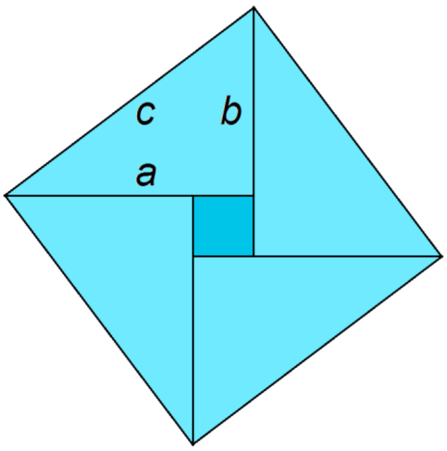
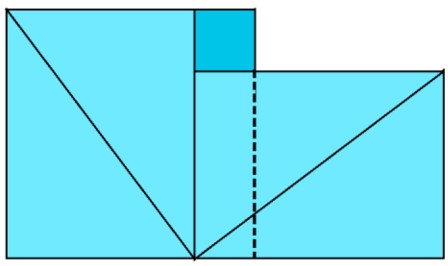
Timo Ojala, Leena Ojala ja Timo Ranta

GEOMETRIA





Pythagoras Samoslainen n. v.550 eKr:
Suorakulmaisen kolmion hypotenuusan neliö on yhtä suuri kuin kateettien neliöiden summa eli

$$c^2 = a^2 + b^2$$

samk

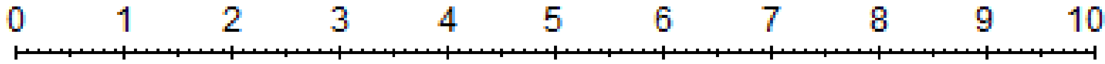
ESIPUHE

Olemme algebran monisteemme esipuheessa kerrotulla tavalla jatkaneet tämän geometriankin monisteen muokkaamista vähentämällä käsin suoritettavaa mekaanista laskemista. **Tällaiset rutiinithan voi siirtää tietokoneilla ja laskimilla suoritettaviksi ja mielestämme näin pitäisi insinööriopinnoissa menetellä valmistauduttaessa työelämään ja jatko-opintoihin. Mekaanisen käsinlaskennan sijasta matematiikassa on ennen kaikkea keskityttävä sekä oleellisimpien asioiden ymmärtämiseen että tarvittavien toimenpiteiden ja saatujen tulosten ymmärrettävään esittämiseen.**

Apuna esimerkeissä olemme käyttäneet symbolista laskinta TI-Nspire CX CAS. Annetuista ohjeista saa vinkkejä muidenkin symbolisten laskinten tai matematiikkaohjelmien hyödyntämismahdollisuuksista.

Geometrian tehtävien käsittelyssä on monasti esitetty myös piirtämisratkaisu, koska se on usein nopein ja havainnollisin menettelytapa. Piirtämisratkaisun epätarkkuudesta ei yleensä ole haittaa, koska apuvälineillä samat tulokset saa helposti halutulla tarkkuudella. Esimerkiksi kolmion ratkaiseminen kannattaa suorittaa haluttaessa ensin graafisesti ja sitten valmiilla kolmion ratkaisuohjelmalla. **Näin saatava ajan säästö voidaan käyttää vaikka opintoalakohtaisten sovellustehtävien käsittelyyn ja tehokkaan laskimen tai tietokoneohjelman monipuolisemman käytön opettelemiseen.**

Monisteen kuvat ovat likimain tekstissä mainitussa koossa, jos kaksi sivua tulostetaan rinnan A4-kokoiselle arkille tai sivut näkyvät näytöllä koossa 148 mm × 210 mm. Jos näkymän koko on toinen, niin muutamiin kuviin liittyvät mittaukset pitäisi suorittaa alla olevalla sopivasti skaalautuvalla ”senttimetrimitalla”.



Harjoitustehtävien eri osioiden nimeämiskäytäntöä olemme selittäneet algebran monisteen esipuheessa.

Opettajat saavat kopioida tästäkin geometrian materiaalista sekä omaan opetuskäyttöönsä että opiskelijoilleen jaettavaksi mitkä tahansa sivut koko sivun kopioina tai vaihtoehtoisesti he voivat kertoa opiskelijoilleen, mistä tarpeelliset sivut voi tulostaa tai muutoin ladata käyttöön.

Oppimateriaalisarjan jatkokehittämistä varten otamme kiitollisina vastaan ilmoitukset painovirheistä ja parannusideat pienistä yksityiskohdista aina laajempiin kokonaisuuksiin asti. Samalla lausumme kiitokset myös ”Ojalain laskuoppien” aiemmille kehittäjille FM Marjo Ojalalle ja päämatemaatikko, SHV Lauri Ojalalle.

Porissa 28.8.2016

Timo Ojala
Emeritus yliopettaja
PTOL/SAMK 1977-2016
TY 1971-77, TTKK 1987-96
timo.ojala@live.fi

Leena Ojala
Matematiikan yo
Åbo Akademi

Timo Ranta
Matematiikan yliopisto-opettaja
TTY
timo.ranta@tut.fi

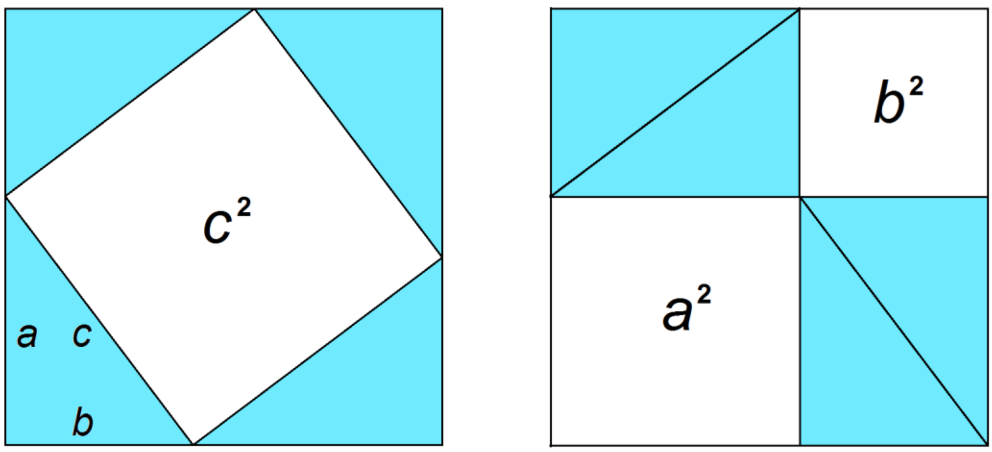
SISÄLLYSLUETTELO OSA 1

SISÄLLYSLUETTELO OSA 2

Timo Ojala, Leena Ojala ja Timo Ranta

GEOMETRIA

Osa 1



Pythagoras: $c^2 = a^2 + b^2$

samk

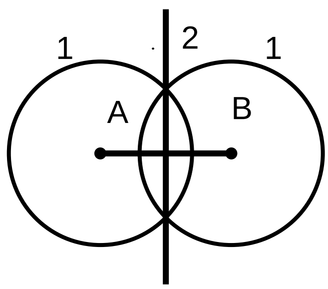
1. PERUSKÄSITTEITÄ JA -TULOKSIA

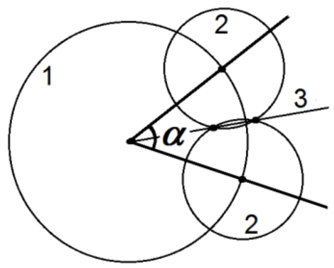
1.1 Klassisen geometrian piirtämistehtäviä

Klassisessa geometriassa tutkitaan sellaisia viivoja, jotka voidaan piirtää harpilla ja sellaisella viivoittimella, missä ei ole pituusmittaa. Esimerkkejä tällaisista viivoista ovat suora, jana, murtoviiva, ympyrä(viiva) ja ympyränkaari.

Algebran kurssiin kuuluvassa **analyyttisessa geometriassa** tutkitaan laskennollisesti pisteiden koordinaatteja ja viivojen yhtälöitä käyttäen edellisten lisäksi muitakin viivoja kuten ellipsiä ja paraabelia.

Esimerkki. Piirrä klassisen geometrian menetelmin eli harpilla ja viivoittimella
a) annetun janan AB keskinormaali   b) annetun kulman α puolittaja.





Kuvan numerot ilmaisevat piirtämisjärjestyksen. Kunkin ympyrän keskipiste on tarkalleen siinä, missä se näyttää olevankin ja kukin suora on piirretty kulkemaan niiden pisteiden kautta, joiden kautta se näyttääkin kulkevan. Kuvassa samalla numerolla merkityillä ympyröillä on yhtä suuret säteet.

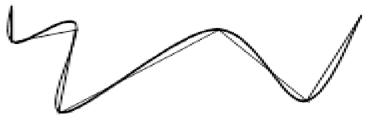
Jatkossa me käytämme piirtämistehtävissä hyväksemme myös erilaisia kolmio- ja yhdensuuntaisviivoittimia sekä pituusmittaa ja astelevyä. Suoritamme lisäksi laskutoimituksia saaduilla mittaustuloksilla, jolloin esimerkiksi kulman jakaminen kolmeen yhtä suureen osaan onnistuu hyvin helposti, vaikkakin se on mahdoton tehtävä klassisen geometrian mukaisesti harpilla ja viivoittimella.

Piirtämistehtävissä edellytämme ainoastaan, että ratkaisun on kaikissa mahdollisissa tapauksissa onnistuttava annetun ohjeen mukaan ilman kokeiluja. Esimerkiksi kolmion kärkipisteiden kautta kulkevan ympyrän piirtämistä emme hyväksy siten, että ympyrän keskipisteen sijainti arvataan ja arvausta tarvittaessa parannetaan uusilla arvauksilla, kunnes ympyrä näyttää kulkevan kolmion kärkipisteiden kautta. Keskipiste on haettava systemaattisella tavalla esimerkiksi määrittämällä kolmion sivujen keskinormaalien leikkauspiste. On selvää, että tässä keskinormaalien piirtämisessä tapahtuu käytännössä pieniä virheitä ja arvaamalla löydetty keskipiste voisi olla jopa parempikin kuin systemaattisella tavalla löytämämme piste, mutta siltikään me emme tässä geometrian kurssissa hyväksy kuvatunkaltaisia kokeellisia menetelmiä.

1.2. Viivan pituus

Janan pituus saadaan mittaamalla. Murtoviivan pituus saadaan laskemalla yhteen murtoviivan muodostavien janojen pituudet.

Kaarevan viivan likimääräinen pituus saadaan
- korvaamalla mitattava viiva murtoviivalla, jonka pituus saadaan useamman mittauksen summana
- laittamalla viivalle lanka, jonka pituus mitataan oikaistuna.



Ympyräviivan pituus saadaan myös laskemalla kaavasta

$$\boxed{p = 2\pi r} \quad \text{tai} \quad \boxed{p = \pi d},$$

jos säde r tai halkaisija d tunnetaan. Tekniikassa suositaan jälkimmäistä kaavaa, koska esimerkiksi putken halkaisija on usein helpommin mitattavissa kuin putken poikkileikkausympyrän säde.

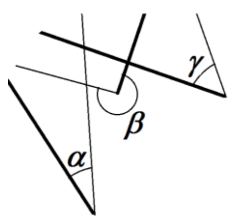
1.3 Kulmista

Kulman suuruus asteina saadaan esimerkiksi astelevyllä mittaamalla.

Kulma voidaan nimetä suuruutensa perusteella mm seuraavasti
- **terävä kulma** $\alpha < 90°$
- **suorakulma** $\alpha = 90°$
- **tylppä kulma** $90° < \alpha < 180°$
- **oikokulma** $\alpha = 180°$
- **kovera kulma** $0 < \alpha < 180°$
- **kupera kulma** $180° < \alpha < 360°$
- **täysikulma** $\alpha = 360°$

Kahta kulmaa α ja β sanotaan toistensa
- **komplementtikulmiksi**, jos kulmien summa $\alpha + \beta = 90°$
- suplementtikulmiksi, jos kulmien summa $\alpha + \beta = 180°$
- eksplementtikulmiksi, jos kulmien summa $\alpha + \beta = 360°$.

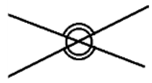
Vieressä on kolme samassa tasossa olevaa kulmaa α, β ja γ. Paksulla viivalla on esitetty kulmien vasemmat kyljet ja ohuella viivalla oikeat kyljet. Nimitys vasen kylki/oikea kylki riippuu siitä kumman käden puolelle kylki jää, kun katsoja seisoo kulman kärjessä kuvatasolla ja katsoo kulman aukeamissuuntaan. Vasemmat kyljet ovat keskenään **samannimisiä**, samoin oikeat.



