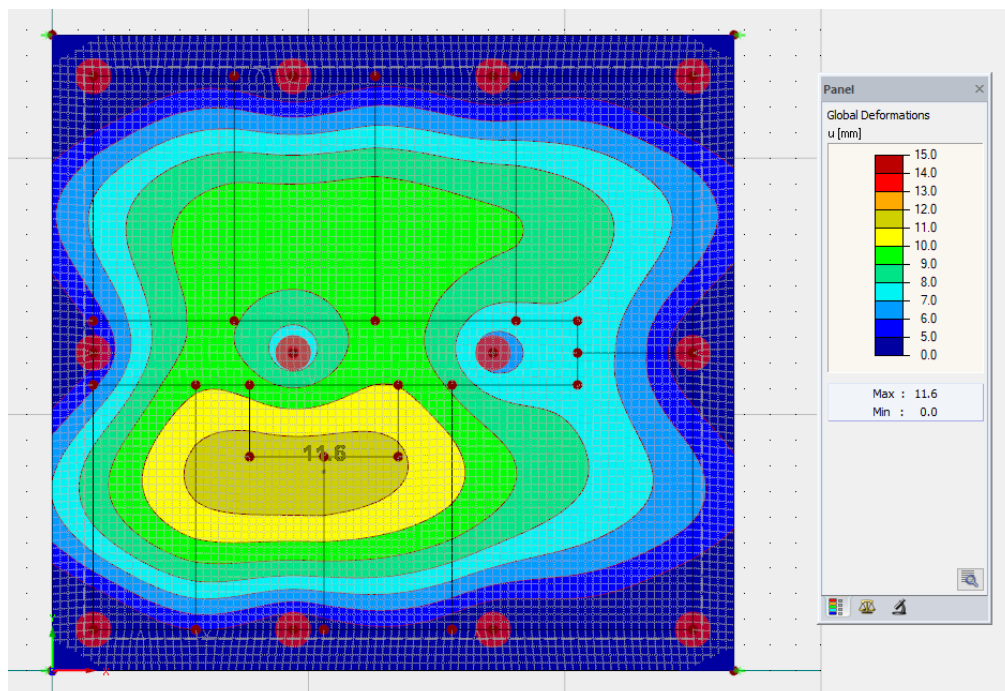
KUVA 79. Laskentatapaus 3, kaksiulotteinen laskentamalli, Kirchhoff laattateoria, täysi kimmokerroin, suurin taipuma 5,1 mm



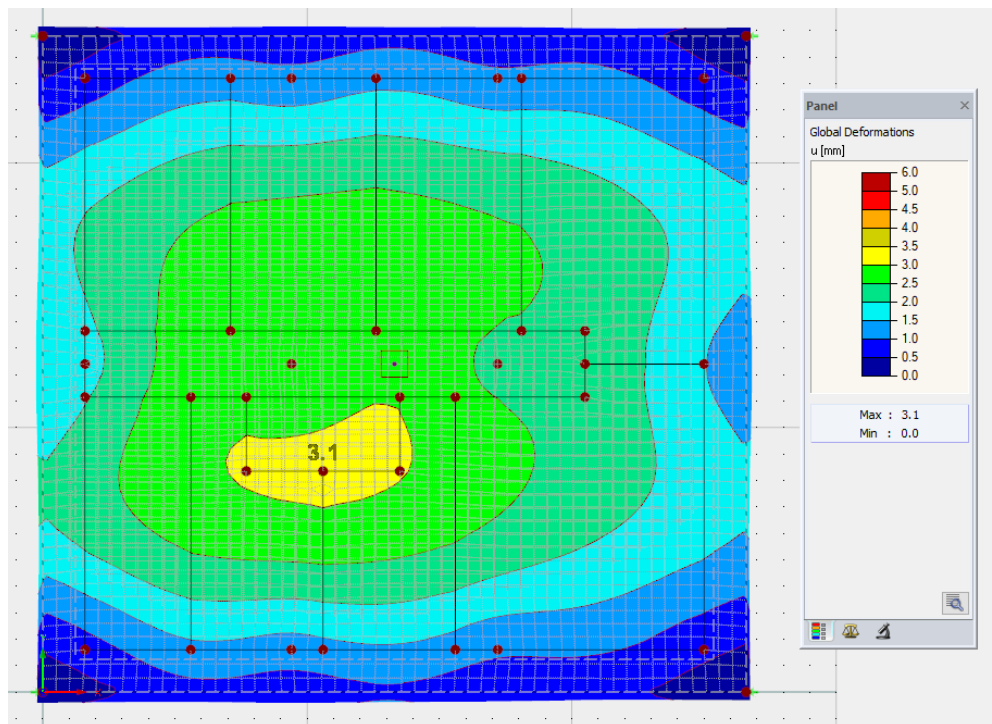
KUVA 80. Laskentatapaus 3, kaksiulotteinen laskentamalli, Kirchhoff laattateoria, reducedu kimmokerroin, suurin taipuma 9,1 mm (taipuma 1,8-kertainen verrattuna täyteen kimmokertoimeen)



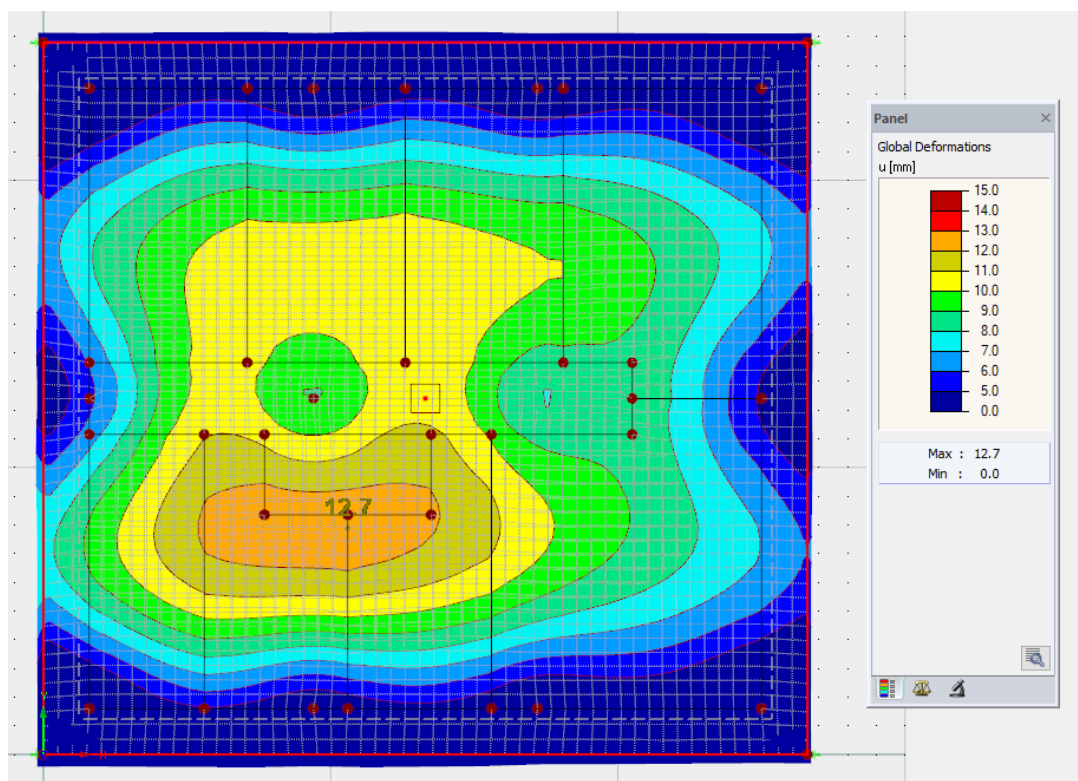
KUVA 81. Laskentatapaus 4, kaksiulotteinen laskentamalli, Reissner-Mindlin laattateoria, täysi kimmokerroin, suurin taipuma 5,5 mm



KUVA 82. Laskentatapaus 4, kaksiulotteinen laskentamalli, Reissner-Mindlin laattateoria, redusoitu kimmokerroin, suurin taipuma 11,6 mm (taipuma 2,1-ker-  
tainen verrattuna täyteen kimmokertoimeen)



KUVA 83. Laskentatapaus 6, kolmiulotteinen laskentamalli, täysi kimmokerroin, suurin taipuma 3,1 mm



KUVA 84. Laskentatapaus 6, kolmiulotteinen laskentamalli, redusoitu kimmokerroin, suurin taipuma 12,7 mm (taipuma 4,1-kertainen verrattuna täyteen kimmokertoimeen)

TAULUKKO 9. Taipumavertailu viivakuormituksella, taulukon prosentuaaliset suhdeluvut on muodostettu valitun arvon suhteella suurimpaan saatuun arvoon

Laskenta- tapaus	Taipuma (täysi kimmokerroin)	Suhde suurimpaan taipumaan
3	5,1 mm	93 %
4	5,5 mm	100 %
6	3,1 mm	56 %
	Taipuma (redusoitu kimmokerroin)	Suhde suurimpaan taipumaan
3	9,1 mm	72 %
4	11,6 mm	91 %
6	12,7 mm	100 %

