Navigaatiofysiikkaa II. Valon taittuminen ilmakehässä

T. Toimela

Vaasan Ammattikorkeakoulu

tuomo.toimela@vamk.fi

Tämän kirjoitussarjan ensimmäisessä osassa [1] laskimme majakan etäisyyttä tilanteessa, kun majakan valo tulee juuri näkyviin horisontin takaa. Oletimme laskussa valon kulkevan viivasuoraan. Tämän oletuksen mukaan kulma θ, jonka valonsäde muodostaa vaakatason (kussakin kohdassa alapuolella olevan maan pinnan kanssa yhdensuuntaisen tason) kanssa, on sama kuin valon maan keskipisteen suhteen kiertämä kulma φ (kts. kuva 1.)

$$\theta = \varphi = \cos^{-1}\frac{R}{r} \tag{1}$$

jossa r on maan keskipisteestä mitattu etäisyys ($r = R+H$). Eli maan keskipisteestä mitatulle etäisyydelle r ja valon suuntakulmalle θ pätee relaatio

$$\cos\theta = \frac{R}{r} \tag{2}$$

Differentioimalla yhtälö (2) puolittain saadaan tällöin valon edetessä korkeuden r ja kulman θ muutoksille

$$-\sin\theta\, d\theta = -\frac{R}{r^2}\,dr = -\cos\theta\,\frac{dr}{r} \tag{3}$$

Supistetaan miinusmerkki yhtälöstä (3) ja jaetaan $\cos\theta$:lla, jolloin saadaan

$$\tan\theta\, d\theta_1 = \frac{dr}{r} \tag{4}$$

Kulman θ ja etäisyyden r välinen relaatio muuttuu, kun otetaan huomioon valon taittuminen. Tarkastellaan valon taittumista infinitesimaalisen pienessä ilmakerroksessa. Snellin laista saadaan (kts. kuva 2)

$$n(r)\cos\theta = n\sin(90° - \theta) = (n+dn)\sin(90° - \theta - d\theta) = (n+dn)\cos(\theta + d\theta) \tag{5}$$

Käyttäen summakulman kosinia saadaan

$$n\cos\theta = (n+dn)(\cos\theta\cos d\theta - \sin\theta\sin d\theta) \tag{6}$$

Nyt infinitesimaalisille muutoksille $d\theta$ pätee $\cos d\theta = 1$ ja $\sin d\theta = d\theta$, jolloin saadaan

$$d\theta_2 = \frac{dn}{n\tan\theta} \tag{7}$$

Ilman taitekerroin *n* riippuu ilman tiheydestä [2]

$$n = 1 + a\rho \tag{8}$$

Vakiolle *a* löytyy kirjallisuudesta hieman toisistaan poikkeavia arvoja. Alonso-Finn [2] antaa lukuarvon $a = 0{,}00024\ \mathrm{m}^3/\mathrm{kg}$. Taulukkokirjan Handbook of Chemistry and Physics [3] tulosten saamiseksi on oletettava lukuarvo $a = 0{,}000228\ \mathrm{m}^3/\mathrm{kg}$. Ilman tiheys ρ taasen riippuu korkeudesta [4]

$$\rho = \rho_0\, e^{-\frac{\rho_0 g h}{p_0}} \quad , \quad h = r - R \tag{9}$$

Tämä yksinkertaistettu yhtälö (9) kuitenkin yliarvioi tiheyden ja sen mukana valon taitekertoimen muutosta korkeuden funktiona. Se ei ota huomioon lämpötilan riippuvuutta korkeudesta. Nyt ideaalikaasun tilanyhtälön perusteella ilman tiheys on

$$\rho = \frac{pM_{ilma}}{R_m T} \tag{10}$$

Jossa R_m on moolinen kaasuvakio ja M_{ilma} on ilman moolimassa.