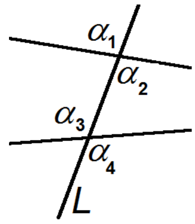
Kulmien sijainnin perusteella kulmista käytetään seuraavissa tuloksissa esiintyviä nimityksiä:

Vieruskulmat ovat toistensa suplementtikulmia eli niiden summa on $180°$.

Ristikulmat ovat yhtä suuret.

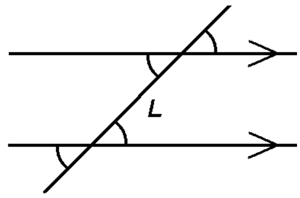


Jos suora L leikkaa kahta muuta suoraa, niin kuvan kulmia α_1 , α_2 , α_3 ja α_4 sanotaan **samankohtaisiksi kulmiksi**, sillä niissä leikkaava suora L on samannimisenä kylkenä (nyt oikeana kylkenä).



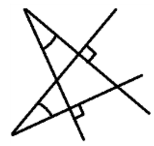
Lause. Jos suora leikkaa kahta yhdensuuntaista suoraa, niin samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuret.

Kääntäen: Jos suoran leikatessa kahta muuta suoraa samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuret, niin mainitut kaksi suoraa ovat yhdensuuntaiset.



Lause. Jos kahden terävän kulman samannimiset kyljet ovat yhdensuuntaiset, niin kulmat ovat yhtä suuret.

Lause. Jos kahden terävän kulman samannimiset kyljet ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, niin kulmat ovat yhtä suuret.



Edelliset lauseet voi helposti havaita oikeiksi:
Kahdessa ensimmäisessä tapauksessa toinen kulma (tai sen ristikulma) voidaan ilmeisesti suuntansa säilyttäen siirtää toisen kulman päälle.
Kolmannessa lauseessa toista kulmaa on ennen siirtoa kierrettävä 90 astetta.

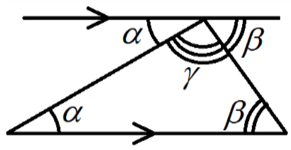
Sana terävä voitaisiin edellisissä lauseissa korvata myös sanalla kupera tai sanalla kovera. On kuitenkin huomattava, että kulmien yhtäsuuruuden varmistamiseksi meidän on tiedettävä, että molemmat kulmat ovat samantyyppisiä: molemmat teräviä, molemmat koveria tai molemmat kuperia, pelkästään samannimisten kylkien yhdensuuntaisuudesta tai kohtisuoruudesta ei vielä välttämättä seuraa kulmien yhtäsuuruus. Fysiikan kaltevaan tasoon liittyvissä tilanteissa tarkasteltavat kulmat ovat useimmiten teräviä ja siksi edellisissä lauseissa voi usein rajoittua tarkastelemaan vain teräviä kulmia**.**

1.4 Kolmio

Kolmion muodon perusteella käytetään seuraavia nimityksiä.
- Kolmio on **tasasivuinen**, jos kaikki sivut ovat yhtä pitkiä.
- Kolmio on **tasakylkinen**, jos sen kaksi sivua ovat yhtä pitkiä.
- Tasakylkisen kolmion yhtä pitkiä sivuja sanotaan **kyljiksi** ja kolmatta sivua **kannaksi** riippumatta kolmion asennosta.
- Kolmio on **teräväkulmainen**, jos sen kaikki kulmat ovat teräviä.
- Kolmio on **suorakulmainen**, jos kolmiossa on suora kulma.
- Kolmio on **tylppäkulmainen**, jos kolmiossa on tylppä kulma.

Kolmion osien välillä on seuraavat riippuvuudet:

Lause. Kolmion kulmien summa on $180°$.



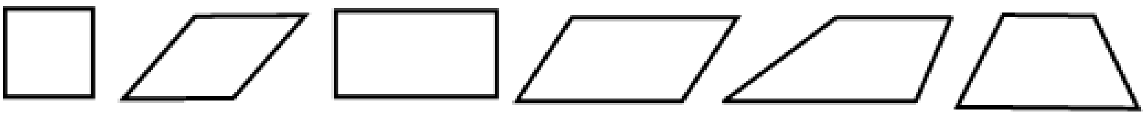
Kolmioepäyhtälö. Kolmiossa kahden sivun pituuksien summa on suurempi kuin kolmas sivu.

Kolmiossa kahden sivun pituuksien erotus on pienempi kuin kolmas sivu.

Kolmiossa pisimmän sivun vastainen kulma on suurin ja lyhimmän sivun vastainen kulma on pienin.

1.5 Nelikulmio

Seuraavassa luettelemme kuvien järjestyksessä nelikulmioiden tärkeimmät erikoistapaukset nimineen ja perusominaisuuksineen.
- **Neliö**: kaikki sivut ovat yhtä pitkiä ja kaikki kulmat suoria kulmia.
- **Neljäkäs, vinoneliö** ("salmiakki"): kaikki sivut ovat yhtä pitkiä.
- **Suorakulmio**: kaikki kulmat ovat suoria kulmia.
- **Suunnikas**: vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkiä ja yhdensuuntaisia.
- **Puolisuunnikas**: (ainakin) yksi pari vastakkaisia sivuja yhdensuuntaisia.
- **Tasakylkinen puolisuunnikas**: lisäksi toinen sivupari yhtä pitkiä.

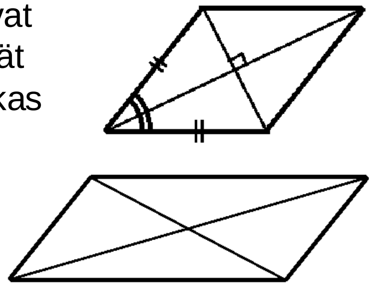


Kaikki neliöt ovat myös sekä neljäkkäitä että suorakulmioita.
Kaikki neljäkkäät ja suorakulmiot ovat puolestaan suunnikkaita.
Kaikki suunnikkaat ovat myös puolisuunnikkaita.
Kaikki tasakylkiset puolisuunnikkaat ovat puolisuunnikkaita.

Nelikulmio on suunnikas, jos yksikin seuraavista ehdoista toteutuu:

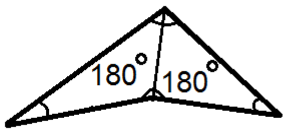
(i) Vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkät.
(ii) Vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset.
(iii) Yksi pari vastakkaisia sivuja on yhtä pitkiä ja yhdensuuntaisia.
(iv) Vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuret.

Kannattaa huomata, että neljäkkään lävistäjät puolittavat neljäkkään kulmat, kun taas suunnikkaan lävistäjät eivät yleensä puolita suunnikkaan kulmia (paitsi, jos suunnikas on erityisesti neljäkäs).



Lisäksi neljäkkään lävistäjät ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, mutta suunnikkaan lävistäjät leikkaavat toisiaan yleensä vinosti.

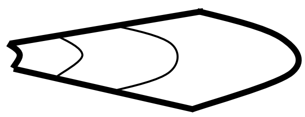
Jokaisessa nelikulmiossa kulmien summa on 360°, sillä nelikulmio voidaan jakaa kahdeksi kolmioksi, joissa kummassakin kulmien summa on 180°.



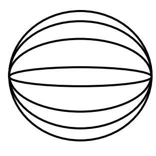
1.6 Pintoja ja kappaleita

Viiva syntyy pisteen liikkuessa avaruudessa.

Pinnan voi puolestaan ajatella syntyvän viivan liikkuessa avaruudessa joko muotonsa ja pituutensa säilyttäen tai niitä muuttaen.



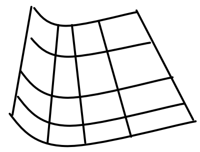
Pallon pinta esimerkiksi syntyy, kun puoliympyrän kaari pyörähtää täyden kierroksen halkaisijan ympäri.



Pallonpinta määritellään usein myös niiden pisteiden joukkona, jotka ovat vakioetäisyydellä (säteen etäisyydellä) pallon keskipisteestä.

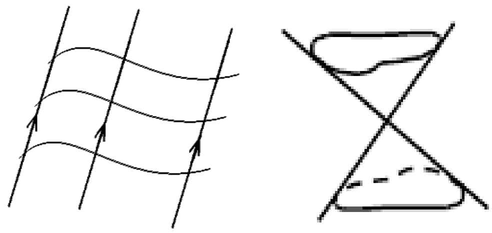
Suoran (tai pituuttaankin muuttavan janan) liikkuessa avaruudessa syntyy ns. **viivoitinpinta**.

Taso on eräs viivoitinpinta.
Muita viivoitinpintoja ovat esimerkiksi lieriö- ja kartiopinta.



Lieriöpinta syntyy, kun suora liikkuu avaruudessa suuntansa säilyttäen.

Kartiopinta syntyy, kun suora liikkuu avaruudessa siten, että sen yksi piste pysyy koko ajan paikoillaan.



Huomaa, että yleisissä lieriö- ja kartiopinnoissa liikkuneen suoran ei tarvitse palata lähtöasemaansa eikä suoran pisteiden tarvitse kiertää ympyrärataa!

Lieriö- tai kartiopintaa sanotaan **suljetuksi**, jos liikkuva suora lopuksi palaa alkuasemaansa.

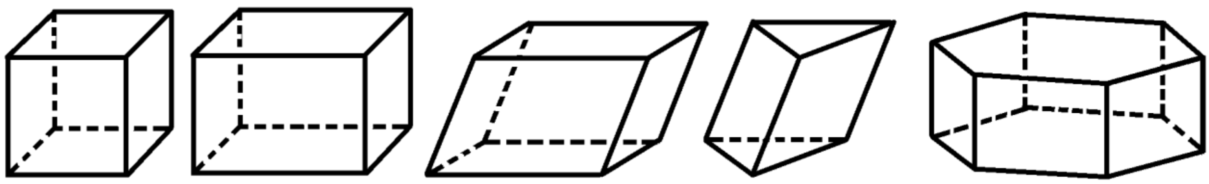
Suljetun lieriöpinnan ja kahden yhdensuuntaisen tason rajoittamaa kappaletta sanotaan lieriöksi. Jos leikkaavat tasot ovat kohtisuorassa lieriön sivuviivoja vastaan, niin lieriö on **suora**, muutoin **vino**.

Jos lieriön pohjana on esimerkiksi ympyrä, ellipsi tai monikulmio, niin kyseessä on vastaavasti ympyrälieriö, elliptinen lieriö tai särmiö eli prisma.

Särmiötä sanotaan *n*-sivuiseksi, jos särmiön pohjat ovat *n*-kulmioita, jolloin särmiössä on kahden pohjatahkon lisäksi *n* sivutahkoa. Suoran särmiön kaikki sivutahkot ovat suorakulmioita, kun taas vinon särmiön sivutahkot ovat suunnikkaita.

Tärkeimmät nelisivuiset särmiöt ovat **kuutio** (kaikki kuusi tahkoa neliöitä), **suorakulmainen särmiö** (”tiiliskivi”, kaikki kuusi tahkoa ovat suorakulmioita) ja **suuntaissärmiö** (kaikkia kuusi tahkoa suunnikkaita).

Alla olevassa kuvassa on kuutio, suorakulmainen särmiö, suuntaissärmiö, vino (kolmisivuinen) särmiö ja suora (kuusisivuinen) särmiö, jota voidaan tarkemminkin sanoa myös säännölliseksi kuusisivuiseksi särmiöksi, koska sen pohjat ovat säännöllisiä kuusikulmioita.



Huomaa, että kaikki yllä näkyvät kappaleet ovat lieriöitä(!), vaikka niillä on myös kappaletta tarkemmin kuvaavat edellä mainitut nimityksensä.

Suljetun kartiopinnan, sitä leikkaavan tason ja kartiopinnan huippupisteen rajoittamaa kappaletta sanotaan kartioksi.

Mikäli kartion pohja on ympyrä tai monikulmio, niin kyseessä on vastaavasti ympyräkartio tai pyramidi (joka siis on kartio sekin!)

Suorassa ympyräkartiossa huipun ja pohjan keskipisteen yhdysjana on kohtisuorassa pohjatasoa vastaan.

***n*-sivuisen pyramidin** pohja on *n*-kulmio ja sivutahkoina on *n* kolmiota. **Säännöllisen *n*-sivuisen pyramidin** pohja on säännöllinen *n*-kulmio ja kaikki sivutahkot ovat yhteneviä tasasivuisia kolmioita, jolloin myös huipun ja pohjan keskipisteen yhdysjana on kohtisuorassa pohjatasoa vastaan.