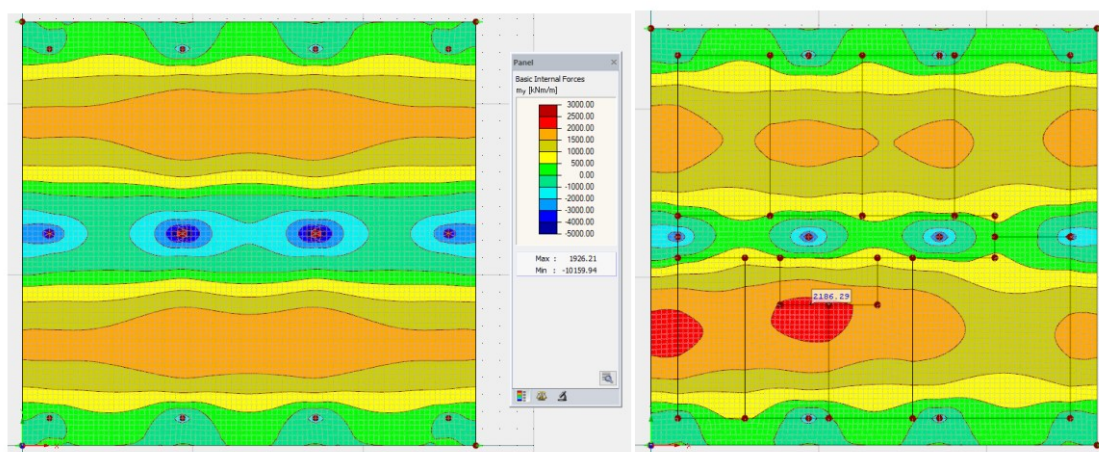
Taipumavertailussa viivakuormituksella huomataan samat laskentamenetelmien ja laattateorioiden yhteydet kuin tasaisella kuormituksella, havainnot tukevat edelleen luvussa 3.5 käsitellyä laattateorioiden vaikutusta. Huomion arvoiseksi voi kuitenkin nostaa täydellä kimmokertoimella saatava ero kaksiulotteisen laskentamallin Reissner-Mindlin laattateorialla ja kolmiulotteisen laskentamallin välillä. Ero on 46 % ja sitä on vaikea selittää, kyseessä voi olla myös laskentavirhe. Redusoidulla kimmokertoimella kolmiulotteisen laskentamallin antamat tulokset suhteessa kaksiulotteiseen laskentamalliin ovat samankaltaisia kuin tasaisella kuormituksella.

Vertailemalla tasaisen kuormituksen ja viivakuormituksen aiheuttamia taipuma-arvoja huomataan, että molemmat laskentatavat antavat saman suuruusluokan tuloksia. Taipumien jakautuminen on tosin aina kuormituksesta ja sen jakautumisesta riippuvaista. Viivakuormituksella suurin taipuma keskittyy alueelle, jossa seinälinjaa eli kuormituslinjaa on paljon. Seinälinjojen kuormia yksinkertaistettiin laskentaan käyttämällä samanarvoista kuormaa kauttaaltaan, todellisuudessa kuormat jakautuisivat laatalta jänneväliden ja jäykkyyksien suhteessa. Suurimpia taipumia arvioitaessa tasaisen kuorman yksinkertaistuksen voidaan kuitenkin todeta olevan varmallalla puolella.

Taipumavertailuissa tasaisella kuormituksella ja viivakuormituksella käytettiin redusoitua kimmokerrointa, jolla pyrittiin huomioimaan likimääräisesti viruman ja



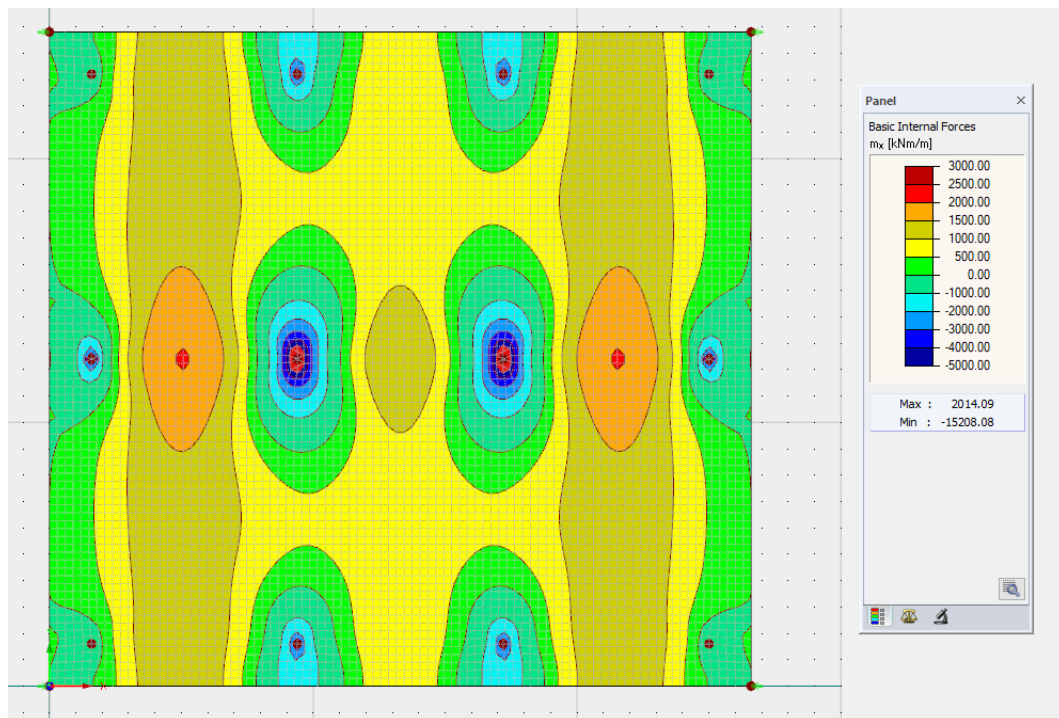
halkeilun vaikutusta. Luvussa 4.5 käsiteltiin halkeilua ja sen aiheuttamaa jäyhyysmomentin ja sitä kautta taivutusjäykkyyden redusoivaa vaikutusta. Poikkileikkaus oletettiin halkeilleeksi, kun betonin vetojännitys ylittyy. Tässä CASE-laskennassa oletettiin lähtökohtaisesti, että poikkileikkaus halkeaa, ilman että vetolujuuden ylittymisen tarkistusta tehtiin. Yhtälön (57) mukaisesti tarkastelemalla 1 m kais-  
 taa, saadaan halkeilumomentiksi 2140 kNm. Käyttörajan suurimmista taivutusmomenteista sisäisen y-akselin suuntaisesti huomataan, että tuella yläpin-  
 nassa esiintyy halkeilua. Kentässä huomataan, että tasaisen kuorman yksinker-  
 taistuksella kentässä halkeilumomentti ei ylitä, mutta viivakuormituksella halkei-  
 lumomentti ylittyy (kuva 85). Tässä suhteessa tasainen kuormitus voi näin ollen  
 olla epävarmalla puolella. Lähtöoletus halkeilusta ja sen aiheuttamasta jäyhyys-  
 momentin ja sitä kautta taivutusjäykkyyden redusoinnista oli oikea.



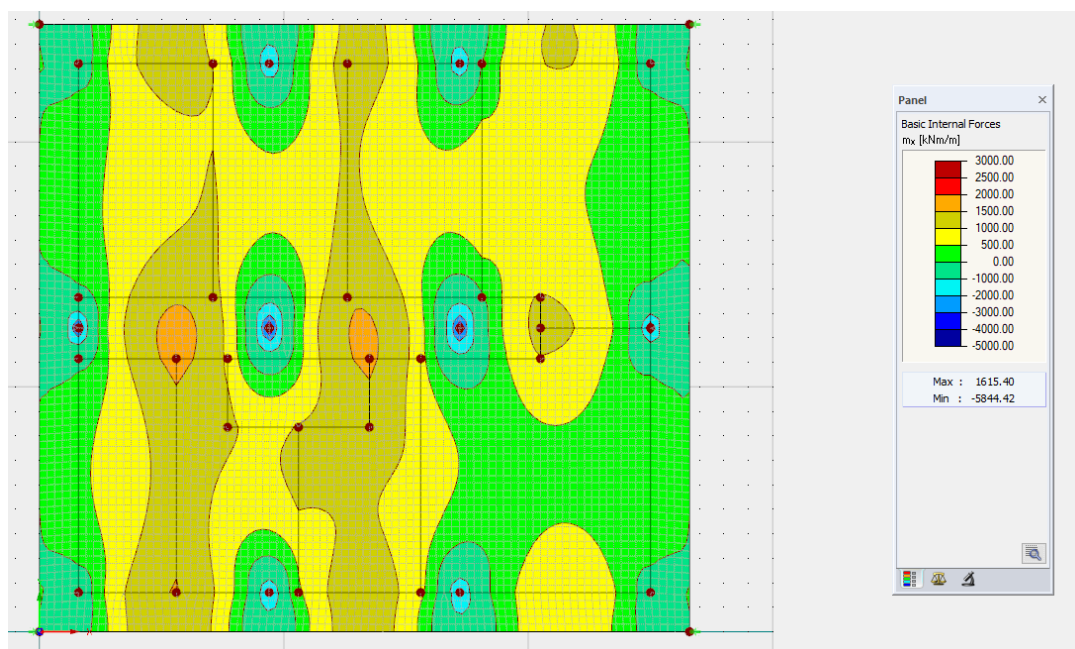
KUVA 85. Käyttörajan taivutusmomentti sisäisen y-akselin suuntaisesti tasai-  
 salla kuormituksella vasemmalla kentässä 1926 kNm ja viivakuormituksella oike-  
 alla, viivakuormituksella suurin taivutusmomentti on kentässä 2186 kNm (halkei-  
 lumomentti ylittyy)