Kahden (tai useamman) muuttujan funktion $f(x,y)$ muutos muuttujien *x* ja *y* infinitesimaalisen pienissä muutoksissa voidaan lausua kokonaisdifferentiaalin avulla

$$\Delta f \approx df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy \tag{11}$$

jossa $\partial f / \partial x$ on funktion $f(x,y)$ osittaisderivaatta muuttujan *x* suhteen (normaali derivaatta niin, että muuttujaa *y* käsitellen vakiona). Kirjoitetaan tiheyden (10) kokonaisdifferentiaali paineen ja lämpötilan avulla

$$d\rho = \frac{M_{ilma}}{R_m T}\, dp - \frac{M_{ilma} p}{R_m T^2}\, dT \tag{12}$$

Paineen muutos aiheutuu aerostaattisen paineen muutoksesta (vrt. hydrostaattinen paine)

$$dp = -\rho\, g\, dh \tag{13}$$

Lämpötilalle voidaan olettaa lineaarinen riippuvuus korkeudesta

$$T = T_0 - \alpha\, h \tag{14}$$

jossa $\alpha = 0{,}0065$ K/m [3, 4]. Lämpötilan muutos yhtälössä (12) on siis

$$dT = -\alpha\, dh \tag{15}$$

Tiheyden muutos voidaan lausua siten korkeuden avulla

$$d\rho = -\frac{M_{ilma} g \rho}{R_m T}\, dh + \frac{M_{ilma} p}{R_m T^2} \alpha\, dh \tag{16}$$

Eli

$$\frac{d\rho}{\rho} = \left(-\frac{M_{ilma} g}{R_m} + \alpha\right) \frac{dh}{T_0 - \alpha\, h} \tag{17}$$

Integroidaan tämä puolittain ja ratkaistaan tiheys. Yhtälön (9) antama tiheyden korkeus-riippuvuus korvautuu tällöin lausekkeella

$$\rho = \rho_0 \, e^{\left(-\frac{g\,M_{ilma}}{R_m \alpha}+1\right)\ln\frac{T_0}{T_0 - \alpha\, h}} = \rho_0 \, e^{\left(-\frac{\rho_0 g T_0}{p_0 \alpha}+1\right)\ln\frac{1}{1-\alpha\, h/T_0}} \tag{18}$$

Ottamalla raja-arvon $\alpha \to 0$ voimme todeta, että yhtälö (18) palautuu aiempaan yhtälöön (9). Käyttämällä kuitenkin tarkempaa yhtälöä (18) saamme yhtälön (8) taitekertoimelle lausekkeen

$$n(r) = 1 + a\rho_0 \, e^{\left(-\frac{\rho_0 g T_0}{p_0 \alpha}+1\right)\ln\frac{1}{1-\alpha\,(r-R)/T_0}} \tag{19}$$

jossa käytämme vakiolle a lähteen [3] arvoa $a = 0{,}000228\ \mathrm{m}^3/\mathrm{kg}$. Nyt yhtälön (7) perusteella

$$d\theta_2 = \frac{1}{n \tan\theta} \frac{dn}{dr}\, dr \tag{20}$$

Yhdistämällä geometriasta seuraava $d\theta_1$, yhtälö (4), ja Snellin laista aiheutuva $d\theta_2$, yhtälö (20), saadaan

$$\tan\theta\, d\theta = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{n}\frac{dn}{dr}\right) dr \tag{21}$$

Integroimalla tämä puolittain

$$\int_0^\theta \tan w\, dw = \int_R^r \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{n}\frac{dn}{dz}\right) dz \tag{22}$$

saadaan

$$-\ln\cos\theta = \ln\frac{r}{R} + \ln n(r) - \ln n(R) \tag{23}$$

Sijoittamalla taitekerroinfunktio (19) yhtälöön (23) saadaan valon kulkusuunnan maan pinnan kanssa yhdensuuntaisen tason kanssa muodostaman kulman θ riippuvuudelle maan keskipisteestä mitatusta etäisyydestä *r* yhtälö

$$\cos\theta = \frac{R}{r} \cdot \frac{1 + a\rho_0}{1 + a\rho_0 e^{\left(-\frac{\rho_0 g T_0}{p_0 \alpha} + 1\right)\ln\frac{1}{1 - \alpha\,(r-R)/T_0}}} \tag{24}$$

Tämä tarkempi yhtälö korvaa valon suoraviivaisen kulun oletuksen mukaisen yhtälön (2). Käytämme tätä yhtälöä (24) tämän kirjoitussarjan kolmannessa osassa [5] aluksen etäisyyden määrittämiseen majakasta.