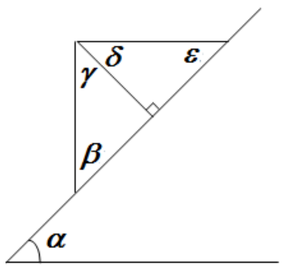
Kolmisivuisen pyramidin (eli **tetraedrin eli nelitahokkaan**) kaikki tahkot ovat kolmiota. Jos kaikki neljä tahkoa ovat yhteneviä tasasivuisia kolmioita, niin kyseessä on **säännöllinen tetraedri**.

Katkaistu kartio saadaan leikkaamalla kartion huipusta pala pois pohjan suuntaisella tasolla.

Tehtäviä

1.1 Määritä kulman **v)** $\alpha = 35°$ **a)** $\beta = 75°$ i) komplementtikulma ii) suplementtikulma iii) eksplementtikulma iv) vieruskulma v) ristikulma.

1.2 Oletetaan, että kuvan pysty- ja vaakasuorilta janoilta vaikuttavat janat ovat todella sellaisia. Vinon tason kaltevuuskulma olkoon **v)** $\alpha = 43°$ **a)** $\alpha = 46°$.
Määritä muut nimetyt kulmat kahdella eri tavalla:
i) sopivan apupiirroksen avulla
ii) käyttäen kohdassa 1.3 esitettyjä lauseita.



1.3 Kolmiosta tunnetaan kulmat **v)** $\alpha = 30°$ ja $\beta = 40°$
a) $\alpha = 20°$ ja $\beta = 60°$. Määritä ne kulmat, jotka muodostuvat
i) α-kulman puolittajan ja vastakkaisen *a*-sivun leikkauspisteeseen,
ii) α- ja β- kulmien puolittajien leikkauspisteeseen.

1.4 Montako tahkoa/särmää on/voi olla **a)** suorakulmaisessa särmiössä **b)** suorassa särmiössä **c)** tetraedrissa **d)** pyramidissa

1.5 Piirrä **a)** jokin kartio, joka ei ole pyramidi eikä ympyräkartio
b) jokin suora särmiö, joka ei ole suorakulmainen särmiö

1.6 Piirrä sellaiset kulmat, jotka eivät ole yhtä suuria, vaikka niiden samannimiset kyljet ovat **a)** yhdensuuntaiset **b)** kohtisuorassa toisiaan vastaan.

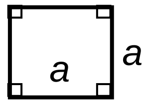
1.6 Esitä laskukaava *n*-kulmion kulmien summalle.

1.7 Kolmion kaksi kulmaa ovat α ja β. Laske kolmannen kulman vieruskulma.

2. PINTA-ALOJA

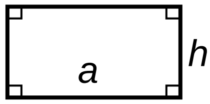
Neliö

$$\boxed{A = a^2}$$



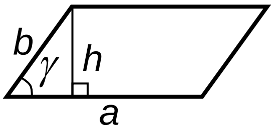
Suorakulmio

$$\boxed{A = ah}$$



Suunnikas

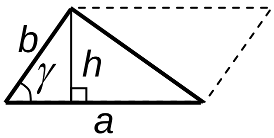
$$A = ah$$
$$A = ab\sin\gamma$$



Kolmio

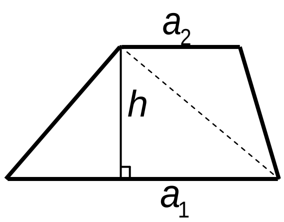
$$A_{\text{kolmio}} = \frac{1}{2}\cdot A_{\text{suunnikas}}$$
$$A = \frac{1}{2}ah$$
$$A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$$
$$A \overset{\text{Heronin kaava}}{=} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

missä $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ on puolipiiri



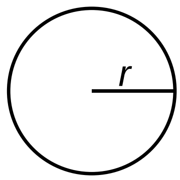
Puoli-suunnikas

$$A = \frac{a_1 + a_2}{2}\cdot h$$



Ympyrä

$$A = \pi r^2$$
$$A = \frac{\pi d^2}{4}$$

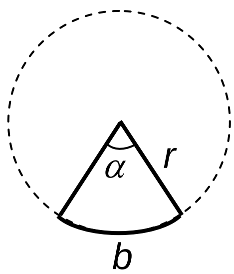


Ympyrän sektori

$A = \dfrac{\alpha}{360°}\cdot \pi r^2$ (α asteina)

$A = \dfrac{\alpha r^2}{2}$ (α radiaaneina)

$A = \dfrac{1}{2}br$ (Vertaa $A_{kolmio} = \dfrac{1}{2}ah$)

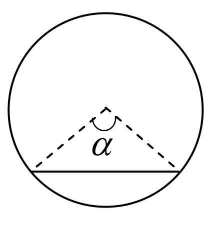


Ympyrän segmentti

$A = A_{\text{sektori}} \mp A_{\text{keskuskolmio}}$

$-$ jos $\alpha < 180°$

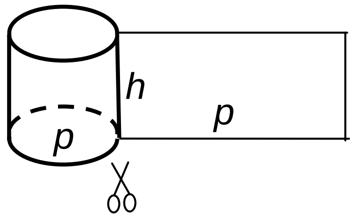
$+$ jos $\alpha > 180°$



Lieriön ja kartion vaippaan ei lueta pohjan alaa:

Suora lieriö

$A_{\text{vaippa}} = p \cdot h$,
missä $p =$ pohjan piiri

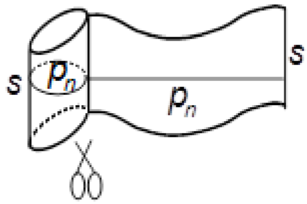


Suora ympyrälieriö

$A_{\text{vaippa}} = 2\pi r \cdot h$

Vino lieriö

$A_{\text{vaippa}} = p_n \cdot s$, missä
$p_n =$ normaalileikkauksen piiri
(normaalileikkaus $\perp$ sivuviiva)
$s =$ sivuviivan pituus

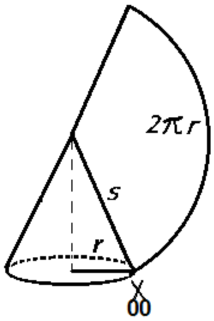


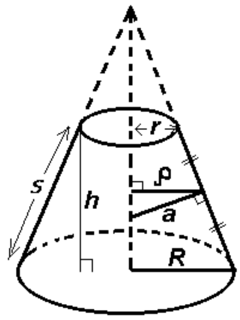
Suora ympyräkartio

$A_{\text{vaippa}} = \pi rs$

Katkaistu suora ympyräkartio

$A_{\text{vaippa}} = \pi(r + R)s$
$A_{\text{vaippa}} = 2\pi\rho s$
$A_{\text{vaippa}} = 2\pi ah$





Pallo

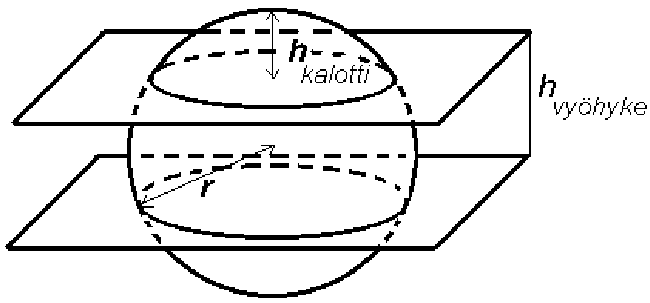
$A = 4\pi r^2$

Kalotti

$A = 2\pi rh$

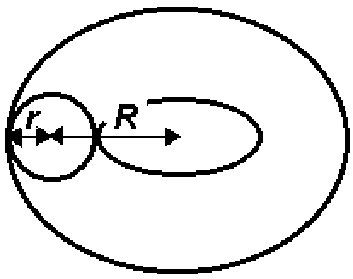
Vyöhyke

$A = 2\pi rh$



Torus

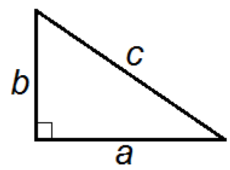
$A = 4\pi^2 Rr = 2\pi R \cdot 2\pi r$



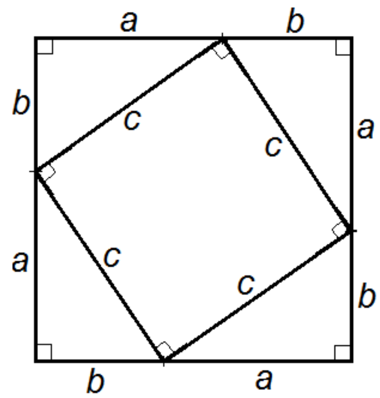
Torus syntyy, kun r-säteinen ympyrälevy pyörähtää ympyrälevyn tasossa etäisyydellä R ympyrän keskipisteestä olevan akselin ympäri.

Toruksen ala saadaan ajattelemalla syntynyt ”makkaralenkki” pötköksi oikaistuna. Oikaistun lieriön ”keskimääräinen” pituus on $2\pi R$ ja poikkileikkausympyrän piiri $2\pi r$. Näiden tulona saadaan toruksen pinta-ala.
Tämän leikinomaisen tulkinnan taustalla on differentiaali- ja integraalilaskennan avulla todistettavat pyörähdyskappaleen pinta-alaa ja tilavuutta koskevat Guldinin säännöt.

Esimerkki. Todistamme tässä esimerkissä yleisesti tunnetun Pythagoraan lauseen, jonka mukaan suorakulmaisessa kolmiossa kateettien neliöiden summa on yhtä suuri kuin hypotenuusan neliö ts.



$$\boxed{a^2+b^2=c^2}$$



Tarkastellaan kuvan mukaista neliötä, jonka sivun pituus on $a+b$. Jos neliön jokaisesta nurkasta leikataan pois tarkasteltavan kolmion muotoinen alue, niin jäljelle jäävän neliön pinta-ala saadaan sekä sivun pituuden neliönä että vähentämällä koko neliön alasta neljän kolmion ala. Näin ollen

$$c^2=(a+b)^2-4\cdot\frac{1}{2}ab=a^2+2ab+b^2-2ab=a^2+b^2,$$

mikä pitikin todistaa.

Pythagoraan lause on voimassa myös kääntäen:
Jos kolmiossa kahden sivun neliöiden summa on yhtä suuri kuin kolmannen sivun neliö, niin kolmio on suorakulmainen.

Monisteen kansikuvassa Pythagoraan lause on todistettu toisin. Siinä neljästä samanlaisestä suorakumaisesta kolmiosta ja yhdestä pikkuneliöstä, jonka sivu on kolmion kateettien erotus, on konstruoitu kaksi kuviota

- neliö, jonka sivu on kolmion hypotenuusan pituinen
- L-kirjainen muotoinen monikulmio, joka voidaan jakaa kahdeksi neliöksi, joiden sivut ovat kolmion kateettien pituiset.

Koska kuviot on koottu samoista osista, niin kuvioiden alat ovat yhtäsuuret, mikä osoittaa Pythagoraan lauseen oikeksi.

Esimerkki. Jos kolmion sivut ovat $a=3, b=4$ ja $c=5$, niin kolmion puolipiiri $p=\dfrac{a+b+c}{2}=6$. Heronin kaavan mukaan kolmion ala

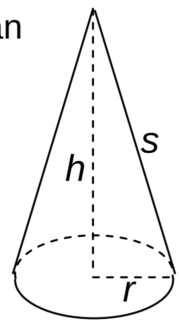
$$A=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{6(6-3)(6-4)(6-5)}=\sqrt{6\cdot3\cdot2\cdot1}=6.$$

Koska tarkasteltavassa kolmiossa $a^2+b^2=c^2$, niin kyseessä on suorakulmainen kolmio, jonka kateetit ovat 3 ja 4 ja ala saadaan nyt helpomminkin:

$$A=\frac{1}{2}\cdot3\cdot4=6.$$

Heronin kaava on sikäli merkittävä kaava, että jokainen monikulmio voidaan lävistäjiensä avulla jakaa kolmioiksi ja monasti ainakin maallikon on helpompi mitata tarkasti kolmion sivujen pituuksia kuin kolmion kulmien suuruuksia.