### 5.8.3 Maksimitaivutusmomentti- ja jakaumavertailu

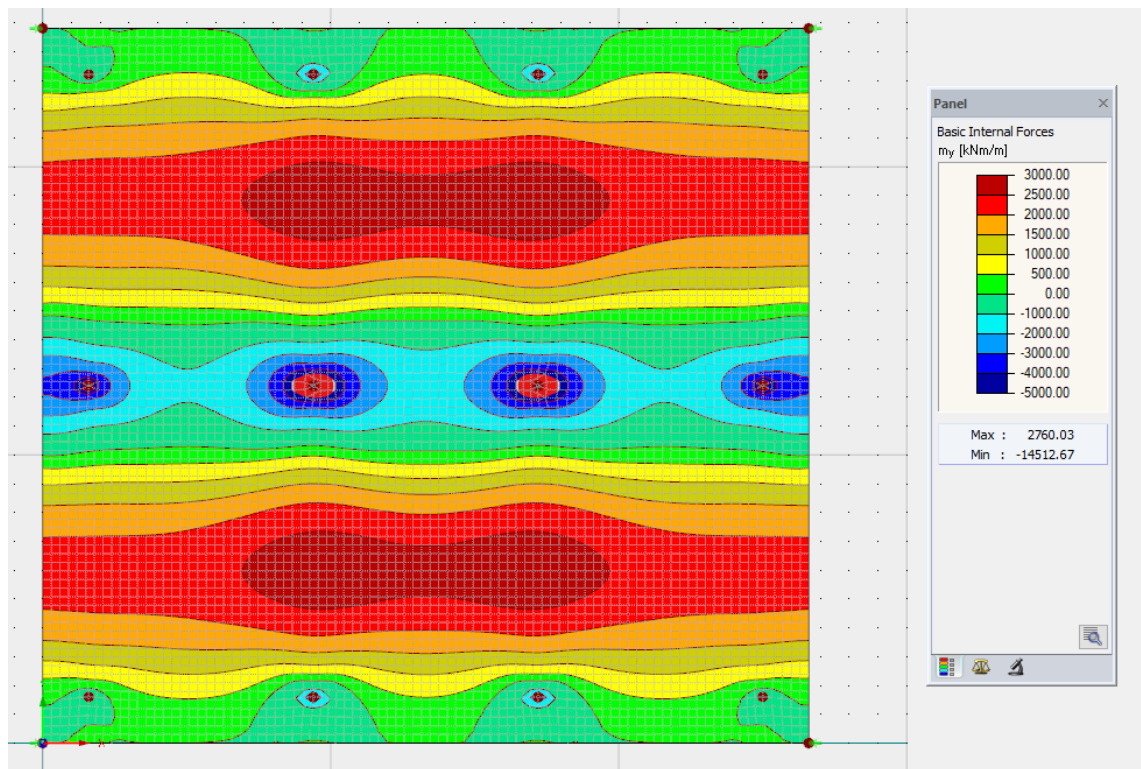
Laskentatapausten tulokset on esitetty kuvissa 86, 87, 88 ja 89. Tulosten vertailu on esitetty taulukossa 10.



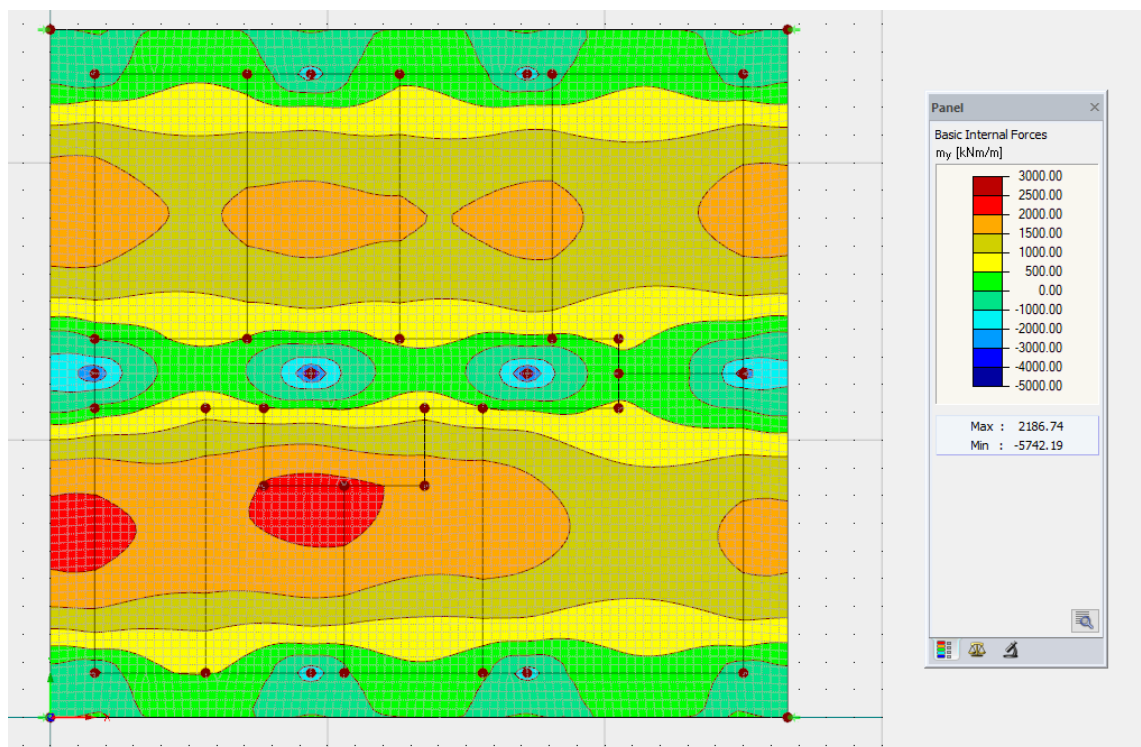
KUVA 86. Laskentatapaus 2, sisäisen x-akselin suuntainen taivutusmomentti



KUVA 87. Laskentatapaus 4, x-akselin suuntainen taivutusmomentti



KUVA 88. Laskentatapaus 2, y-akselin suuntainen taivutusmomentti

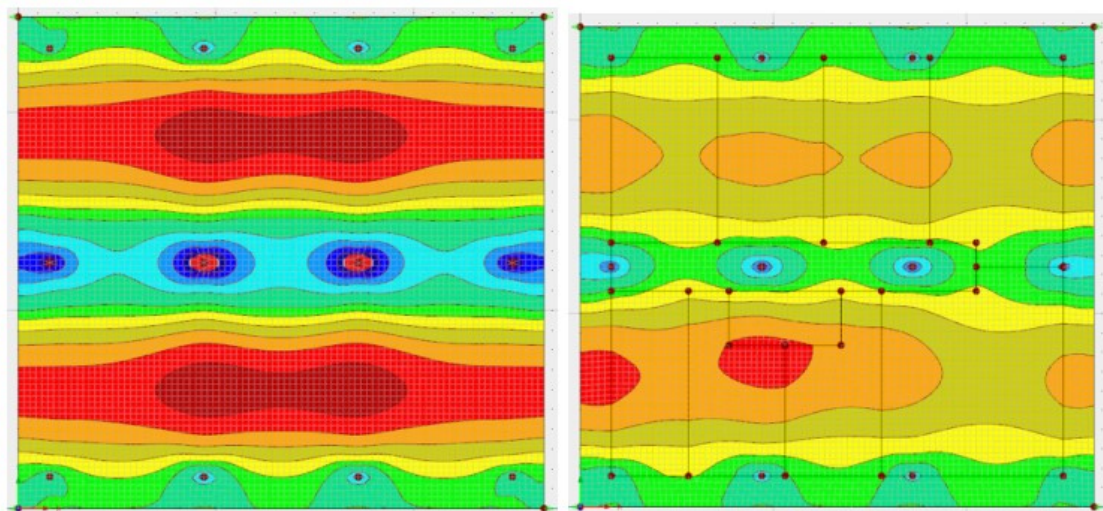


KUVA 89. Laskentatapaus 4, y-akselin suuntainen taivutusmomentti

TAULUKKO 10. Kentän sisäisten x- ja y-akseleiden suuntaiset taivutusmomentit, taulukon prosentuaaliset suhdeluvut on muodostettu valitun arvon suhteella suurimpaan saatuun arvoon

Laskenta- tapaus	$m_x$ (kentässä)	Suhde suurimpaan taivutusmomenttiin
2	2014 kNm	100 %
4	1615 kNm	80 %
	$m_y$ (kentässä)	Suhde suurimpaan taivutusmomenttiin
2	2760 kNm	100 %
4	2187 kNm	79 %

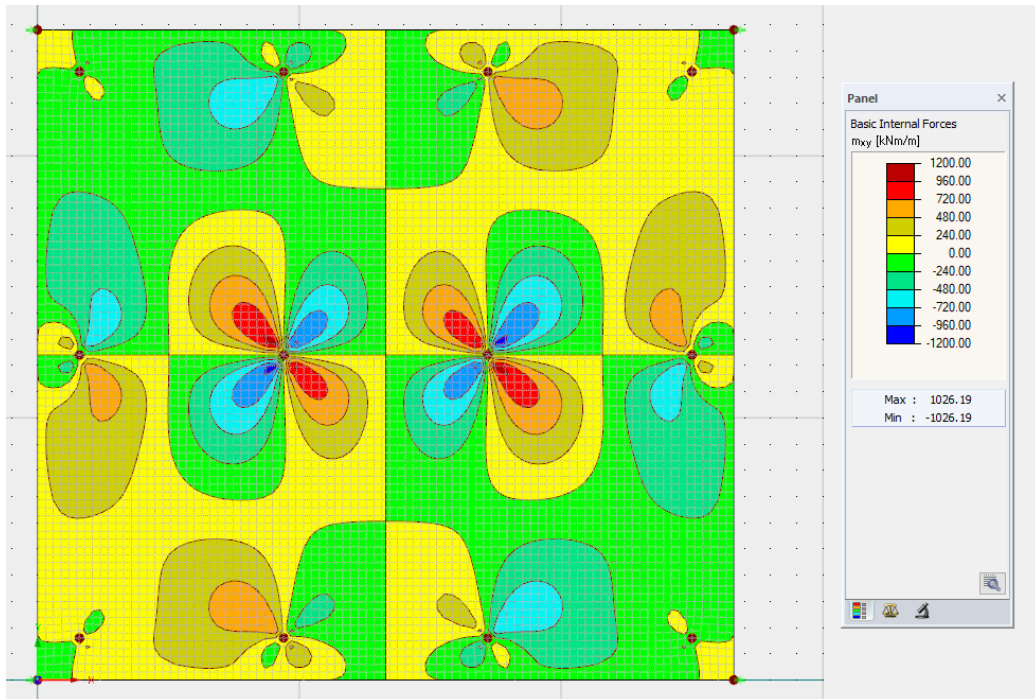
Maksimitaivutusmomentti- ja jakaumavertailussa huomataan, että tasaisen kuorman oletuksella taivutusmomentit ovat suurempia verrattuna viivakuormitukseen (kuva 90). Näin ollen taivutusmomenteja pelkästään arvioidessa ja tutkittaessa tasaisen kuorman yksinkertaistus on edelleen varmallalla puolella.



