



VAASAN AMMATTIKORKEAKOULU
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

TÄMÄ ON ALKUPERÄISEN ARTIKKELIN RINNAKKAISTALLENNE

Käytä viittauksessa alkuperäistä lähdettä:

Toimela, T. 2020. Navigaatiofysiikkaa III - Etäisyyden määrittämisestä. Dimensio, 19.2.2020.

URL: <https://www.dimensiolehti.fi/navigaatiofysiikkaa-iii-etaisyden-maarityksesta/>

Versio: käsikirjoitusversio

Copyright: © 2020 Tekijä

Navigaatiofysiikkaa III. Etäisyyden määrittämisestä

T. Toimela

Vaasan Ammattikorkeakoulu

tuomo.toimela@vamk.fi

Navigaatiokirjallisuudessa, esim. [1], löytyvä laskukaava etäisyyden laskemiseksi majakkaan, silloin, kun majakan valo tulee juuri näkyviin horisontin takaa, on

$$s = 2,08 \left(\sqrt{\frac{H}{m}} + \sqrt{\frac{h}{m}} \right) M \quad (1)$$

jossa H ja h ovat majakan (valon) ja silmän korkeudet merenpinnasta. M = meripeninkulma (Nautical mile) = 1852 m. Tämän kirjoitussarjan ensimmäisessä osassa [2] saimme geometrisellä tarkastelulla tuloksen

$$s = 1,927 \left(\sqrt{\frac{H}{m}} + \sqrt{\frac{h}{m}} \right) M \quad (2)$$

Yllä oleva geometrinen tulos poikkeaa yhtälöstä (1) noin 8 %. Syy eroavaisuuteen löytyi siitä, että geometrisessä tarkastelussa ei oltu otettu huomioon valon taittumista, vaan oli oletettu valon kulkevan viivasuoraan. Tämän kirjoitussarjan toisessa osassa [3] johdimme yhtälön valon kulkusuunnan maan pinnan kanssa yhdensuuntaisen tason kanssa muodostaman kulman θ riippuvuudelle maan keskipisteestä mitatusta etäisyydestä r

$$\cos \theta = \frac{R}{r} \cdot \frac{1 + a\rho_0}{1 + a\rho_0 e^{\left(-\frac{\rho_0 g T_0}{p_0 \alpha} + 1\right) \ln \frac{1}{1 - \alpha (r-R)/T_0}}} \quad (3)$$

Tämä yhtälö siis vastasi tilannetta, jossa valonsäde sivuaa yhdessä kohtaa meren pintaa, eli $\theta = 0$, kun $r = R$.

Oletetaan tässä normaali ilmanpaine $p_0 = 101,325 \text{ kPa}$ ja lämpötilaa $T_0 = +25 \text{ °C}$ vastaava (ideaalikaasun) tiheys $\rho_0 = 1,185 \text{ kg/m}^3$, saadaan $b = \frac{\rho_0 g}{p_0} = 0,000115 \text{ 1/m}$. Vakiolle α käytämme arvoa $\alpha = 0,0065 \text{ K/m}$ [4, 5]. Edelleen ilman taitekertoimen tiheysriippuvuuden vakiolle a käytämme lukuarvoa $a = 0,000228 \text{ m}^3/\text{kg}$ [4].

Hyödynnämme tätä yhtälöä (3) etäisyyden laskemiseksi majakkaan. Etäisyyden määrittämiseksi tarvitaan korkeus ($h = r - R$) valon maan keskipisteen suhteen kiertyneen kulman φ funktiona. Nyt valon kulkusuunnan (vaakatason kanssa muodostaman) kulman θ tangenti on kulkukäyrän kulmakerroin

$$\tan \theta = \frac{dy}{dx} \quad (4)$$

Siirryttäessä karteesisesta xy -koordinaatistosta napakoordinaatteihin (r, φ) pätee (lähtöpisteen ollessa y -akselilla) infinitesimaalisella tarkkuudella $dy = dr$ ja $dx = r d\varphi$ (kts. kuva 1.). Joten

$$\frac{dr}{d\varphi} = r \tan \theta = r \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}}{\cos \theta} = \frac{r \sqrt{r^2 - R^2 (f(r - R))^2}}{R f(r - R)} \quad (5)$$

jossa tangenti on lausuttu kosinin avulla ja funktio $f(x)$ on yhtälön (3) perusteella

$$f(x) = \frac{1 + a\rho_0}{1 + a\rho_0 e^{\left(-\frac{bT_0}{\alpha} + 1\right) \ln \frac{1}{1 - \alpha x/T_0}}} \quad (6)$$

Yhtälöstä (5) saadaan integroitua etäisyys isoympyrää pitkin

$$s = R\varphi = \int_R^r \frac{R^2 f(r - R) dr}{r \sqrt{r^2 - R^2 (f(r - R))^2}} = \int_0^H \frac{R^2 f(x) dx}{(R + x) \sqrt{(R + x)^2 - R^2 (f(x))^2}} \quad (7)$$