Esimerkki. Jos puoliympyrästä (säde $= s = 6.0$ m) taitetaan suoran ympyräkartion vaippa, niin pohjaympyrän säde r toteuttaa ehdon



Pohjaympyrän piiri $=$ puoliympyrän kaaren pituus

$$\Leftrightarrow 2\pi r = \frac{1}{2}\cdot 2\pi s \;\Leftrightarrow\; r = \frac{s}{2} = 3 \text{ m}$$

Kartion korkeus saadaan suorakulmaisesta kolmiosta

$$h = \sqrt{s^2 - r^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} \text{ m} = \underline{\underline{5.2 \text{ m}}}$$

Tehtäviä

2.1 Laske kolmion ala, kun sivut ovat **v)** 4.00 , 5.00 ja 6.00 m **a)** 6.00 , 7.00 ja 8.00 m.

2.2 Määritä kolmion sivu c, kun $a = 5.00$, $b = 6.00$ ja **v)** $A = 10.0$ **a)** $A = 12.0$

2.3 Piirrä kolme sellaista puolisuunnikasta, joiden yhdensuuntaiset sivut ovat 3.0 ja 5.0 cm ja ala 12 cm^2.

2.4 Määritä sen ympyrän piiri, jonka ala on **v)** 123 mm^2 **a)** 432 m^2 .

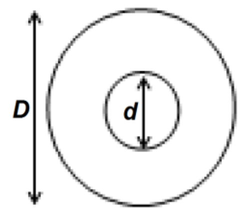
2.5 Määritä suoran ympyräkartion vaipan ala, kun pohjan säde on 1234 mm ja kartion korkeus **v)** 1111 mm **a)** 2222 mm.

2.6 Määritä **v)** kuun pinta-ala, kun kuun ympärysmitta on 10900 km **a)** maapallon pinta-ala, kun maan ympärysmitta on 40000 km.

2.7 Tarkastellaan palloa, jonka säde on 1.00 m . Määritä sen ”päiväntasaajalta” alkavan vyöhykkeen korkeus, jonka ala on **v)** 1.00 m^2 **a)** 2.00 m^2. Mikä on sen kalotin korkeus, jolla on sama ala?

2.8 Määritä sen toruksen pinta-ala, joka syntyy, kun ympyrälevy ($r = 12.5$ mm) pyörähtää levyn tasossa olevan akselin ympäri. Akselin etäisyys ympyrälevyn keskipisteestä on **v)** 123 mm **a)** 246 mm.

2.9 Määritä toruksen ulkohalkaisija D, kun sisähalkaisija $d = 1.00$ m ja toruksen ala on **v)** 1.00 m^2 **a)** 2.00 m^2

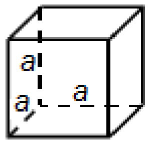


2.10 Montako % pallon alasta on kuution ulkopuolella, jos pallolla ja kuutiolla on yhteinen keskipiste ja
v) pallon säde $= 0.6 \times$ kuution särmä
a) pallon pinta kulkee kuution jokaisen särmän keskipisteen kautta.

3. TILAVUUKSIA

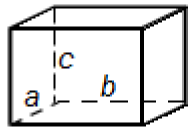
Kuutio

$$\boxed{V = a^3}$$



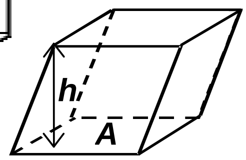
Suorakulmainen särmiö

$$\boxed{V = abc}$$



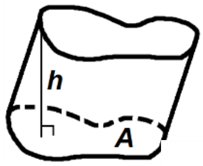
Suuntaissärmiö

$$\boxed{V = Ah}$$



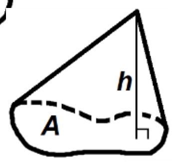
Lieriö

$$\boxed{V = Ah}$$



Kartio

$$\boxed{V = \frac{1}{3}Ah}$$

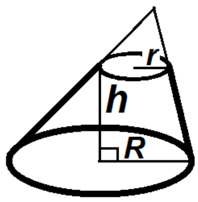


Katkaistu kartio

$$\boxed{V = \frac{A + \sqrt{AB} + B}{3} \cdot h}$$

Katkaistu ympyräkartio

$$\boxed{V = \frac{\pi(R^2 + Rr + r^2)}{3} \cdot h}$$



Pallo

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi r^3}$$

Pallonsegmentti

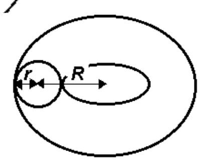
$$\boxed{V = \pi h^2 (r - \frac{h}{3})}$$

Pallonsektori

$$\boxed{V = \frac{2}{3}\pi r^2 h}$$

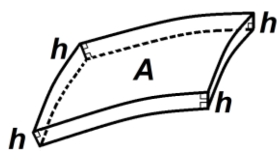
Torus

$$\boxed{V = 2\pi^2 Rr^2 = 2\pi R \cdot \pi r^2}$$



Ohut tasapaksu kalvo

$V \approx Ah$
$A =$ kalvon ala
$h =$ kalvon paksuus mitattuna kohtisuoraan kalvon pintoja vastaan



Esimerkki. Määritä pallon tilavuus, jos sen pinta-ala on 1110 mm^2.

Pallon säde saadaan yhtälöstä $4\pi r^2 = A \Leftrightarrow r = \underset{(-)}{+}\sqrt{\dfrac{A}{4\pi}} \approx$ 9.3985 mm.

Niinpä pallon tilavuus on $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3 = 3477.4\,\text{mm}^3 \approx \underline{\underline{3480\,\text{mm}^3}}$

Esimerkki. Paljonko maalia kuluu pallon ($R = 1.00$ m) käsittelemiseen kerroksella, jonka vahvuus on $d = 0.10$ mm?

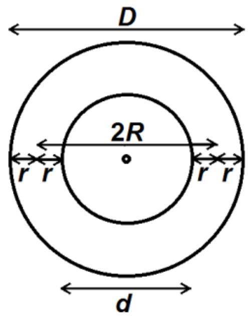
Tapa 1. Maalin määrä saadaan kahden pallon tilavuuksien erotuksena:

$$\begin{aligned} V &= \frac{4}{3}\pi(R+d)^3 - \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi(1.0001^3 - 1^3)\ \text{m}^3 \\ &= 0.00125676\ \text{m}^3 \approx \underline{\underline{1.3\ \text{litraa}}} \end{aligned}.$$

Tapa 2. Maalin määrän voi laskea ohuen kalvon tilavuutena

$V \approx Ah = 4\pi R^2 \cdot d = 4\pi \cdot 1^2 \cdot 0.0001\,\text{m}^3 = 0.00125664\ \text{m}^3 \approx \underline{\underline{1.3\ \text{litraa}}}$.

Esimerkki. Määritä toruksen tilavuus, kun sen keskellä olevan pyöreän aukon halkaisija on $d = 290$ mm ja toruksen suurin läpimitta on $D = 580$ mm.



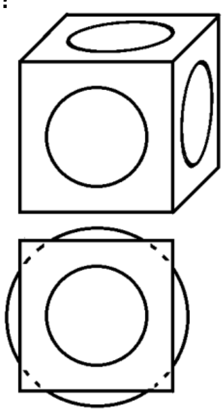
Toruksen kaavoissa esiintyvät säteet saadaan joko laskimella tai käsin yhteenlaskukeinolla yhtälöparista

$$\begin{cases} 2R + 2r = D \\ 2R - 2r = d \end{cases} \left| \begin{array}{l} \cdot 0.25 \\ \cdot 0.25 \end{array} \right| \begin{array}{l} \cdot 0.25 \\ \cdot(-0.25) \end{array}$$

$$\begin{aligned} R &= 0.25 \cdot (D + d) = 0.25 \cdot (580 + 290)\ \text{mm} = 217.5\ \text{mm} \\ r &= 0.25 \cdot (D - d) = 0.25 \cdot (580 - 290)\ \text{mm} = 72.5\ \text{mm} \end{aligned}$$

Toruksen tilavuus on $2\pi^2 Rr^2 = 2\pi^2 \cdot 217.5 \cdot 72.5^2\ \text{mm}^3 = 22566542\ \text{mm}^3 \approx \underline{\underline{23\ \text{dm}^3}}$

Esimerkki. Tarkastellaan samankeskistä palloa ja kuutiota, joilla on sama tilavuus. Montako prosenttia pallon alasta on kuution ulkopuolella?



Ylemmässä kuvassa kappale on kuvattu vinosti yläetuoikealta, alemmassa suoraan edestä.

Jos kuution särmä on *a*, niin pallon säde *r* saadaan ehdosta

$$V_{\text{pallo}} = V_{\text{kuutio}} \Leftrightarrow \frac{4}{3}\pi r^3 = a^3 \Leftrightarrow r = a \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} \approx 0.62035\ a\ .$$

Kuution jokaisen tahkon ulkopuolella on pallon kalotti alaltaan

$$A_{\text{kalotti}} = 2\pi rh \approx 2\pi(0.62035\ a)(0.62035\ a - 0.5\ a) \approx 0.4691\, a^2.$$

Kuution ulkopuolella oleva osuus pallon koko pinta-alasta on

$$\frac{6A_{kalotti}}{A_{pallo}} \cdot 100\% \approx \frac{6 \cdot 0.4691 a^2}{4\pi(0.62035 a)^2} \cdot 100\% = \underline{\underline{58.2\%}}.$$

Tehtäviä

3.1 Määritä sen pallon säde ja pinta-ala, jonka tilavuus on
v) $1.00\ \mathrm{m}^3$ **a)** $567\ \mathrm{m}^3$.

3.2 Tarkastellaan palloa, jonka säde on **v)** 1.000 m **a)** 2.000 m .
i) Määritä pallonsegmentin korkeus, jos sen tilavuus on $1.000\ \mathrm{m}^3$.
ii) Määritä sen katkaistun pallonsegmentin korkeus, jonka tilavuus on $1.000\ \mathrm{m}^3$ ja joka on leikattu pallon "paksuimmalta kohdalta". (Jos palloa leikataan kahdella yhdensuuntaisella tasolla, niin pallosta tasojen väliin jäävää kappaletta sanotaan katkaistuksi pallonsegmentiksi.)

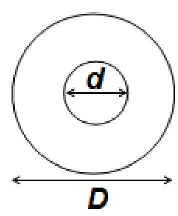
3.3 Määritä ohuesta pellistä (paksuus 1.20 mm ja tiheys $4500\ \mathrm{kg/m^3}$) tehdyn katkaistun suoran ympyräkartionmuotoisen ylhäältä avoimen astian massa. Pohjaympyrän halkaisija on 1.60 m, suuaukon halkaisija on 2.40 m ja astian korkeus **v)** 2.00 m **a)** 3.00 m.

Pelti on niin ohutta, että annetut mitat esittävät mittaustarkkuuden puitteissa yhtä hyvin astian sisä- kuin ulkomittojakin eikä tehtävässä edes sanota, kumpia oli pyritty mittaamaan. Tehtävän voi laskea eri tavoilla:
(i) ohuen kalvon tilavuutena (suositeltava tapa)
(ii) kahden katkaistun ympyräkartion tilavuuden erotuksena, jolloin kappaleiden keskinäisissä mitoissa on huomioitava pellin paksuuden vaikutus käyttäen jommassakummassa astiassa "ylitarkkoja arvoja". Tämä tapa ei kuitenkaan ole tapaa (i) oikeampi, koska suurimmat mahdolliset sisämitat voivat olla suurempia kuin pienimmät mahdolliset ulkomitat.

3.4 Määritä katkaistun kartion toisen pohjan ala, jos toisen ala on $3.20\ \mathrm{m}^2$, katkaistun kartion korkeus on 2.10 m ja tilavuus on **v)** $8.00\ \mathrm{m}^3$ **a)** $4.00\ \mathrm{m}^3$.

3.5 Määritä sen "tötterön" tilavuus, joka saadaan, kun puoliympyrän muotoinen levy, jonka säde on **v)** 123 mm **a)** 321 mm , taivutetaan suoran ympyräkartion vaipaksi.

3.6 Määritä toruksen ulkohalkaisija D, kun sisähalkaisija $d = 1.00\,\mathrm{m}$ ja toruksen tilavuuden on oltava **v)** $1.00\ \mathrm{m}^3$ **a)** $2.00\ \mathrm{m}^3$.

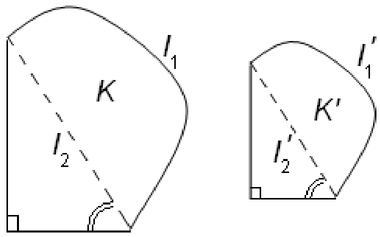


3.7 Kuinka paksusta materiaalista ontto toruksen muotoinen rengas on tehty, jos sen massa on **v)** 520 g **a)** 780 g ja edellisen kuvan mukaiset halkaisijat ovat d = 320 mm ja D = 620 mm? Materiaalin tiheys on $2200\ \mathrm{kg/m^3}$.

3.8 Tarkastellaan samankeskistä palloa ja kuutiota, joilla on sama tilavuus.
v) Montako prosenttia kuution tilavuudesta on pallon ulkopuolella, jos pallolla ja kuutiolla on yhtä suuret tilavuudet? (Vastauksista löytyy tehtävää helpottava vinkki, mutta mietipä tehtävää ensin itsenäisesti!)
a) Montako prosenttia pallon alasta on kuution ulkopuolella, jos pallolla ja kuutiolla on yhtä suuret pinta-alat?