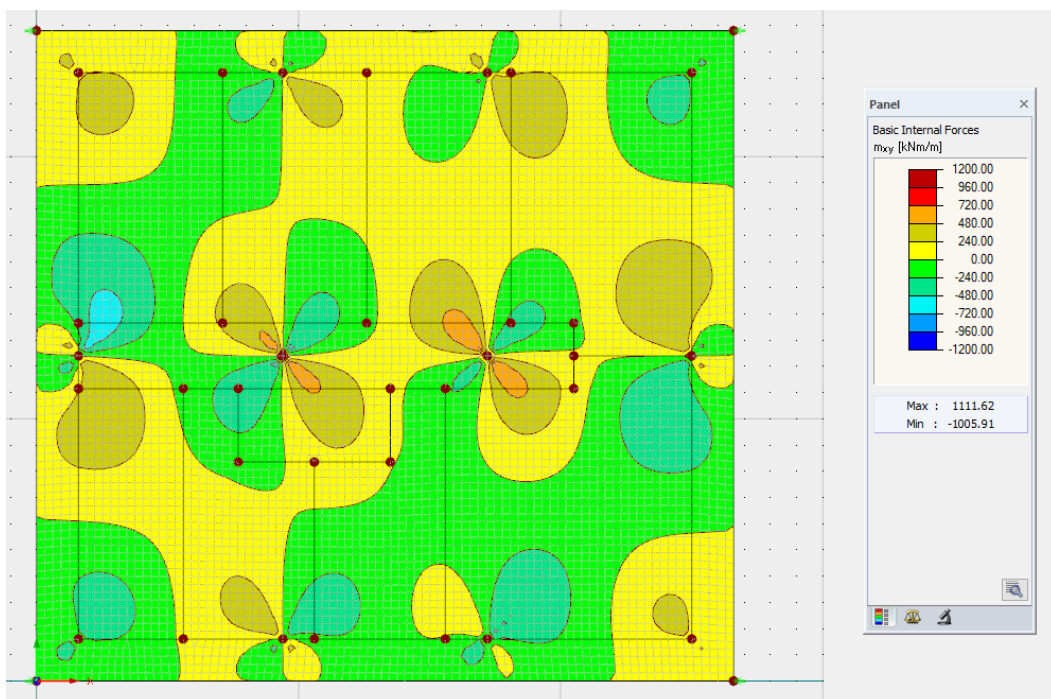
KUVA 90. Murtorajatilan taivutusmomentti sisäisen y-akselin suuntaisesti tasaisella kuormituksella vasemmalla ja viivakuormituksella oikealla (tasainen kuorma antaa paremman vaikutuksen)

### 5.8.4 Maksimivääntömomentti- ja jakaumavertailu

Laskentatapausten tulokset on esitetty kuvissa 91 ja 92. Tulosten vertailu on esitetty taulukossa 11.



KUVA 91. Laskentatapaus 2, vääntömomentti

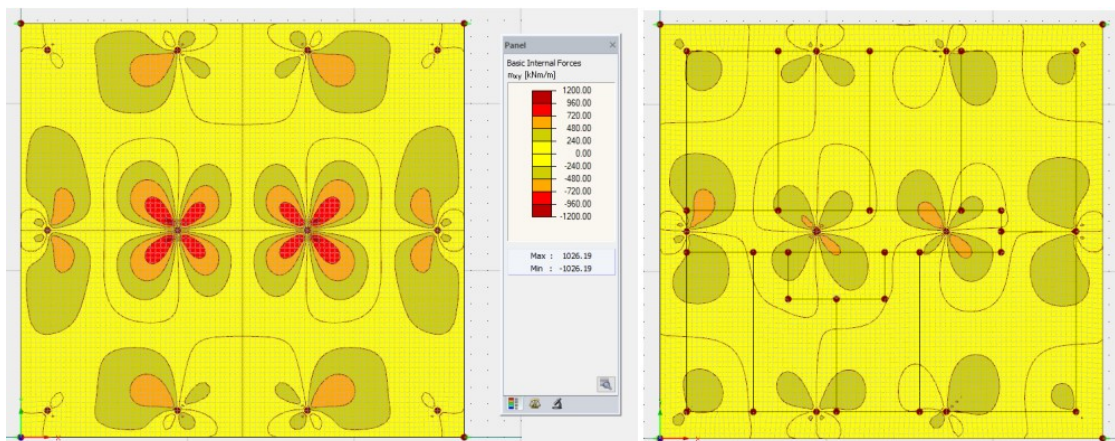


KUVA 92. Laskentatapaus 4, vääntömomentti

TAULUKKO 11. Vääntömomentit, taulukon prosentuaaliset suhdeluvut on muodostettu valitun arvon suhteella suurimpaan saatuun arvoon

Laskenta-tapaus	$m_{xy}$	Suhde suurimpaan taivutusmomenttiin
2	+1026 / -1026 kNm	92 % / 100 %
4	+ 1111 / -1005 kNm	100 % / 98 %

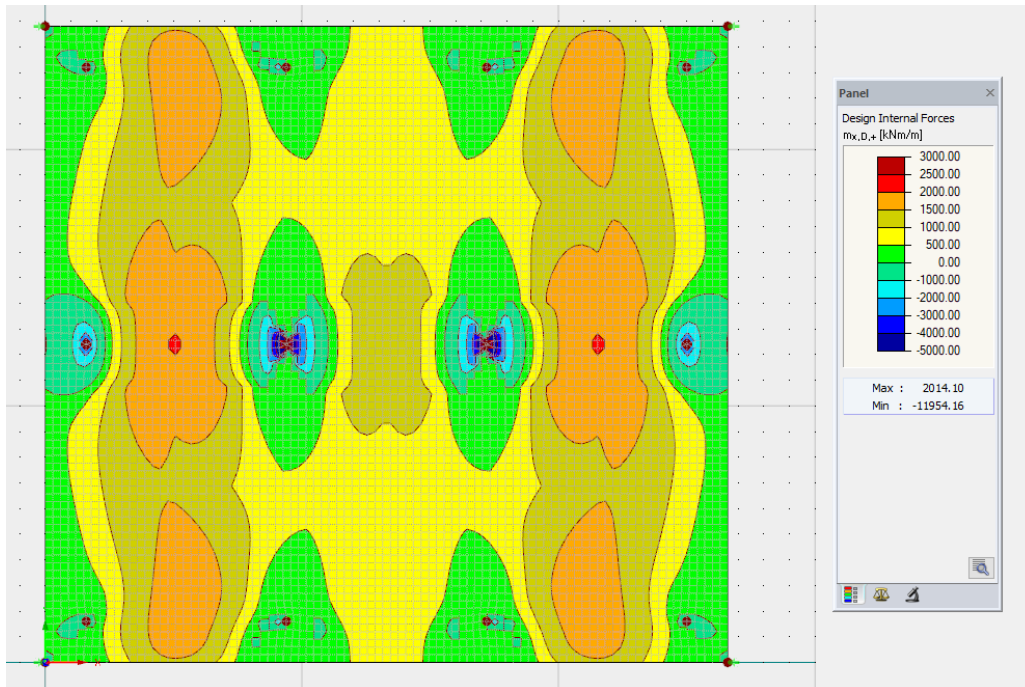
Maksimivääntömomenti- ja jakaumavertailussa huomataan, että tasainen kuorma aiheuttaa yleisesti suurempaa vääntörasitusta laattaan. Viivakuormituksella kuitenkin huomataan hieman enemmän vääntörasitusta nurkkapilareiden vieressä (kuva 93). Tulosten perusteella viivakuormitus ja sitä kautta epäsymmetrinen kuormitus voi joissakin tilanteissa aiheuttaa paikallisesti pahemman vaikutuksen tasaiseen kuormaan verrattuna. Tasaisen kuorman yksinkertaistuksen voidaan todeta olevan vääntömomenttitarkastelussa pääosin varmallalla puolella. On kuitenkin suositeltavaa tarkastella vääntömomentin vaikutusta lähtötietojen tarkentuessa myös viivakuormitusten vaikutuksesta ja verrattava tuloksia.



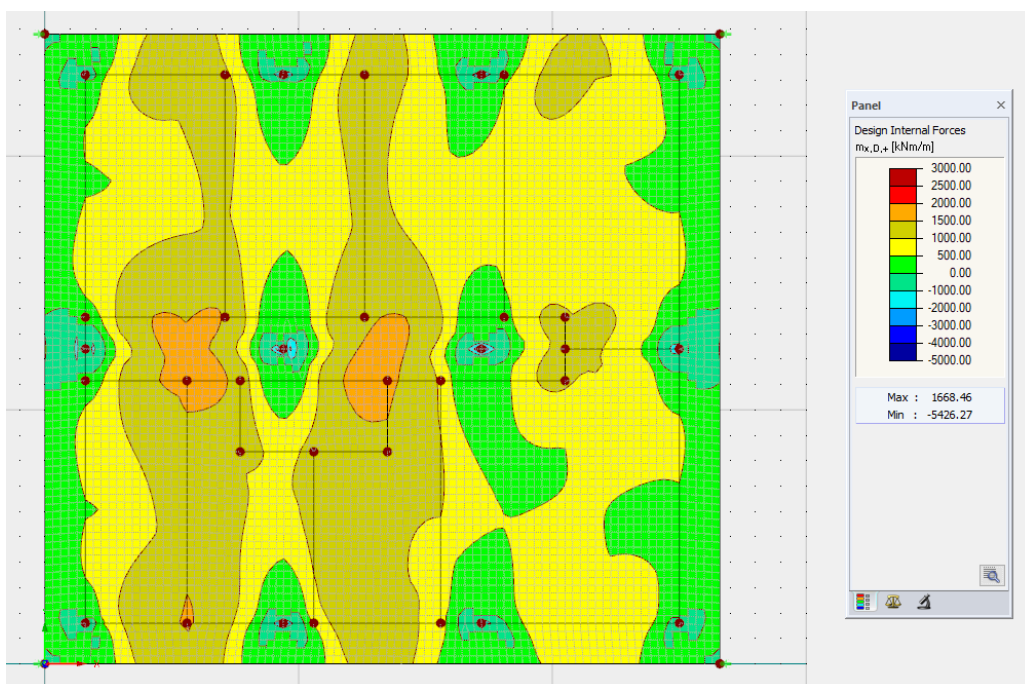
KUVA 93. Vääntömomenti, väriskaala muokattu verrattuna kuviin 91 ja 92, väriskaala on sama negatiivisilla ja positiivisilla vääntömomentin arvoilla