Ottaen tällöin huomioon, että $H \ll R$ ja $bH \ll 1$, kehitetään integroitava muuttujan x johtavaan kertalukuun (vrt. McLaurinin sarja). Siten saadaan

$$s \cong R \int_0^H \frac{dx}{\sqrt{2Rx - 2R^2 a \rho_0 (b - \alpha/T_0)x / (1 + a \rho_0)}} = \frac{\sqrt{2RH}}{\sqrt{1 - Ra \rho_0 (b - \alpha/T_0) / (1 + a \rho_0)}} \quad (8)$$

Kirjoitetaan yhtälö (8) meripeninkulman M avulla kuten tämän kirjoitus sarjan ensimmäisessä osassa [2]

$$s = \sqrt{\frac{360 \cdot 60}{1852 \pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - Ra \rho_0 (b - \alpha/T_0) / (1 + a \rho_0)}} \cdot \sqrt{\frac{H}{m}} M \quad (9)$$

Yhtälössä (9) ensimmäinen kerrointermi on arvoltaan 1,927, toinen termi puolestaan on 1,091, jolloin yhteensä

$$s = 2,10 M \sqrt{\frac{H}{m}} \quad (10)$$

Valon taittumisen vaikutus etäisyysmittaukseen on huomattavan suuri, noin 9 %, vaikka ilman taitekerroin muuttuukin esim. 25 m korkeuserolla alle miljoonaosan. Asia selittyy sillä, että valo etenee eri kerrosten läpi hyvin laakeassa tulokulmassa

$$90^\circ - \theta \cong 90^\circ \quad (11)$$

Matemaattisesti tämän taitekertoimen pienen muutoksen aiheuttaman vaikutuksen valon kulkukulmaan näkee kirjoitusarjan aiemmassa osassa [3] johdetusta valon kulkusuunnan ja taitekertoimen välisestä relaatiosta:

$$d\theta = \frac{dn}{n \tan \theta} \cong \frac{dn}{n \theta} \quad (12)$$

jolloin hyvin pienikin taitekertoimen dn muutos aiheuttaa suhteellisen ison kulmamutoksen, koska kulma θ itsessään on pieni.

Kerroin yhtälössä (10) on prosentoin suurempi kuin, mitä kirjallisuudessa [1] on annettu. Tässä on kuitenkin huomattava, että kertoimen tarkka arvo riippuu lämpötilasta ja paineesta ja lisäksi maan gravitaatiokentästä purjehduspaikalla. Edellä on oletettu lämpötilan olevan +25 °C, ilmanpaineen normaali ja painovoimakiiltoisuus ns. normipaikkakunnalla, $g = 9,80665 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Etäisyyden voisikin siten kirjoittaa lopuksi (huomioiden myös silmän korkeuden h):

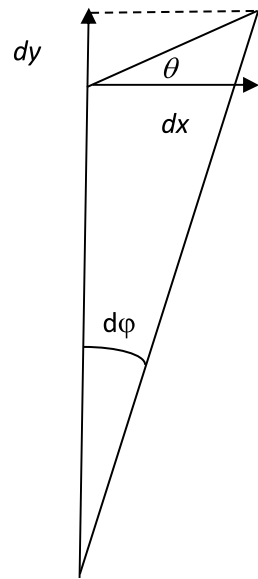
$$s = \frac{1,927}{\sqrt{1 - a R \cdot \frac{p M_{ilma}}{R_m T^2} \left(\frac{g M_{ilma}}{R_m} - \alpha \right) / \left(1 + a \frac{p M_{ilma}}{R_m T} \right)}} \cdot \left(\sqrt{\frac{H}{m}} + \sqrt{\frac{h}{m}} \right) M \quad (13)$$

Tämän etäisyydekaavan kerroin on isompi korkeapaineen vallitessa. Isompiin kertoimiin päädytään myös, jos tyydytään purjehtimaan vain korkeilla pohjoisilla tai eteläisillä latitudeilla, jolloin lämpötila T on yleensä alempi ja myös painovoimakiiltoisuus g on keskimääräistä suurempi.

Majakan etäisyyden laskemiseksi tarkasti pitäisi siis lukea merikortista majakan valon korkeus (H), määrittää silmän korkeus meren pinnasta (h), selvittää painovoimakiiltoisuus purjehduspaikalla (g) ja lukea ilmapuntari (p) sekä lämpömittari (T).

Lähdeviitteet

- [1] Suomen Navigaatioliitto: Veneilijän merenkulkuoppi II, Rannikko-navigointi, Unigrafia Oy, Helsinki, 2013
- [2] T. Toimela, Navigaatiofysiikka I, Dimensio, Helmikuu 2020
- [3] T. Toimela, Navigaatiofysiikka II, Dimensio, Helmikuu 2020
- [4] David R. Lide (ed.), Handbook of Chemistry and Physics, 87th edition, Taylor Francis Group, 2006
- [5] Inkinen-Tuohi, Momentti 1, Insinöörikoulutuksen fysiikka, Otava, 1999



Kuva 1.