4. YHDENMUOTOISUUDESTA

Määritelmä. Kahta kuviota (tai kahta kappaletta) sanotaan **yhdenmuotoisiksi**, jos ne eroavat korkeintaan kokonsa puolesta toisistaan, mutta niillä on sama muoto. Kuvioiden/kappaleiden K ja K' yhdenmuotoisuutta merkitään $K \sim K'$.



Lause. Yhdenmuotoisissa kuvioissa/kappaleissa K' ja K

1. Vastinkulmat ovat pareittain yhtä suuret.

2. Vastinviivojen pituuksien suhde on vakio,

toisin sanoen, jos l_1 ja l_2 ovat kuvion K kahden mielivaltaisen viivan pituudet ja l_1' ja l_2' ovat em. viivojen vastinviivojen pituudet kuviossa K', niin

$$\frac{l_1'}{l_1} = \frac{l_2'}{l_2} = \text{vakio} = k \quad .$$

Tällöin sanotaan, että kuvio K' on yhdenmuotoinen kuvion K kanssa **mittakaavassa** k.

3. Vastinpintojen alojen suhde on mittakaavan neliö ts.

$$\frac{A'}{A} = k^2,$$

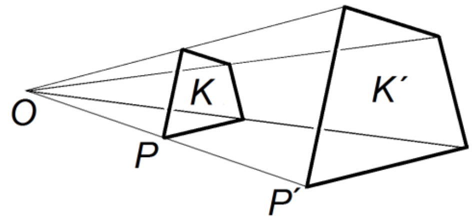
4. Vastinosien tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio ts.

$$\frac{V'}{V} = k^3.$$

Huomaa, että yhdenmuotoisten kuvioiden vastinviivoja ovat esimerkiksi monikulmioiden vastinlävistäjät, vaikka niitä ei olisikaan piirretty mukaan alkuperäisiin kuvioihin. Edellä todetut ominaisuudet 1 - 4 koskevat kaikkia niitä kulmia, aloja ja tilavuuksia, jotka saadaan tällaisten vastinviivojen avulla, vaikka vastinviivat eivät näkyisikään alkuperäisissä kuvioissa.

Esimerkki. Annettu kuvio K voidaan suurentaa tai pienentää muotonsa säilyttäen ns. **homotetiakuvauksen** avulla seuraavan sivun kuvan mukaisesti. **Homotetiakeskukseksi** O voidaan valita tason mielivaltainen piste. Tilan säästämiseksi homotetiakeskus voidaan valita alkuperäisen kuvion sisältäkin, jolloin kuvio K ja sen kuva K' tulevat sisäkkäin.

Kuvion K mielivaltaisen pisteen P kuvapiste P' löydetään puolisuoralta OP etäisyydeltä $OP' = k \cdot OP$, missä kerroin k on kuvan K' mittakaava. (Kuvassamme $k = 2$).



Huomautus. Kuvan tai kartan mittakaava on kuvassa olevan viivan pituuden suhde viivan todelliseen pituuteen.

Jos mittakaava $k>1$, niin kyseessä on suurennos. Jos $0<k<1$, niin kyseessä on pienennös.

Esimerkki. Määritä pronssista valettavan patsaan massa, jos kipsistä mittakaavaan 1:10 tehdyn pienoismallin massa on 17 kg. Kipsin tiheys on 2300 kg/m^3 ja pronssin 8200 kg/m^3 .

Koska todellisen patsaan kaikki kolme ulottuvuutta (pituus, korkeus ja leveys) ovat kymmenkertaiset pienoismalliin verrattuina, niin patsaan tilavuus on 10^3-kertainen eli tuhatkertainen. Kipsistä tehtynä patsas painaisi näin ollen $1000 \cdot 17\text{ kg} = 17000\text{ kg}$. Patsaan materiaali on kuitenkin painavampaa, joten äskeinen massa on kerrottava vielä tiheyksien suhteella:

$$m = \frac{8200}{2300} \cdot 17000\text{ kg} \approx \underline{\underline{61000\text{ kg}}}$$

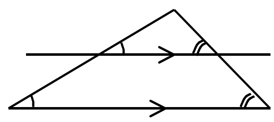
Kolmioiden yhdenmuotoisuus todetaan tavallisesti käyttäen seuraavaa lausetta, jota kutsutaan kk-lauseeksi tarkasteltavien osien (kulma ja kulma) mukaan.

kk-lause. Jos kolmion kaksi kulmaa ovat pareittain yhtä suuret kuin toisen kolmion kaksi kulmaa, niin kolmiot ovat yhdenmuotoiset.

Kulmien yhtäsuuruus puolestaan voidaan usein todeta seuraavalla lauseella.

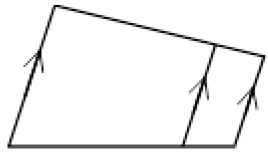
Lause. Jos suora leikkaa kahta yhdensuuntaista suoraa, niin samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuret.

Lause. Kannan suuntainen suora erottaa kolmiosta huippukolmion, joka on yhdenmuotoinen koko kolmion kanssa.

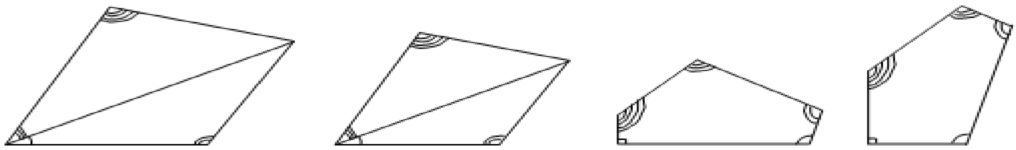


Edellinen tulos seuraa kk-lauseesta, sillä kuvaan samalla tavalla merkityt kulmat ovat pareittain yhtä suuria edellisen lauseen nojalla.

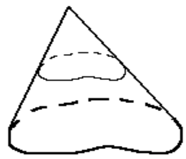
Huomautus. Neli- tai useampisivuisten monikulmioiden yhdenmuotoisuus ei seuraa kärkikulmien pareittaisista yhtäsuuruuksista, kuten viereisestä kuvasta ilmenee. Vaikka kuvan kolmessa nelikulmiossa vastinkärkien kulmat ovat yhtä suuria, niin nelikulmiot eivät ole yhdenmuotoisia.



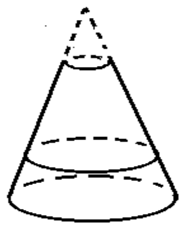
Mikäli kaksi monikulmiota halutaan todistaa yhdenmuotoisiksi, niin ne tulee jakaa alla olevien kuvien mukaisesti kolmioiksi, jotka on osoitettava pareittain yhdenmuotoisiksi. Ilmeisesti vasemmanpuoleiset nelikulmiot ovat yhdenmuotoiset. Sitä vastoin oikeanpuoleiset viisikulmiot eivät ole keskenään yhdenmuotoiset, vaikka kaikki kärkikulmat ovatkin pareittain yhtä suuria molemmissa kuvioissa.



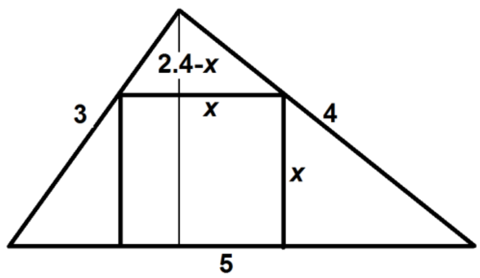
Huomautus. Mikäli kartiota leikataan pohjan suuntaisella tasolla, niin erottuva huippukartio on yhdenmuotoinen koko kartion kanssa mittakaavan ollessa $k =$ korkeuksien suhde.



Mikäli kartiota leikataan kahdella pohjan suuntaisella tasolla, niin erottuvat kaksi katkaistua kartiota eivät yleensä ole yhdenmuotoiset. Onhan selvää, että katkaistun kartion sisällä olevaa leikkaustasoa siirtämällä toinen katkaistuista kartioista mataloituu ja toinen saa lisää korkeutta, jolloin vain tarkalleen tietyssä vaiheessa katkaistut kartiot voivat olla yhdenmuotoiset.



Esimerkki. Tarkastellaan suorakulmaista kolmiota, jonka sivut ovat 3, 4 ja 5. Kolmion sisään piirretään neliö siten, että neliön kaksi kärkeä on hypotenuusalla ja kaksi muuta kärkeä kateeteilla. Määritetään neliön sivun pituus x.



Kolmion hypotenuusan vastainen korkeusjana h saadaan ratkaistua lausumalla kolmion ala kahdella eri tavalla:

$0.5 \cdot 5 \cdot h = 0.5 \cdot 3 \cdot 4 \quad \Leftrightarrow \quad h = 2.4$.

kk-lauseen mukaan huippukolmio on yhdenmuotoinen koko kolmion kanssa. Niinpä kolmioiden kantojen suhde on yhtä suuri kuin korkeuksien suhde eli

$$\frac{x}{5} = \frac{2.4 - x}{2.4} \quad \Leftrightarrow \quad 2.4x = 12 - 5x \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{12}{7.4} \approx \underline{\underline{1.62}}$$

Tehtäviä

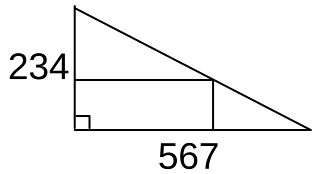
4.1 Määritä maapalstan todellinen koko, kun
v) palstan ala on 5.6 cm^2 sellaisella kartalla, jossa luonnossa 220 m pitkä tie näkyy 44 mm mittaisena.
a) palstan ala on 0.03 m^2 sellaisella kartalla, jossa luonnossa 22 m pitkä tie näkyy 110 mm mittaisena.

4.2 Hopeapallo, jonka halkaisija on 123 mm, sulatetaan ja valetaan **v)** 27 **a)** 1000 **b)** 8 **c)** 64 **d)** 4 yhtä suureksi palloksi. Määritä pikkupallojen halkaisija päässälaskuna mikäli mahdollista.

4.3 Paljonko kultaa kuluu
v) 123000 kg painavan pronssipatsaan kultaamiseen, jos samasta pronssista tehdyn ja 123 kg painavan pienoismallin kultaamiseen yhtä vahvalla kerroksella kuluu 246 g kultaa?
a) 64 kg painavan pronssipatsaan kultaamiseen, jos samasta pronssista tehdyn ja 1 kg painavan pienoismallin kultaamiseen yhtä vahvalla kerroksella kuluu 21 g kultaa?
b) 270 kg painavan pronssipatsaan kultaamiseen, jos samasta pronssista tehdyn ja 10 kg painavan pienoismallin kultaamiseen yhtä vahvalla kerroksella kuluu 32 g kultaa?

4.4 Patsaasta, jonka korkeus on 2 m, pinta-ala 10 m^2 , tilavuus 2 m^3 ja massa 16000 kg, tehdään samasta materiaalista näköispatsas mittakaavassa **v)** 1:10 **a)** 1:2 **b)** 1:5 **c)** 1:20 **d)** 2:1. Määritä näköispatsaan korkeus, pinta-ala, tilavuus ja massa.

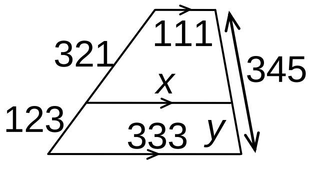
4.5 Suorakulmaisen kolmion sisään on piirretty kuvan mukainen suorakulmio, jonka kanta on **v)** kolme **a)** neljä kertaa korkeuden suuruinen. Määritä suorakulmion sivut.



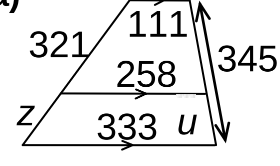
4.6 Kolmion kanta on 555 mm ja korkeus on 444 mm. Kannan suuntainen suora jakaa kolmion kahteen osaan siten, että kannan puoleisen osan pinta-ala on **v)** 8 **a)** 15 kertaa huippukolmion ala. Kuinka pitkä jana leikkaussuorasta jää kolmion sisään? Määritä kannan ja leikkaussuoran välinen kohtisuora etäisyys.