### 5.8.5 Mitoitustaivutusmomenttijakaumavertailu

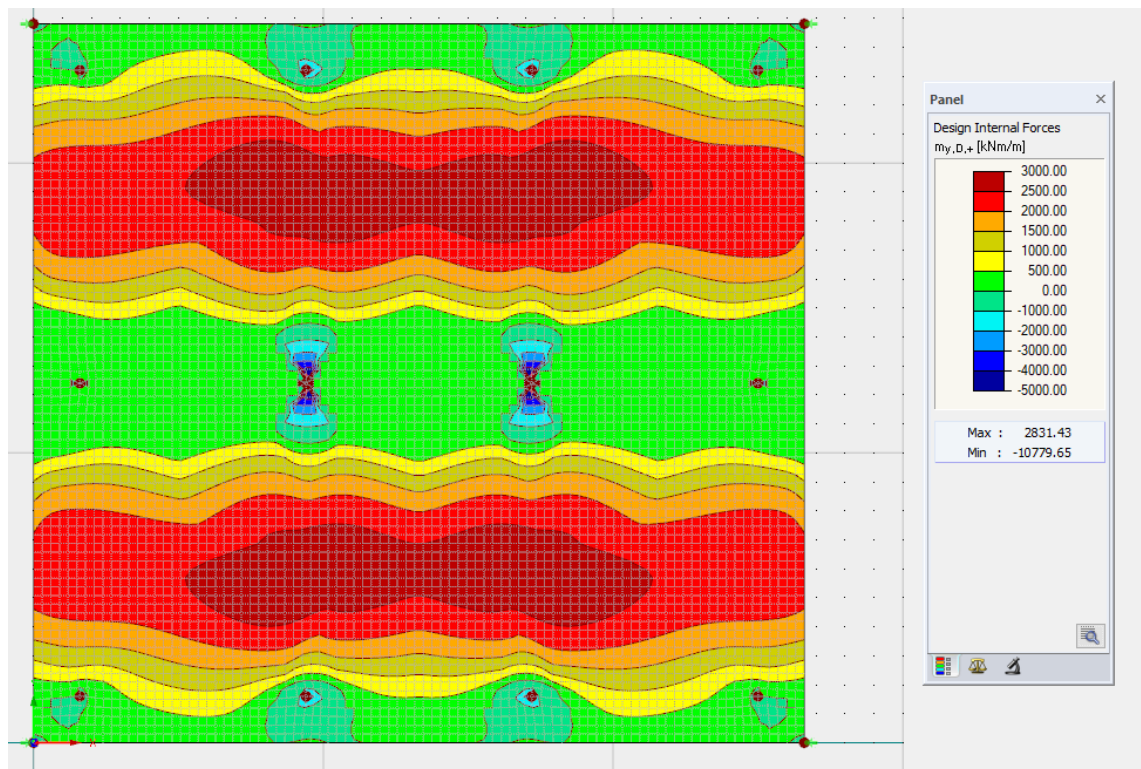
Laskentatapausten tulokset on esitetty kuvissa 94, 95, 96 ja 97. Tulosten vertailu on esitetty taulukossa 12.



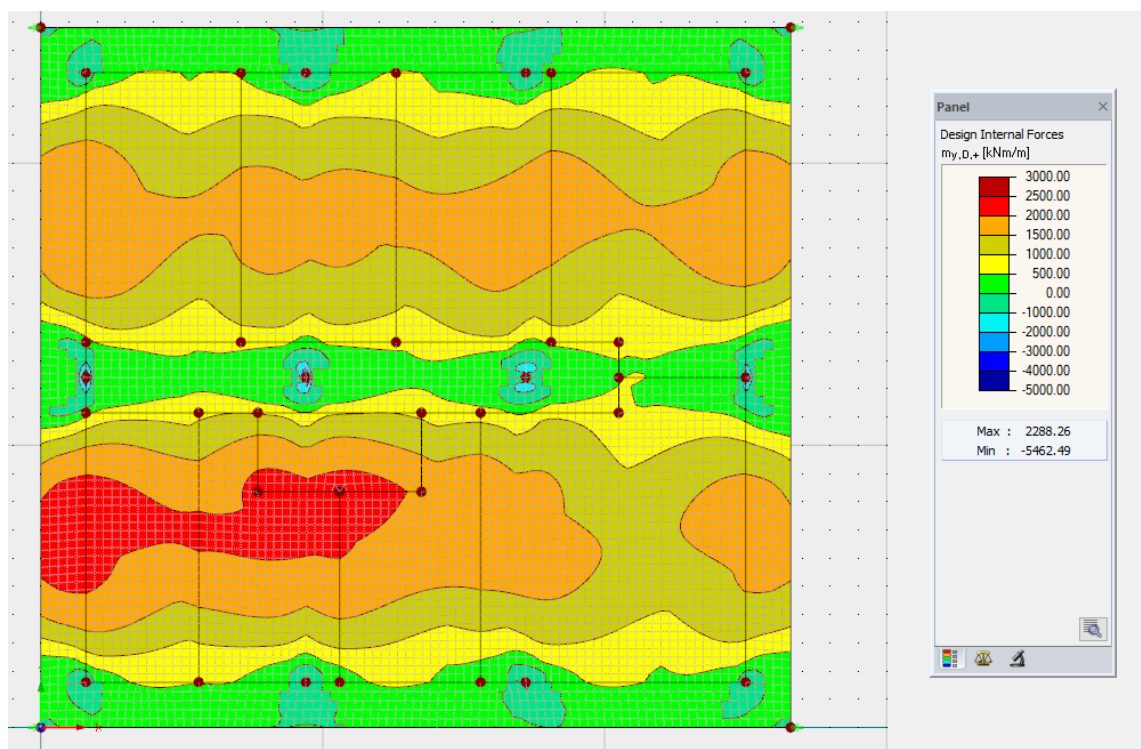
KUVA 94. Laskentatapaus 2, mitoitustaivutusmomentti sisäisen x-akselin suuntaan



KUVA 95. Laskentatapaus 4, mitoitustaivutusmomentti sisäisen x-akselin suuntaan



KUVA 96. Laskentatapaus 2, mitoitustaivutusmomentti sisäisen y-akselin suuntaan



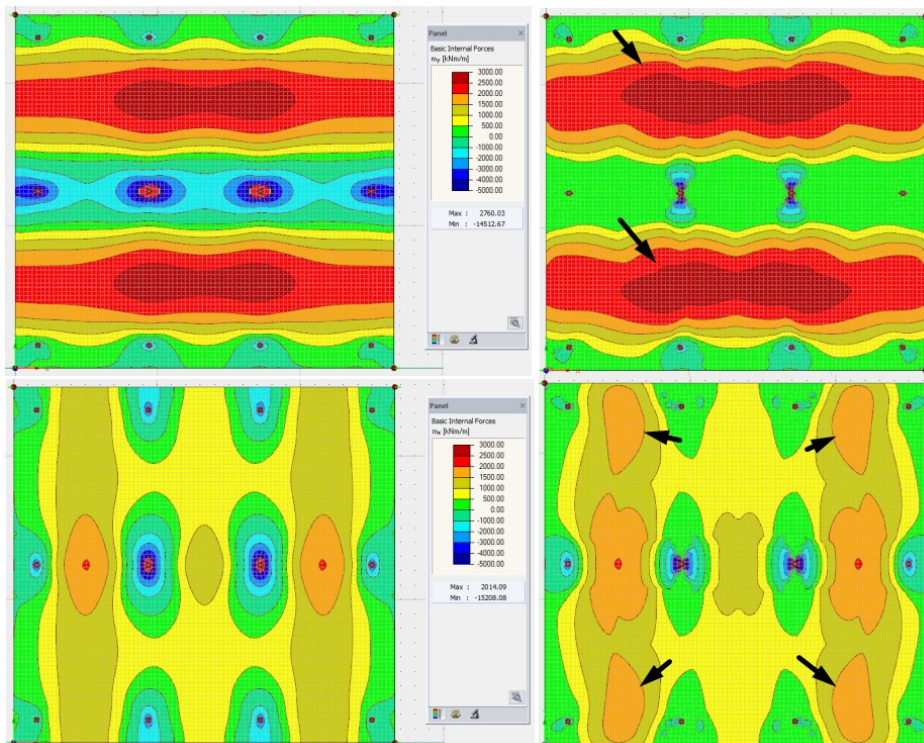
KUVA 97. Laskentatapaus 4, mitoitustaivutusmomentti sisäisen y-akselin suuntaan



TAULUKKO 12. Mitoitustaivutusmomentit sisäisen x- ja y-akselin suuntaisesti, taulukon prosentuaaliset suhdeluvut on muodostettu valitun arvon suhteella suurimpaan saatuun arvoon