Lähdeviitteet

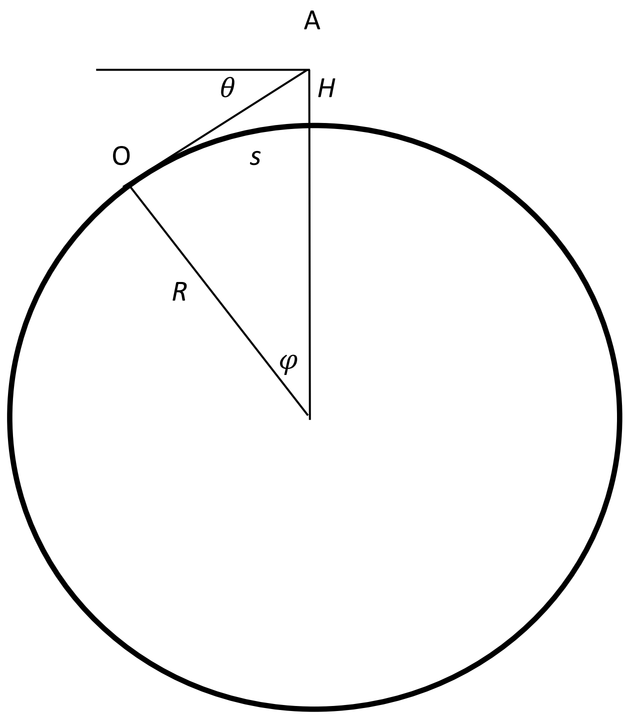
[1] T. Toimela, Navigaatiofysiikkaa I, Dimensio, Helmikuu 2020

[2] Marcello Alonso, Edward J. Finn: Fundamental University Physics II, Addison-Weseley, 1967

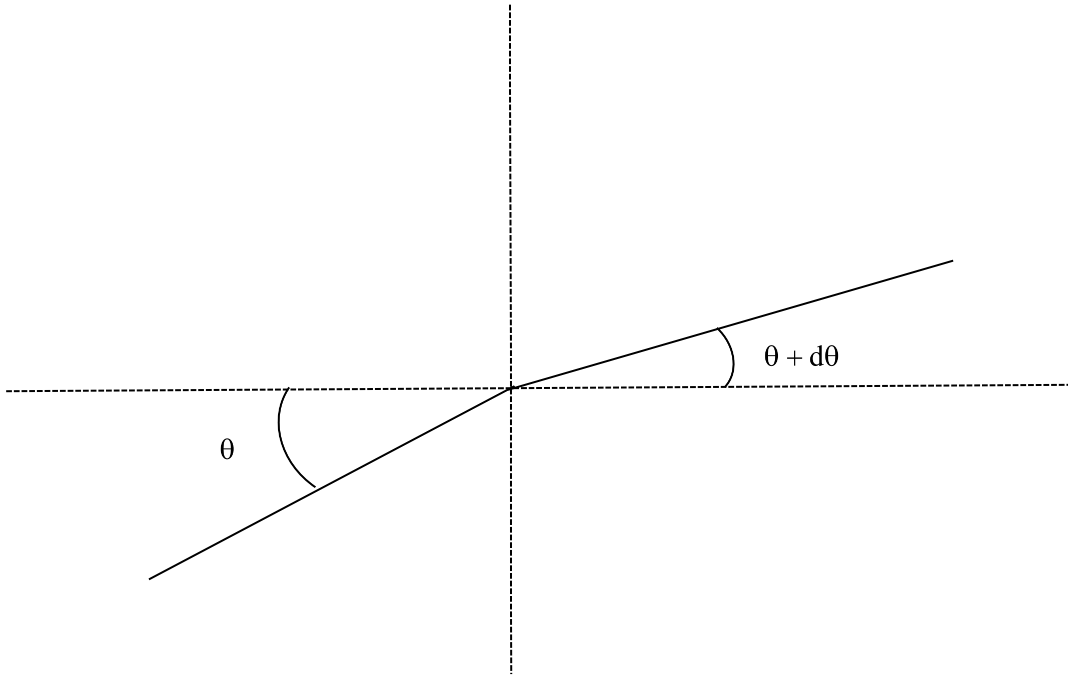
[3] David R. Lide (ed.), Handbook of Chemistry and Physics, 87^{th} edition, Taylor Francis Group, 2006

[4] Inkinen-Tuohi, Momentti 1, Insinöörikoulutuksen fysiikka, Otava, 1999

[5] T. Toimela, Navigaatiofysiikkaa III, Dimensio, Helmikuu 2020



Kuva 1.



Kuva 2