4.7 Määritä kuvien tuntemattomat osat. Kyseessä on kolme eri kuviota.

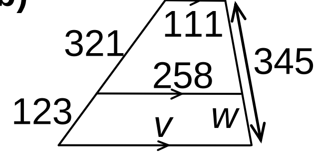
v)



a)



b)



5. KULMAN MITTAAMINEN

Kulman suuruus voidaan mitata astelevyn avulla tutkimalla, montako asteen suuruista sektoria mahtuu kulman sisään. Tavallisesti kulmayksikkönä käytetään astetta, joka saadaan jakamalla suorakulma 90 yhtä suureen osaan. Jatkossa me käytämme tarvittaessa lähinnä asteen desimaaliosia, vaikka perinteellisesti aste onkin jaettu 60 minuuttiin ja minuutti edelleen 60 sekuntiin:

$$1^\circ = 60' = 60 \cdot 60'' = 3600'' \quad .$$

Esimerkki. Muunnetaan annettu kulma desimaalimuotoon

$$12^\circ 34' 56'' = (12 + \frac{34}{60} + \frac{56}{3600})^\circ = \underline{\underline{12.5822^\circ}} \quad .$$

Esimerkki. Lausutaan annettu kulma minuuttien ja sekuntien avulla

$$\begin{aligned} 65.4321^\circ &= 65^\circ + 0.4321 \cdot 60' = 65^\circ + 25.926' \\ &= 65^\circ 25' + 0.926 \cdot 60'' = 65^\circ 25' + 55.56'' \approx \underline{\underline{65^\circ 25' 56''}} \, . \end{aligned}$$

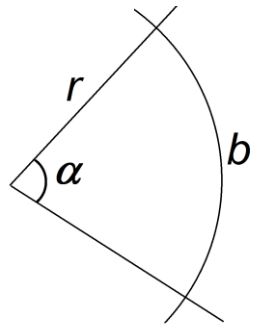
Saman saa TI-laskimen komennolla $65.4321^\circ \triangleright \text{DMS} \; \hookleftarrow \; 65^\circ 25' 56''$

Maanmittaustekniikassa kulmayksikkönä käytetään **uusastetta** eli **graadia** eli **goonia**, joka on suorankulman sadasosa.

Matematiikan teoreettisiin tarkasteluihin sekä differentiaali- ja integraalilaskentaan parhaiten soveltuva kulmayksikkö on **radiaani**. Radiaania käytettäessä kulman suuruuden mittaus palautetaan pituuden mittaamiseen seuraavasti.

Määritelmä. Kulman α suuruus radiaaneina saadaan piirtämällä kulman kärki keskipisteenä ympyrä ja mittaamalla sekä ympyrän säde *r* että ympyrästä kulman kylkien väliin jäävän kaaren pituus *b*. Määritellään

$$\boxed{\alpha = \frac{b}{r}} \; .$$



Esimerkki. A5-kokoiselle arkille tulostettuna edellä olleen kulman suuruus saadaan seuraavin mittauksin ja laskuin

$$\alpha = \frac{b}{r} \approx \frac{27\text{ mm}}{19\text{ mm}} \approx \underline{\underline{1.4}} \, .$$

Selvyyden vuoksi tulos esitetään usein myös muodoissa 1.4 rad , 1.4^r tai 1.4^c. Tunnus ^{c} on lyhenne sanoista circular unit.

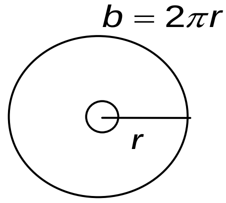
Laskimessa TI Nspire CX CAS käytetään astemoodissa radiaanin tunnuksena symbolia ^{r}. Radiaanimoodissa radiaanin tunnus on luonnollisesti tarpeeton.

Huomautus. Koska yhdenmuotoisissa kuvioissa vastinviivojen suhde on vakio, niin edellä määritelty kulman suuruus on luonnollisesti riippumaton piirretyn ympyrän säteestä. Jos näet ympyrän säde piirrettäisiin *k*-kertaisena, niin kaarenkin pituus tulisi *k*-kertaiseksi ja kulmalle α saataisiin supistamalla sama arvo kuin edellä.

Huomautus. Koska kulman määritelmän mukaisesti

$$\text{täysi kulma} = 360° = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi = 2\pi \text{ radiaania},$$

niin tätä yhtälöä sopivasti jakamalla saamme seuraavat riippuvuudet, jotka kannattaa opetella ulkoa:



$$360° = 2\pi \text{ rad} \qquad 180° = \pi \text{ rad} \qquad 90° = \frac{\pi}{2} \text{ rad} \qquad 60° = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

$$45° = \frac{\pi}{4} \text{ rad} \qquad 30° = \frac{\pi}{6} \text{ rad} \qquad 1° = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

$$1 \text{ rad} = \frac{180°}{\pi} \approx 57.3°$$

Esimerkiksi kiertoliikettä tutkittaessa tarvitaan täysikulmaa suurempiakin kulmia, sillä kierron pyörähdyksen suuruus voi olla useampiakin kierroksia. Myös kierron suunta on monesti huomioitava ja se tapahtuu käyttämällä **suunnattua kulmaa**: Toinen kiertosuunnista valitaan positiiviseksi ja toinen negatiiviseksi. Matematiikassa tavallisessa *xy*-tasossa olevaa kulmaa pidetään positiivisena, mikäli kulma syntyy vastapäivään tapahtuvassa kierrossa. Myötäpäivään tapahtuvassa kierrossa syntynyttä kulmaa pidetään negatiivisena. Kulman syntysuunta ilmoitetaan kuvassa nuolen avulla.

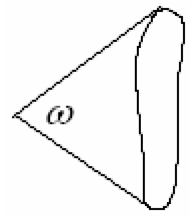
Esimerkki. Alla olevissa kuvissa kulmien suuruudet ovat

$\alpha \approx 45°$, $\beta \approx -90°$, $\gamma \approx 450°$ ja $\delta \approx -450°$.

Käytännön arkielämässä kulma ilmoitetaan aina positiivisena.

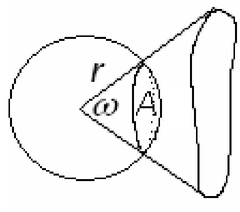
Määritelmä. Suljetun kartiopinnan rajoittamaa avaruuden osaa sanotaan **avaruuskulmaksi**.

Esimerkiksi ympyräkartion ja pyramidin huippuun liittyy tietty avaruuskulma, samoin kuution jokaiseen kärkeen. Tällaisen avaruuskulman suuruuden mittaaminen "astelevyn" tapaisella laitteella on käytännössä mahdotonta johtuen avaruuskulman "muodosta", joka voi olla millainen tahansa.



Avaruuskulman ω mittaaminen palautetaankin pallon säteen ja avaruuskulmaa vastaavan pallonpinnan alan mittaamiseen tavalla, joka vastaa tasokulman määritelmää radiaaneina ympyrän säteen ja kulmaa vastaavan kaaren pituuden avulla:

Avaruuskulman kärki keskipisteenä piirretään (tai ajatellaan piirrettäväksi) pallo, josta mitataan (tai lasketaan) säde r ja avaruuskulman sisään jäävän pallonpinnan osan pinta-ala A. Lopuksi avaruuskulman suuruudeksi määritellään



$$\boxed{\omega = \frac{A}{r^2}}\ .$$

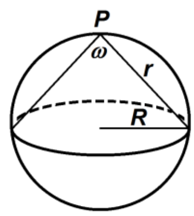
Huomautus. Täysi avaruuskulma $= \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi$, sillä täyden avaruuskulman sisään jää koko r-säteisen pallon pinta $4\pi r^2$. Selvyyden vuoksi avaruuskulman yksikköä sanotaan steradiaaniksi, vaikka se määritelmän mukaan on $\mathrm{m}^2/\mathrm{m}^2 = 1$.

Esimerkki. Kuution kärkeen liittyvä avaruuskulma on $4\pi/8 = \pi/2$ steradiaania, koska kahdeksan tällaista avaruuskulmaa sopivasti laitettuna muodostaa yhdessä täyden avaruuskulman.

Vaikka tasokulma ja avaruuskulma ovat aivan eri käsitteitä, niin kannattaa huomata, että tasossa olevan suorankulman suuruus on yhtä suuri kuin huoneen nurkassa olevan avaruuskulman suuruus: $\pi/2 = \pi/2$. Sekä tasokulman että avaruuskulman suuruudet on määritelty tiettyinä suhdelukuina ja molemmille edellä tarkastelluille ”suorille” kulmille nämä suhdeluvut ovat yhtä suuret.

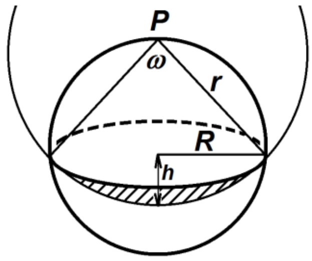
Huomautus. Edellä määritelty avaruuskulman suuruus on riippumaton käytetyn pallon säteestä.

Esimerkki. Lasketaan sen avaruuskulman suuruus, jossa päiväntasaaja ”näkyy” pohjoisnavalta.



Tavallisin virhe lienee, että joko koko eteläisen pallonpuoliskon pinta-ala tai päiväntasaajan määrittämän poikkileikkaus ympyrän pinta-ala jaetaan kuvan mukaisen säteen r neliöllä.

Avaruuskulman määritelmässä tarkasteltavan osamäärän osoittajassa on kuitenkin se ala, joka jää kulman kärki keskipisteenä piirretystä r-säteisestä pallosta avaruuskulman sisään. Tätä palloa ei edes ollut edellisessä kuvassa.



Avaruuskulman sisään jäävänä alueena onkin viereisen kuvan mukaisen kuvitellun ison pallon viivoitettu "matala" kalotti alaltaan $A = 2\pi rh$.

Koska $R = r/\sqrt{2} \approx 0.7071r$ ja $h = r - R \approx 0,2929r$, niin $A = 2\pi rh \approx 1.840r^2$. Avaruuskulmaksi saadaan $\omega = \frac{A}{r^2} = \underline{\underline{1.84 \text{ sr}}}$. Kyseinen avaruuskulma on siis vähän huoneen nurkassa olevaa avaruuskulmaa $\pi/2 \approx 1.57$ suurempi.

Tehtäviä

5.1 Piirrä ja muunna asteiksi kulmat

$\pi, \frac{\pi}{3}, -2\pi, \frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, -4\pi, 1\text{ rad}, -2^r, 1^c, -3$.

5.2 Muunna radiaaneiksi $90°, 150°, -45°, 270°, -360°, 36°, 720°, 135°, 180°$.

5.3 Esitä tulokset kolmion, nelikulmion ja n-kulmion kulmien summalle radiaaneina. Määritä kuusikulmion tuntematon kulma, jos siitä tunnetaan kulmat 1.47, 1.68 , 1.89 , 2.10 ja 2.31 radiaania.

5.4 Piirrä viivoitinta, pituusmittaa ja astelevyä käyttäen nelikulmio $ABCD$, kun $AB = BC = 4\,\text{cm}$, $\sphericalangle A = \frac{\pi}{2}$, $\sphericalangle B = \frac{2\pi}{3}$ ja $\sphericalangle C = \frac{\pi}{3}$. (Muunna kulmat ensin asteiksi.) Mittaa nelikulmion tuntemattomat sivut ja laske $\sphericalangle D$ käyttäen nelikulmion kulmien summaa.

5.5 Määritä piirtämällä, pituuksia mittaamalla ja nelilaskimella laskemalla ruutupaperille piirtämäsi kolmion $O(0,0)X(12,0)A(8,7)$ kulmien suuruudet radiaaneina. Muunna tuloksesi laskemalla asteiksi ja suorita tarkistus astelevyllä mittaamalla.

5.6 Kuinka suuressa avaruuskulmassa taivas näkyy aavan meren pinnalta?

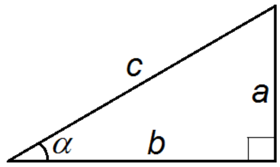
5.7 Kuinka monta prosenttia steradiaani on täydestä avaruuskulmasta?

5.8 Tarkastellaan suoraa ympyräkartiota, jonka korkeus on 2.34 m ja pohjaympyrän säde on **v)** 3.21 m **a)** 1.23 m. Määritä kartion huipussa olevan avaruuskulman suuruus.

5.9 Määritä suoran ympyräkartion symmetria-akselin ja sivuviivan välinen kulma, jos kartion kärjessä oleva avaruuskulma on **v)** 3.00 **a)** 2.00 steradiaania.

6. TRIGONOMETRISTEN FUNKTIOIDEN MÄÄRITELMÄT

Määritelmä. Terävän kulman α trigonometriset funktiot määritellään kuvanmukaisen suorakulmaisen kolmion avulla:



$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \text{vastaisen kateetin suhde hypotenuusaan}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \text{viereisen kateetin suhde hypotenuusaan}$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \text{vastaisen kateetin suhde viereiseen kateettiin}$$

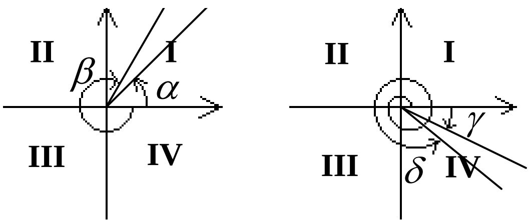
Näitä kaavoja voidaan käyttää suorakulmaisen kolmion tuntemattomien sivujen tai kulmien laskemiseen.