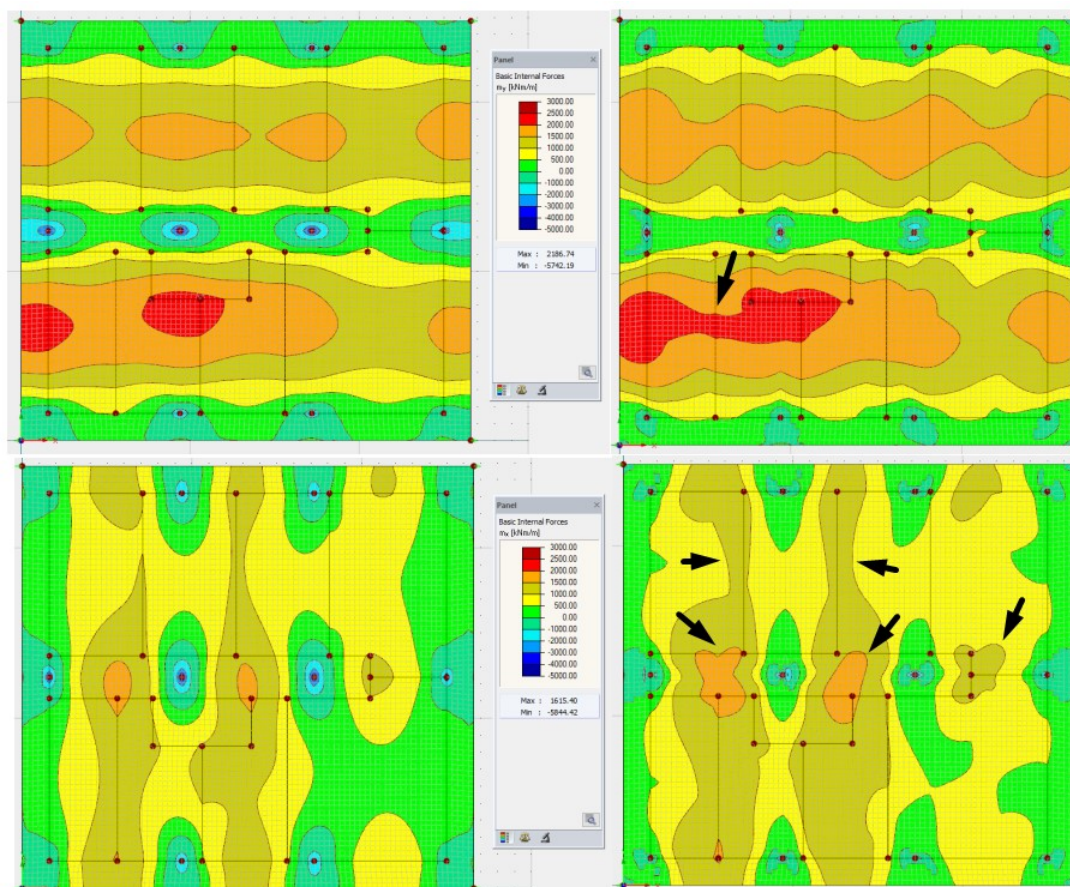
Laskenta- tapaus	$m_{x,D+}$ (kentässä)	Suhde suurimpaan taivutusmomenttiin
2	2014 kNm	100 %
4	1668 kNm	83 %
	$m_{y,D+}$ (kentässä)	Suhde suurimpaan taivutusmomenttiin
2	2831 kNm	100 %
4	2288 kNm	79%

Tasaisella kuormituksella vertailtaessa maksimitaivutusmomenttien jakaumaa mitoitustaivutusmomenttien jakaumaan, huomataan vääntömomentin kentässä momenttia lisäävä vaikutus (kuva 98).



KUVA 98. Taivutusmomenttien ja mitoitustaivutusmomenttien vertailu tasaisella kuormituksella sisäisen y-akselin suuntaisesti (yläpuolella) ja sisäisen x-akselin suuntaisesti (alapuolella), vasemmalla esitetty perusvoimasuureet ja oikealla mitoitusvoimasuureet

Viivakuormituksella vertailtaessa maksimitaivutusmomenttien jakaumaa mitoitustaivutusmomenttien jakaumaan, huomataan myös vääntömomentin kentässä momenttia lisäävä vaikutus. Jakaumien vertailua on esitetty kuvassa 99.



KUVA 99. Taivutusmomenttien ja mitoitustaivutusmomenttien vertailu viivakuormituksella sisäisen y-akselin suuntaisesti (yläpuolella) ja sisäisen x-akselin suuntaisesti (alapuolella), vasemmalla esitetty perusvoimasuureet ja oikealla mitoitusvoimasuureet

Tulokset tukevat luvussa 5.5 käsitellyä Wood and Armer -menetelmän mukaisten mitoitusvoimasuureiden aiheuttamaa pahempaa rasitusta ja sen jakaumaa, minkä huomiotta jättäminen voi johtaa alimitoitukseen. Mitoitusvoimasuureilla maksimirasitukset eivät pääsääntöisesti muutu, mutta niiden suuret rasitukset jakautuvat laajemmalle alueelle. Teoriassa on myös mahdollista, että suurin vääntömomenttiarvo ja suurin taivutusmomenttiarvo voivat osua lähelle toisiaan. Tämnäkaltaisessa tilanteessa mitoitusvoimasuureiden käyttäminen korostuu entisestään.

## 5.9 CASE-laskennan yhteenveto

Käytännön CASE-laskenta oli yksinkertaistettu esimerkki, jonka tarkoituksena oli havainnollistaa teoriaosuudessa käsiteltyjen laskentamalliulottuvuuksien, laatta-teorioiden ja olennaisten betonin materiaaliominaisuuksien, kuten viruman ja halkeilun vaikutusta. CASE-laskennan antamat tulokset tukevat jo teoriaosuudessa todettuja asioita ja sen havainnollisuutta voidaan pitää onnistuneena.

CASE-laskennassa huomattiin luvussa 3 käsiteltyjen laattateorioiden ja leikkausmuodonmuutoksen vaikutus. Jännevälien suhteet olivat 3.9 ja 5.4 eli lyhyemmän jännevälin perusteella olisi perusteltua ja varmalla puolella käyttää kaksiulotteista laskentamallia ja huomioida leikkausmuodonmuutokset Reissner-Mindlin laattateoriolla. Kolmiulotteisella laskentamallilla saatiin noin 3-9 % suuremmat taipuma-arvot kuin kaksiulotteisella Reissner-Mindlin laattateoriaa käyttävällä laskentamallilla. Erot eivät olleet huomattavat. Kolmiulotteisen laskentamallin voikin edelleen luvun 3.5 johtopäätöstä mukaillen todeta olevan käyttökelpoinen menetelmä muodonmuutosten laskennan lisävarmistukseksi.

Taipumatarkastelussa huomioitiin likimääräisesti viruman ja halkeilun vaikutusta redusoimalla kimmokerrointa ja näin ollen taivutusjäykkyyttä. On huomattava, että tämä on likimääräinen menetelmä. Todellisuudessa viruman vaikutus voitaisiin huomioida samantyyppisellä menetelmällä, mutta halkeilun aiheuttama vaikutus olisi laskettava tarkemmin. Usein taipumalaskentaa tehdäänkin tietokoneavusteisesti.

Perusvoimasuureita ja mitoitusvoimasuureita vertailtaessa huomattiin vääntömomentin vaikutus. Mitoitustaivutusmomentti joko sisäisen x- tai y-akselin suuntaan jakautuu laajemmalle, mikä lisää raudoitustarvetta. Vääntömomentin huomioiminen on näin ollen kriittistä ja se tulee ottaa huomioon valitulla menetelmällä. Tässä CASE-laskennassa käytettiin Wood and Armer -menetelmän mukaisia mitoitusvoimasuureita.

Kuvitteellisen lähtötietopuutteen myötä käytetyn tasaisen kuormituksen huomattiin olevan taipumissa, taivutus- ja vääntömomenteissa pääsääntöisesti varmalla puolella. Viivakuormitus kuitenkin loi paikallisesti suurempia rasituksia verrattuna

tasaiseen kuormitukseen. Johtopäätöksenä voidaan todeta, että mikäli tarkkaa lähtötietoa CASE-laskennan tyypisessä tapauksessa ole, voidaan tasaista kuormitusta käyttää. On kuitenkin suositeltavaa suorittaa laskenta uudelleen lähtötietojen tarkentuessa ja varmistaa, että rakenneseosaan ei muodostu epäsymmetrisestä kuormituksesta epäedullista tilannetta ja mahdollisesti alimitoitettuja alueita.

## 6 JOHTOPÄÄTÖKSET JA POHDINTA

Tämän opinnäytetyön tavoitteena oli kehittää paksujen teräsbetoni-laattojen suunnitteluosaamista. Työ jaettiin teoria- ja käytännönsuuteen. Teoriaosuudessa käsiteltiin kirjallisuustutkimuksena elementtimenetelmää, laattateorioita ja betonin materiaaliominaisuuksia. Käytännönsuudessa tarkasteltiin FEM-rakenneanalyysin tuottamia tuloksia ja mitoittavien voimasuureiden muodostamismenetelmiä. Käytännönsuuden päätteeksi tehtiin CASE-laskenta, jonka tarkoituksena oli havainnollistaa mitoitusvoimasuureiden merkitystä ja teoriaosuudessa esitetyjä asioita. Opinnäytetyön perusteella voidaan todeta, että laskentamallin ulottuvuudella, käytettävällä laattateorialla ja tulosten tulkinnalla on merkitystä. Useat huomioitavat asiat lisäävät virheen mahdollisuutta. Tämän opinnäytetyön tuottamalla tiedolla virheitä voidaan kuitenkin vähentää.

Teoriaosuuden aluksi käsiteltiin elementtimenetelmän teoriaa ja sen soveltamista käytännössä elementtimenetelmää hyödyntävässä ohjelmistossa. Tässä opinnäytetyössä käytettiin Dlubal RFEM -ohjelmistoa. Opinnäytetyössä FEM-rakenneanalyysin olennaisimmiksi asioiksi havaittiin elementtitiheys, eli laskentamallin riittävä tarkkuus, oikea analyysityyppi, oikeat mallinnusperiaatteet ja käytettävän materiaalin ominaisuuksien huomioiminen. Osuuden perusteella voidaan todeta, että FEM-rakenneanalyysissä on paljon huomioitavia asioita ja virheherkkyyttä. Näin ollen vertailevien käsin laskentamenetelmien käyttö on suositeltavaa.