Mikäli kolmio ei ole suorakulmainen tai kolmion suorakulmaisuudesta ei olla varmoja, niin näitä kaavoja ei saa käyttää kolmion osien määrittämiseen!

Koska trigonometriaa halutaan käyttää myös vinokulmaisten kolmioiden ratkaisemisessa sekä pyörimis- ja aaltoliikkeen tutkimisessa, niin jatkossa laajennamme trigonometristen funktioiden määritelmän koskemaan kaikkia suunnattuja kulmia, myös negatiivisia ja sellaisia, jotka ovat suurempia kuin 90° tai jopa suurempia kuin 360°.

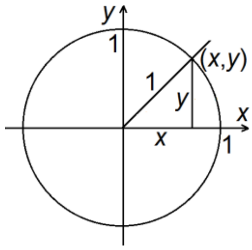
Suunnatun kulman trigonometrisiä funktioita määriteltäessä kulma asetetaan koordinaatistoon siten, että kulman kärki on origossa ja alkukylki positiivisella *x*-akselilla. Kulmaa sanotaan ensimmäisen, toisen, kolmannen tai neljännen neljänneksen kulmaksi sen mukaan, mihin neljännekseen kulman loppukylki osuu.

Esimerkki. Viereisessä kuvassa α ja β ovat 1. neljänneksen kulmia, kun taas γ ja δ ovat neljännen neljänneksen kulmia.



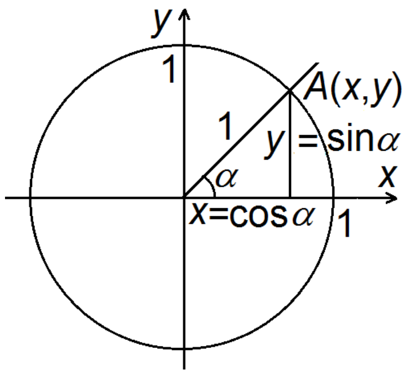
Trigonometrinen yksikköympyrä tarkoittaa origokeskistä 1-säteistä ympyräviivaa, jolla olevien pisteiden (x, y) koordinaatit toteuttavat yhtälön

$$\boxed{x^2 + y^2 = 1}$$



Määritelmä. Mielivaltaisen kulman α trigonometriset funktiot määritellään edellä kuvatulla tavalla asetetun kulman α loppukyljen ja trigonometrisen yksikköympyrän leikkauspisteen $A(x,y)$ koordinaattien avulla seuraavasti:

$$\boxed{\begin{aligned} \sin\alpha &= y \\ \cos\alpha &= x \\ \tan\alpha &= \frac{y}{x} \end{aligned}}$$



ts.

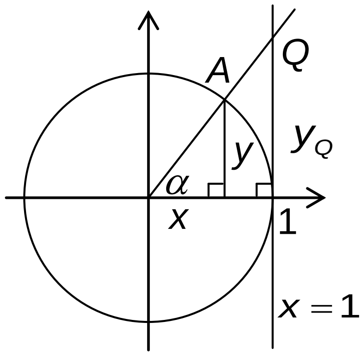
$\sin\alpha$ on yksikköympyrällä olevan leikkauspisteen pystykoordinaatti.
$\cos\alpha$ on yksikköympyrällä olevan leikkauspisteen vaakakoordinaatti.

Huomautus. Jos α on terävä kulma, niin nyt esitetty määritelmä on yhtäpitävä suorakulmaisen kolmion avulla esitetyn määritelmän kanssa. Matematiikassa pyritäänkin kaikki määritelmien laajennukset tekemään aina niin, että ne ovat sopusoinnussa aikaisempien määritelmien ja niistä johdettujen tulosten kanssa.

Huomautus. Viereisen kuvan yhdenmuotoisten kolmioiden perusteella $\tan\alpha$ saadaan myös trigonometriselle ympyrälle piirretyn pystysuoran sivuajan $x = 1$ ja kulman α loppukyljen jatkeen leikkauspisteen Q pystykoordinaattina, sillä

$$\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{y_Q}{1} = y_Q \quad .$$

Tulos on voimassa kaikissa neljänneksissä.

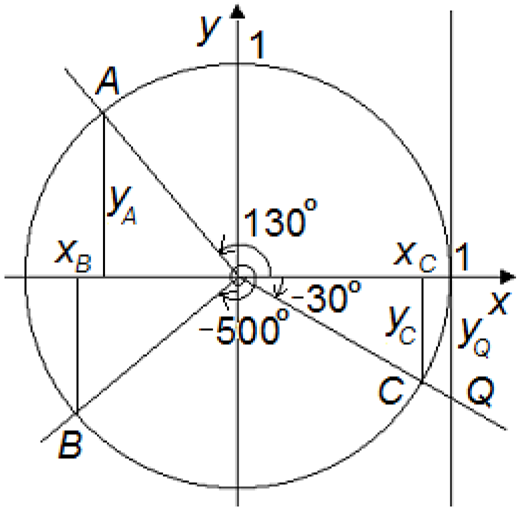


Huomautus. Joskus käytetään myös funktioita sekantti, kosekantti ja kotangentti, joiden määritelmät ovat

$$\sec\alpha = \frac{1}{x} \quad , \quad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{y} \quad , \quad \cot\alpha = \frac{x}{y}$$

Esimerkki. Määritä trigonometristen funktioiden määritelmiä käyttäen piirtämällä, mittaamalla ja nelilaskimella seuraavien lausekkeiden likiarvot
a) $\sin 130°$ b) $\cos(-500°)$ c) $\tan(-30°)$.

Ratkaisu. Valitaan yksiköksi 20 mm.



Piirretään yksikköympyrä ja asetetaan suunnatut kulmat koordinaatistoon sovitulla tavalla. Koska $-500° = -360° - 140°$, niin b-kohdan kulma on 140 astetta päälle täyden kierroksen negatiiviseen suuntaan.

Huomioimalla yksikön pituus saadaan

a) $\sin 130° = y_A \approx \frac{15 \text{ mm}}{20 \text{ mm}} \approx \underline{\underline{0.75}}$

b) $\cos(-500°) = x_B \approx \frac{-15 \text{ mm}}{20 \text{ mm}} \approx \underline{\underline{-0.75}}$

c) $\tan(-30°) = \frac{y_C}{x_C} \approx \frac{-10 \text{ mm}/20 \text{ mm}}{17 \text{mm}/20 \text{ mm}} \approx \underline{\underline{-0.59}}$

tai helpommin toisin

$\tan(-30°) = y_Q \approx \frac{-12 \text{ mm}}{20 \text{ mm}} \approx \underline{\underline{-0.60}}$

Trigonometristen funktioiden arvot saadaan tietenkin tarkemmin ja kätevämmin laskimesta.

Trigonometristen funktioiden merkit eri neljänneksissä ovat:

sini	kosini	tangentti
$\begin{array}{c\|c} + & + \\ \hline - & - \end{array}$	$\begin{array}{c\|c} - & + \\ \hline - & + \end{array}$	$\begin{array}{c\|c} - & + \\ \hline + & - \end{array}$
sini $=$ pystykoordinaatti y	kosini $=$ vaakakoordinaatti x	tangentti $= \frac{y}{x}$

Huomautus. Trigonometristen funktioiden keskeiset ominaisuudet saadaan pääteltyä ajattelemalla kulman α loppukyljen ja trigonometrisen yksikköympyrän leikkauspisteen A liikkumista yksikköympyrän kehällä kulman α kasvaessa.

1. Trigonometriset funktiot ovat jaksollisia 360 asteen eli 2π radiaanin välein, koska tällöin piste A on kiertänyt trigonometrisen ympyrän kertaalleen ja tulee uudelleen samaan kohtaan.
2. Tangenttifunktion lyhin jakso on 180° eli π radiaania, koska puolen kierroksen välein kulman α loppukylki ja sen jatke osuvat päällekkäin ja leikkaavat yksikköympyrän pystysivuajaa samassa pisteessä Q.

3. Koska pisteen A molemmat koordinaatit ovat välillä $-1 \ldots 1$, niin sini- ja kosinifunktio saavat arvoja vain kyseiseltä väliltä $-1 \ldots 1$.
4. Koska kulman α kasvaessa -90 asteesta 90 asteeseen (eli $-\pi/2$ radiaanista $\pi/2$ radiaaniin) piste A nousee korkeudelta $y=-1$ korkeudelle $y=1$, niin sinifunktio on välillä $[-90°, 90°]$ kasvava saaden kaikki mahdolliset arvonsa tarkalleen kerran.
5. Koska kulman α kasvaessa nollasta 180 asteeseen (eli nollasta π radiaaniin) piste A liikkuu vaakasuunnassa kohdasta $x=1$ kohtaan $x=-1$, niin kosinifunktio on välillä $[0, 180°]$ vähenevä saaden kaikki mahdolliset arvonsa tarkalleen kerran.
6. Koska kulman α kasvaessa -90 asteesta 90 asteeseen (eli $-\pi/2$ radiaanista $\pi/2$ radiaaniin) piste Q nousee äärettömän alhaalta äärettömän ylös, niin tangenttifunktio on välillä $]-90°, 90°[$ kasvava saaden kaikki reaaliarvot kertaalleen.

Edellä esitetyt trigonometristen funktioiden ominaisuudet näkyvät hyvin trigonometristen funktioiden kuvaajissa, jotka esitetään luvussa 9.

Tehtäviä

6.1 Määritä määritelmään perustuen piirtämällä, mittaamalla ja laskintasi nelilaskimena käyttäen kulman $-600°$ trigonometristen funktioiden arvot. Tarkista tuloksesi funktiolaskimella.

6.2 Piirrä esimerkki kulmasta, joka on **a)** negatiivinen 2. neljänneksen kulma **b)** positiivinen 3. neljänneksen kulma.

6.3 Arvioi $\sin 23°$, $\cos 2.3^r$ ja $\tan\frac{7\pi}{4}$ silmämääräisesti kuvan avulla. Tarkenna arviosi laskimella, jolla lasket lisäksi $\cot 135°$, $\sec 60°$ ja $\operatorname{cosec}\frac{\pi}{6}$.

6.4 Mieti määritelmän perusteella, miten muuttuu

v) $\sin\alpha$, kun α kasvaa 270 asteesta 450 asteeseen,

a) $\sin\alpha$, kun α kasvaa 90 asteesta 270 asteeseen,

b) $\cos\alpha$, kun α kasvaa 180 asteesta 360 asteeseen,

c) $\tan\alpha$, kun α kasvaa 90 asteesta 270 asteeseen.

6.5 Hae kuvan avulla kaikki ne kulmat, joilla on sama

v1) sini kuin kulmalla $-78°$

v2) kosini kuin kulmalla $21°$

v3) tangentti kuin kulmalla $-42°$

a) sini kuin kulmalla $21°$,

b) sama kosini kuin kulmalla $-34°$,

c) sama tangentti kuin kulmalla $56°$.

7. ARKUSFUNKTIOISTA

Trigonometristen funktioiden käänteisfunktioita kutsutaan arkusfunktioiksi. Niiden nimet voidaan tulkita seuraavasti:

arcsin x on kulma, jonka sini on x
arccos x on kulma, jonka kosini on x
arctan x on kulma, jonka tangentti on x.

Koska trigonometriset funktiot saavat mahdolliset arvonsa äärettömän monella eri kulman arvolla, niin arkusfunktioiden yhteydessä on yksikäsitteisesti määriteltävä, mitä näistä kyseisistä kulmista tarkoitetaan.

Tämä tapahtuu valitsemalla arkusfunktion arvo sellaiselta mahdollisimman mukavalta väliltä, jolla vastaava trigonometrinen funktio saa kaikki arvonsa kertaalleen.

Edellisessä pykälässä totesimme, että sini saa mahdolliset arvonsa kertaalleen suljetulla välillä $[-90°, 90°]$, joten funktion arcsin x arvo voidaan valita yksikäsitteisesti tältä väliltä. Vastaavasti arccos x :n arvo saadaan yksikäsitteisesti suljetulta väliltä $[0, 180°]$ ja arctan x :n arvo avoimelta väliltä $]-90°, 90°[$.

Näin voimmekin määritellä arkusfunktiot yksikäsitteisinä funktioina seuraavasti:

Määritelmä.