Elementtimenetelmän jälkeen perehdyttiin Kirchhoff ja Reissner-Mindlin laattateorioihin. Laattateorioita käytetään kaksiulotteisissa laskentamalleissa, niiden ollessa kaksiulotteisia yleistyksiä. Laattateorioiden oleellisimpana erona on leikkausmuodonmuutos, jonka Reissner-Mindlin laattateoria huomioi. Leikkausmuodonmuutoksella on vaikutusta laatan kokonaistaipumaan, joka voi tulla määräväksi paksujen teräsbetoni-laattojen tapauksessa. Kirjallisuuslähteiden perusteella Kirchhoff laattateoriaa on käytettävä, kun jännevälin ja paksuuden suhde on suurempi tai yhtä suuri kuin 5. Jos suhde on alle 5, on käytettävä Reissner-Mindlin laattateoriaa. Mikäli jännevälin ja paksuuden suhde on alle 3, on käytettävä kolmiulotteista laskentamallia, sillä kaksiulotteinen laskentamalli antaa vir-

heellisen muodonmuutoksen käytettävästä laattateoriasta huolimatta. Kolmiulotteisen laskentamallin todettiin myös soveltuvan kaksiulotteisen laskentamallin vertailevaksi laskentamenetelmäksi.

Betonirakenteiden erityispiirteitä käsittelevässä osuudessa esitettiin Eurokoodin eri rakenneosien määritelmät. Eurokoodin mukaan rakenneosa luokitellaan laataksi, kun sen lyhimmän jännevälin ja paksuuden suhde on suurempi tai yhtä suuri kuin 5. Jännevälin ja paksuuden suhteen jäädessä alle 5 rakenneosa luokitellaan palkiksi ja suhteen jäädessä alle 3 seinämäiseksi palkiksi. Eurokoodin rakenneosien määrittely perustuu rakenneosien toiminnan eroavaisuuksiin. Laatoilla ja palkeilla teknisen taivutusteorian todettiin pätevän, toisin kuin seinämäisillä palkeilla. Näitä toimintatapojen eroavaisuuksia olisi kuitenkin tarve käsitellä tässä opinnäytetyössä esitettyä laajemmin. Saatua tietoa voisi tämän jälkeen soveltaa tässä opinnäytetyössä esitettyihin laskentamallin ulottuvuuksia ja laattateorioita käsitteleviin teemoihin.

Betonirakenteiden erityispiirteiden osiossa perehdyttiin myös Eurokoodipohjaisesti betonin materiaaliominaisuuksiin. Eurokoodissa betonin puristuslujuus luoyleisesti perustan kaikille betonin materiaaliominaisuuksille, kuten vetolujuudelle ja kimmokerroimelle. Edellä mainitut materiaaliominaisuudet ovat suhteellisen yksinkertaisia, mutta betonin ajasta riippuvaiset ominaisuudet ja halkeilu ovat haastavia ilmiöitä. Teoriaosuudessa korostettiin paksujen teräsbetoni-laattojen tapauksessa virumaa ja halkeilua, niiden vaikuttaessa taivutusjäykkyyteen. Viruma redusoi kimmokerrointa ja halkeilu redusoi jäyhyysmomenttia. Taivutusjäykkyys muodostuu kimmokerroimen ja jäyhyysmomentin tulona ja sillä on olennainen vaikutus muodonmuutoksiin. Teoriaosuudessa esiteltiin yksinkertainen likimääräinen menetelmä muodonmuutosten tarkasteluun käyttämällä redusoitua, niin kutsuttua pitkäaikaista kimmokerrointa, jolla huomioidaan viruman ja halkeilun vaikutusta. Halkeilun vaikutus tulee huomioida vain, jos poikkileikkaus todetaan halkeilleeksi. Brooker (2006) totesi laattojen FEM-rakennepohjaisia käsittelevässä ohjeessaan tyypilliseksi pitkäaikaiseksi betonin kimmokerroimeksi puolet tai kolmasosa viruma huomioituna ja neljäs- tai kuudesosa viruma ja halkeilu huomioituna. Tätä likimääräistä menetelmää käytettiin käytännönsuuden päätteeksi tehdyssä CASE-laskennassa. On kuitenkin huomattava, että menetelmä on hyvin

likimääräinen. Halkeilun astetta ja sen vaikutusta jäyhyysmomenttiin voidaan laskea tarkemmin joko käsin tai tietokoneavusteisesti. Näin päästään todennäköisesti pienempään redusoivaan vaikutukseen.

Käytännönosuuden alussa käsiteltiin elementtimenetelmän teoriaosuutta tukevaa laskentamallien muodostamista kaksi- ja kolmiulotteisesti sekä tulosten tulkintaa yksinkertaisin sovelluksin. Tulosten tulkinnassa korostettiin mitoittavia voimasuureita ja niiden muodostamismenetelmiä, joista tässä työssä käsiteltiin Wood and Armer -menetelmä ja Baumann-menetelmä. Molemmissa menetelmissä vääntömomentti huomioidaan yhdessä taivutusmomentin kanssa. Menetelmistä suositeltavammaksi osoittautui Wood and Armer -menetelmä, jonka esittämät mitoitusvoimasuureet olivat selkeästi tulkittavia ja niiden lähtötiedoksi ei tarvinnut betoniterästen kokoa ja sijaintia, toisin kuin rakenneosaa tasoina käsittelevässä Baumann-menetelmässä. Menetelmät ovat käytettävissä vain kaksiulotteisessa laskentamallissa. Menetelmien voidaan olettaa olevan konservatiivisia, eli varmallalla puolella olevia. Esimerkiksi Wood and Armer -menetelmässä vääntömomentti huomioidaan itseisarvona, jolloin edullista vaikutusta ei oteta huomioon. Menetelmien käyttöä käyttörajatilassa ei tässä työssä käsitelty, menetelmien konservatiivisuuden takia niiden käytön voidaan olettaa olevan kyseenalaista.

Kolmiulotteisessa laskentamallissa mitoittavien voimasuureiden muodostamismenetelmiä ei ole. Kolmiulotteisen laskentamallin tuloksia on tulkittava jännityksistä, joiden tulkinnan todettiin olevan haastavaa. Solmusuureiden eli tiedon määrä on nimittäin suuri ja halutun tiedon rajaaminen on hankalaa. Tässä opinäytetyössä käytettiin Dlubal RFEM -ohjelmistoa, jonka sisäisellä työkalulla, tulospalkilla, jännityksistä saatiin integroitua yksiulotteisia voimasuureita. Tulospalkin käytön kuitenkin todettiin olevan kyseenalaista sen ollessa työkalu työkalun sisällä. Tulospalkki ei myöskään tuonut ratkaisua vääntömomentin huomioimiseen. Vääntömomentin vaikutus oli huomioitava tulospalkin antamissa tuloksissa käsin. Tämä on virhealtista ja aikaa vievää. Tulosten tulkittamisen todettiin näin ollen olevan yksinkertaisempaa ja luotettavampaa kaksiulotteisissa laskentamalleissa.

Käytännönosuus päätettiin CASE-laskentaan, jossa tehtiin yksinkertaistettu laskenta paksulle pilarilaatalle. Pilarilaatan päälle rakentui 11-kerroksinen asuinkerrostalo. CASE-laskennan muuttujina oli laskentamallin ulottuvuus, käytettävä laattateoria ja kuormitustapa. Laskentamallien ulottuvuuksien ja laattateorioiden vaikutuksen todettiin tukevan teoriaosuudessa esitettyjä asioita. CASE-laskennassa huomattiin myös mitoittavien voimasuureiden ja vääntömomentin vaikutus, jonka huomiotta jättäminen voi johtaa alimitoitukseen. Kuormitustavoilla pyrittiin havainnollistamaan rakennesuunnittelussa tyyppillistä lähtötietopuutetta. Kuormitustavoista tasaisen kuormituksen todettiin olevan pääsääntöisesti varmallalla puolella, mutta epäedullinen viivakuormituksen sijainti loi paikoin vääntömomenttia ja sitä kautta pahempaa rasitusta laataan. CASE-laskenta oli yksinkertaistettu, eikä sen perusteella voi luoda yksiselitteistä ohjetta. Käytännössä jokaisen rakenneosan mitoitus tilanne on erilainen geometrian, kuormituksen ja reunaehtojen suhteen.

Tämä opinnäytetyö täytti lähtökohtaisesti tavoitteensa, mutta toi samalla useita uusia pohdittavia ja rakennesuunnittelijan harkinnan varaan jääviä asioita. Opinnäytetyön perusteella voidaan kuitenkin muodostaa seuraava ohjeellinen paksujen teräsbetonilaattojen FEM-rakenneanalyysin prosessi:

- Rakennesuunnittelijan on tunnettava elementtimenetelmän perusteet ja käytettävä ohjelmisto (Dlubal RFEM, Strusoft FEM-Design, ADAPT-Builder, ETABS, STAAD.Pro, SCIA Engineer tai muu vastaava FEM-ohjelmisto).
- Rakennesuunnittelijan on huomioitava Eurokoodin rakenneosien määritelmät ja niiden vaikutus rakenneosan toimintaan ja mitoitukseen
  - Laatta = jännevälin ja paksuuden suhde  $\geq 5$
  - Palkki = jännevälin ja paksuuden suhde  $< 5$ , mutta  $> 3$
  - Seinämäinen palkki = jännevälin ja paksuuden suhde  $< 3$
- Rakenneosasta eli tässä tapauksesta teräsbetonilaatasta luodaan mahdollisimman edustava laskentamalli
- Laskentamalli on suositeltavaa luoda kaksiulotteisena laskentamallina, tarvittaessa kolmiulotteista laskentamallia voidaan käyttää vertailevana menetelmänä
- Laskennassa käytettäväksi laattateoriaksi valitaan



- Kirchhoff laattateoria (ohuen laatan teoria), kun jännevälin ja paksuuden suhde suurempi tai yhtä suuri kuin 5
- Reissner-Mindlin laattateoria (paksun laatan teoria), kun jännevälin ja paksuuden suhde on alle 5
- Mikäli jännevälin ja paksuuden suhde on alle 3, antaa kaksiulotteinen laskentamalli virheellisiä muodonmuutostuloksia laattateoriasta huolimatta
- Jännevälin ja paksuuden suhteen ollessa alle 3, on muodonmuutosten tarkastelussa suositeltavaa käyttää kolmiulotteista laskentamallia ja käsitellä rakenneosaa seinämäisenä palkkina Eurokoodin mukaisesti
- Laskentamallin elementtitiheys on rakennesuunnittelijan harkinnan varassa, minimivaatimus on 8-10 elementtiä tukivälille tai elementin silmäkoko 1000 mm, kumpi antaa pienemmän arvon
- Laskenta-aika huomioiden elementtitiheyden on kuitenkin syytä olla tiheämpi, esimerkiksi teräsbetonilaattojen tapauksessa elementtikoko = laatan paksuus tai paksujen teräsbetonilaattojen tapauksessa elementtikoko = laatan paksuus jaettuna 8-10
- Tuet on mallinnettava mahdollisimman todenmukaisesti, suositeltavaa on käyttää solmutukea, jonka antamat tulokset vastaavat analyyttisiä käsin laskettuja arvoja
- Käytettävä analyysityyppi on valittava tarkoitukseen sopivaksi, pääasiallisesti voimasuureiden määrittämisessä käytetään geometrisesti lineaarista analyysityyppiä
- Betonin materiaaliominaisuuksista viruma, halkeilu ja kutistuminen on huomioitava
- Viruma vaikuttaa redusoivasti kimmokertoimeen
- Halkeilu vaikuttaa redusoivasti jäyhyysmomenttiin
- Taivutusjäykkyys muodostuu kimmokertoimen ja jäyhyysmomentin tulona, joka vaikuttaa olennaisesti laatoissa tyypillisesti mitoittavaan taipumaan
- Viruman ja halkeilun vaikutusta voidaan arvioida likimääräisesti redusoimalla kimmokerrointa, laskentaa voidaan tarkentaa käsin laskennalla tai tietokoneavusteisesti
- Laatan mitoittavissa voimasuureissa on huomioitava vääntömomentin vaikutus valitulla menetelmällä, kuten Wood and Armer – tai Baumann-menetelmällä

- Menetelmistä suositeltavampi on Wood and Armer- menetelmä, jossa rakenteen betoniterästen kokoa tai sijaintitietoa ei tarvita, toisin kuin rakenneosaa tasoina käsittelevässä Baumann-menetelmässä
- FEM-rakenneanalyysin antamiin tuloksiin tulee aina suhtautua kriittisesti ja tehdä vertailulaskelmia muilla menetelmillä

Jatkotutkimusaiheiksi esitetään jo edellä mainittua rakenneosien toiminnan ja mitoitusmenetelmien tarkempaa käsittelyä. Missä tilanteissa voidaan käyttää jännittämätöntä betonirakennetta? Milloin betonirakenne on jännitettävä? Voidaanko näille kahdelle menetelmälle muodostaa sovellettavuusrajaa?

Betoni materiaaliominaisuuksiin massiivisissa valuissa kuuluu kovettumisreaktion eli hydrataation aiheuttama lämmönkehitys. Lämmönkehityksellä on epäedullinen vaikutus lujuuden kehitykseen ja se voi aiheuttaa halkeilua. Tätä aihetta on tutkittu, mutta sen esiin nostaminen siirtolaattojen yhteydessä on oleellista. Millä käytännön toimenpiteillä rakennesuunnittelija ja työmaa voi ehkäistä lämmönkehitystä? Voidaanko lämmönkehitystä hallita jakamalla rakenneosan valuosiin? Valuun osiin jakamisen myötä syntyy työsaumoja, niiden kestävyys?

Siirtolaattojen valut aiheuttavat myös huomattavia valukuormia. CASE-laskennan 2 m paksulla laatalla valukuorma on jo 50 kN/m<sup>2</sup>. Tämä tarkoittaa käytännössä sitä, että kuorma on välitettävä läpi rakennusrungon kantavaan maapohjaan asti. Jatkotutkittavaksi aiheeksi voisi näin ollen esittää siirtolaattojen työmaatekniikan erityispiirteitä. Massiivisten betonivalujen tuentaperiaatteet? Rakennesuunnittelijan ja työmaan yhteistyö? Valukuorman huomioiminen rakenteiden suunnittelussa? Edellä mainittu valun osiin jakaminen ja sitä myötä kevyempi valukuorma?

Paksut teräsbetonilaatat, siirtolaatat, ovat nostaneet esiin useita tutkimus-, suunnittelu- ja toteutushaasteita. Osaan suunnitteluhaasteista tämä opinnäytetyö vastaa menestyksekkäästi.

## LÄHTEET

Betoniteollisuus ry. Tietoa betonista, perustietopaketti. Luettu 13.04.2020.  
<https://betoni.com/tietoa-betonista/perustietopaketti/>

Betoniteollisuus ry. 2010. Korkeat rakennukset. Luettu 27.09.2020.  
<https://www.elementtisuunnittelu.fi/Download/23690/Korkeiden%20rakennusten%20j%c3%a4ykistys.docx>

Blaauwendraad, J. 2010. Plates and FEM. Springer Netherlands.

Brooker, O. 2006. How to design reinforced concrete flat slabs using Finite Element Analysis. The Concrete Centre.

Cook, R.D. 1995. Finite Element Modeling for Stress Analysis. John Wiley & Sons, Inc.

Dlubal. n.d. Brief History and Facts. Luettu. 11.1.2020.  
<https://www.dlubal.com/en/company/about-us/history-and-facts>

Dlubal. 2019a. FAQ 002960 EN. Luettu 11.1.2020.  
<https://www.dlubal.com/en/support-and-learning/support/faq/002960>

Dlubal. 2019b. FAQ 003158 EN. Luettu 05.04.2020.  
<https://www.dlubal.com/en/support-and-learning/support/faq/003158>

Hanka, J. 2019. Massiivibetonirakenteiden suunnittelussa huomioitavia asioita, CASE kuormansiirtorakenteet. Paikallavaluteknologiapäivä 15.10.2019. Sweco Rakennetekniikka Oy.

Hokkanen, S. 2016. Betonirakenteiden stabiliteettilaskelmat eurokoodin mukaan. Rakennustekniikan diplomi-insinöörin tutkinto-ohjelma. Tampereen teknillinen yliopisto. Diplomityö.

Kerokoski, O. 2019. Teräsbetonirakenteiden syventävät opinnot. Luentomoniste. Luettu 11.09.2020.

Lunta, J. 2009. Laattarakenteiden mallinnus elementtimenetelmällä. Rakennus- ja rakennustuotantotekniikan tutkinto-ohjelma. Teknillinen korkeakoulu. Kandidaatintyö.

Lehtonen, T. 2013. FEM-laskentaohjelmien soveltuvuus betonirakenteiden mitoitukseen. Rakennustekniikan diplomi-insinöörin tutkinto-ohjelma. Tampereen teknillinen yliopisto. Diplomityö.

Leskelä, M. V. 2009. Betonirakenteiden suunnittelu ja mitoitus 2009. 2. korjattu painos. Helsinki: Suomen Betoniyhdistys.

Liikennevirasto 2017. Eurokoodin soveltamisohje, Betonirakenteiden suunnitteluoheje – NCCI 2.  
[https://julkaisut.vayla.fi/pdf8/lo\\_2017-31\\_ncci2\\_web.pdf](https://julkaisut.vayla.fi/pdf8/lo_2017-31_ncci2_web.pdf)

Lähteenmäki, M. 2009a. Elementtimenetelmän perusteet. Luentomoniste. Luettu 16.12.2019.

<http://www2.amk.fi/digma.fi/www.amk.fi/digma/kaikki.html#tekniikkajatuotanto>

Lähteenmäki, M. 2009b. Lujuusopin jatkokurssi. Luentomoniste. Luettu 8.2.2020.

[https://mlahteen.fi/arkistot/lujik\\_ark.htm](https://mlahteen.fi/arkistot/lujik_ark.htm)

Nykyri, P. 2013. Betonirakenteiden suunnittelun oppikirja 2013. Osa 1. Helsinki: BY-koulutus.

Nykyri, P. 2015. Betonirakenteiden suunnittelun oppikirja 2014. Osa 2. Helsinki: BY-koulutus.

Oñate, E. 2013. Structural Analysis with the Finite Element Method. Linear Statics Volume 2: Beams, Plates and Shells. Dordrecht: Springer Netherlands.

Rehm, G. DI. 2019. Surface or solids in thick plates. Sähköpostiviesti. Luettu 18.12.2019.

Rombach, G. 2011. Finite-element Design of Concrete Structures, 2nd edition. Thomas Telford.

RF-CONCRETE. 2018. Manual. Tiefenbach. Saksa. Dlubal Software GmbH.

RFEM. 2016. Program Description. Tiefenbach, Saksa. Dlubal Software GmbH.

Saarinen, E. n.d. Betonirakenteiden suunnittelu. Rakennustieto. Luettu 5.11.2020.

<https://www.rakennustieto.fi/Downloads/RK/RK010302.pdf>

Salmi, T. & Kuula, K. 2012. Rakenteiden mekaniikka. Tampere: Pressus Oy.

SFS-EN 1992-1-1 + A1 + AC. 2015. Eurokoodi 2. Betonirakenteiden suunnittelu. Osa 1-1: Yleiset säännöt ja rakennuksia koskevat säännöt. Helsinki: Suomen Standardoimisliitto SFS. Luettu 25.1.2020. Vaatii käyttöoikeuden.

<https://online.sfs.fi/fi/index.html.stx>

Betoninormikortti 7. 1990. Eräs tapa käyttää lineaarista elementtimenetelmää halkeilevien teräsbetonirakenteiden rajatilamitoituksessa. Luettu 07.08.2020.

[http://www.betoniyhdistys.fi/media/normikortit/normikortti\\_7.pdf](http://www.betoniyhdistys.fi/media/normikortit/normikortti_7.pdf)

Wood, R.H. 1968. The reinforcement of slabs in accordance with pre-determined field of moments. Garston, Iso-Britannia, Building Research Station.