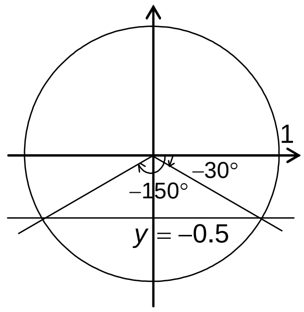
$\arcsin x$ on se välin $[-90°, 90°]$ kulma, jonka sini on x, $-1 \leq x \leq 1$
$\arccos x$ on se välin $[0°, 180°]$ kulma, jonka kosini on x, $-1 \leq x \leq 1$
$\arctan x$ on se välin $]-90°, 90°[$ kulma, jonka tangentti on x, $x \in \mathbb{R}$.

Huomautus. Arkusfunktioiden tunnuksina laskimissa on usein merkinnät $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$ ja $\tan^{-1} x$, joissa yläindeksi $^{-1}$ tarkoittaa ”kantafunktionsa” käänteisfunktiota eikä suinkaan kantaluvun negatiivista potenssia.
Edellä olleet merkinnät luetaan esimerkiksi ”arkussini *x*” tai ”käänteissini *x*”.
Laskimen moodiasetus määrää sen tulostaako laskin arkusfunktion arvon asteina vai radiaaneina.

Joissakin ohjelmointikielissä ja taulukkolaskentaohjelmassa Excel arkusfunktioiden lyhenteet ovat asin, acos ja atan.

Esimerkki. Määritä asteina kaikki ne kulmat α, jotka toteuttavat ehdon $\sin\alpha = -0.5$. Tehtävä ratkaistaan seuraavassa ilman laskimen solve-komentoa eli laskinta käytetään vain perinteellisenä funktiolaskimena!

Eräs etsitty kulma on $\alpha_0 = \arcsin(-0.5) = -30°$ löydetään esimerkiksi TI-laskimella näppäilemällä $\sin^{-1}(-0.5)$ astemoodissa.



Muut kulmat on pääteltävä hakemalla ne kulmat, joiden yksikköympyrällä oleva leikkauspiste on korkeudella -0.5. Sitä varten piirrämme korkeudelle $y = -0.5$ suoran, joka leikkaa yksikköympyrää kahdessakin pisteessä. Oikeanpuoleisen leikkauspisteen kautta kulkee esimerkiksi kulman $-30°$ loppukylki sekä tästä kulmasta täysiä kierroksia lisäämällä saatavien kulmien loppukyljet. Toinen kulmaryhmä löydetään symmetrisesti *y*-akselin vasemmalta puolelta.

Vastaukseksi saadaan siis kaksi kulmaryhmää, kummankin jaksona 360°:

$$\text{Vastaus: } \underline{\underline{\begin{cases} \alpha_1 = -30° + n \cdot 360° \\ \alpha_2 = -150° + n \cdot 360° \end{cases} \text{, missä } n \in \mathbb{Z}}}$$

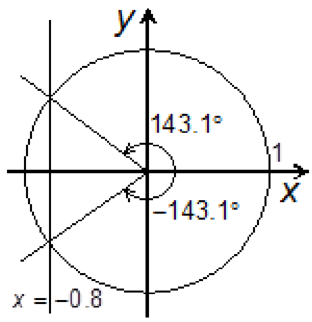
Jatkossa tässä monisteessa noudatetaan varsin yleisesti käytettyä sopimusta, minkä mukaan trigonometrisen yhtälön jaksollisessa ratkaisussa esiintyvä kirjain *n* tarkoittaa mielivaltaista kokonaislukua ilman erillistä mainintaakin.

Edellisen vastauksen voi esittää myös muodoissa

$$\begin{cases} \alpha_1 = 330° + n \cdot 360° \\ \alpha_2 = 210° + n \cdot 360° \end{cases} \text{ tai } \begin{cases} \alpha_1 = 690° + n \cdot 360° \\ \alpha_2 = 570° + n \cdot 360° \end{cases} \text{ tai } \ldots .$$

Vaikka viimeksi kirjoitettu vastaus on oikea, niin se ei ole suositeltava, sillä vakiintuneen tavan mukaan kulmaryhmä lausutaan tavallisesti joko itseisarvoltaan mahdollisimman pienen kulman avulla tai mahdollisimman pienen positiivisen kulman avulla.

Esimerkki. Määritetään asteina kaikki ne kulmat α, jotka toteuttavat ehdon $\cos\alpha = -0.8$.



Eräs tällainen kulma on $\alpha_0 = \arccos(-0.8) = 143.1°$

Muut kulmat on taas pääteltävä trigonometrisen ympyrän avulla. Jälleen saadaan kaksi kulmaryhmää, jotka voidaan kuitenkin esittää kerralla:

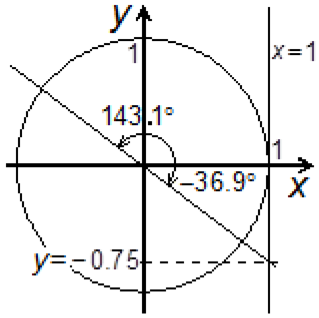
$$\text{Vastaus: } \underline{\underline{\alpha = \pm 143.1° + n \cdot 360°}} \ .$$

Vastaus voitaisiin esittää myös positiivisten peruskulmien avulla muodossa

$$\underline{\underline{\begin{cases} \alpha_1 = 143.1° + n \cdot 360° \\ \alpha_2 = 216.9° + n \cdot 360° \end{cases}}} \ .$$

Esimerkki. Määritä asteina kaikki ne kulmat α, joille $\tan\alpha = -0.75$.

Laskimella saadaan eräs sopiva kulma $\alpha_0 = \arctan(-0.75) = -36.9^\circ$.



Ajattelemalla tangenttifunktion arvon määrittämistä yksikköympyrän pystysuoralla sivuajalla olevan leikkauspisteen avulla on selvää, että kaikki mahdolliset kulmat ovat muotoa $\underline{\underline{\alpha = -36.9^\circ + n\cdot 180^\circ}}$.

Vastaus voitaisiin esittää myös positiivisen peruskulman avulla muodossa $\underline{\underline{\alpha = 143.1^\circ + n\cdot 180^\circ}}$.

Vastauksen antaminen kahden kulmaryhmän avulla $\begin{cases}\alpha_1 = -36.9^\circ + n\cdot 360^\circ\\ \alpha_2 = 143.1^\circ + n\cdot 360^\circ\end{cases}$ on myös oikein, mutta työläämpää kuin edelliset.

Huomautus. Edellä olleet yhtälöt voidaan ratkaista alkuperäisessä muodossaan myös laskimen solve-toiminnolla, jolloin vastaukseksi saadaan kulmaryhmät, jotka sopivasti aukikerrottuina vastaavat edellä olleita ratkaisuja.

Esimerkki. Laskimen TI komennolla $\text{solve}(\sin(x) = -0.5, x)$ saadaan astemoodissa

- tarkat ratkaisut $x = 30\cdot(12\cdot n1 + 7)$ or $x = 30\cdot(12\cdot n1 - 1)$, missä $n1$ edustaa mielivaltaista kokonaislukua. Suorittamalla luvulla 30 kertominen saadaan edellisellä sivulla ollut vastaus.
- likimääräiset ratkaisut $x = 360\cdot(n2 + 0.58333)$ or $x = 360\cdot(n2 - 0.08333)$. Aukikertomalla saadaan jälleen aikaisempi vastaus.

Esimerkki. Ratkaise yhtälö $\sin(3x + 15^\circ) = -0.5$.

Merkitsemällä $3x + 15^\circ = \alpha$ saadaan helpompi yhtälö $\sin\alpha = -0.5$.

Tämän ratkaisu on aikaisemman esimerkin mukaan $\begin{cases}\alpha_1 = -30^\circ + n\cdot 360^\circ\\ \alpha_2 = -150^\circ + n\cdot 360^\circ\end{cases}$.

Jos tähän sijoitetaan kulman α lauseke, niin

$$\begin{cases}3x_1 + 15^\circ = -30^\circ + n\cdot 360^\circ\\ 3x_2 + 15^\circ = -150^\circ + n\cdot 360^\circ\end{cases} \underset{\text{jotka yhdistetään}}{\overset{\text{siirretään vakiotermit}}{\Leftrightarrow}} \begin{cases}3x_1 = -30^\circ - 15^\circ + n\cdot 360^\circ\\ 3x_2 = -150^\circ - 15^\circ + n\cdot 360^\circ\end{cases}$$

$$\overset{\text{jaetaan kertoimella}}{\Leftrightarrow} \underline{\underline{\begin{cases}x_1 = -15^\circ + n\cdot 120^\circ\\ x_2 = -55^\circ + n\cdot 120^\circ\end{cases}}}$$

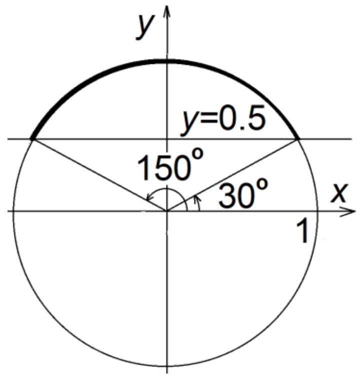
Yhtälön saa tietenkin laskimella helpommin ratkaistua. Laskinratkaisussa peruskulman -55° tilalle mahdollisesti tuleva kulma 65° antaa kuitenkin samat kulmat, koska ratkaisu on jaksollinen 120 asteen välein ja $-55^\circ + 120^\circ = 65^\circ$.

Huomautus. Laskin ei pysty aina hakemaan hankalan trigonometrisen yhtälön tarkkaa yleistä ratkaisua. Tällöin tilannetta voi tarkastella graafisesti tai likimääräisessä tilassa. Ratkaisun etsimistä voi vielä kohdentaa joko alkuarvausta tai with-operaattoria | käyttäen.

Huomautus. Trigonometrinen epäyhtälö voidaan usein ratkaista laskimen solve-komennolla tai graafisesti kuten muutkin epäyhtälöt.

Yksinkertaisen trigonometrisen epäyhtälön ratkaisemisessa voi käyttää apuna myös trigonometristä yksikköympyrää seuraavan esimerkin mukaisesti.

Esimerkki. Ratkaise $\sin(2\alpha) \geq 0.5$



Merkitään $2\alpha = \beta$. Epäyhtälön $\sin\beta \geq 0.5$ ratkaisuja ovat kaikki ne kulmat β, joiden loppukyljen ja yksikköympyrän leikkauspiste on vähintään korkeudella 0.5 .

Sopivia 1. kierroksen kulmia ovat $30° \leq \beta \leq 150°$.
Kaikki mahdolliset kulmat β ovat
$30° + n \cdot 360° \leq \beta \leq 150° + n \cdot 360°$.
Koska $\beta = 2\alpha$, niin $\underline{\underline{15° + n \cdot 180° \leq \alpha \leq 75° + n \cdot 180°}}$

Tehtäviä

7.1 Ratkaise seuraavat yhtälöt asteissa sekä laskimen solve-komentoa käyttäen että laskinta perinteellisenä funktiolaskimena käyttäen

a) $\sin\alpha = -0.34$ **b)** $\cos\beta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ **c)** $\tan\gamma = -1.5$

7.2 Ratkaise seuraavat epäyhtälöt trigonometrista yksikköympyrää käyttäen ilman laskinta. Tarkista vastauksesi laskimen solve-komentoa käyttäen

a) $\sin\alpha > \sin 30°$ **b)** $\cos\beta < \cos 20°$ **c)** $\tan\gamma > \tan 25°$

d) $\sin\delta < \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ **e)** $\cos\varepsilon > \cos\frac{\pi}{5}$ **f)** $\tan\varphi < \tan\frac{\pi}{6}$

7.3 Ratkaise seuraavat yhtälöt ja epäyhtälöt sekä laskimen solve-komentoia käyttäen että ilman laskinta.

a) $\sin(3x + \frac{\pi}{2}) = \sin\frac{\pi}{3}$ **b)** $\cos(2x - 30°) = \cos 60°$

c) $\tan(3x + \frac{\pi}{6}) = \tan\frac{\pi}{4}$ **d)** $\sin(2x + 40°) > \sin 30°$

e) $\cos(3x - \frac{\pi}{3}) \leq \cos\frac{\pi}{3}$ **f)** $\tan(4x + 30°) \geq \tan(-20°)$

7.4 Merkitse yksikköympyrälle ne pisteet, joihin liittyvän kulman α sini on
a) yhtä suuri **b)** suurempi kuin saman kulman kosini. Esitä ratkaisut myös matemaattisena lausekkeena jaksoineen. Tarkista laskimella ratkaisemalla sopiva (epä)yhtälö.

8. TRIGONOMETRISIÄ KAAVOJA

Koska $\cos\alpha$ ja $\sin\alpha$ ovat määritelmän mukaan tietyn trigonometrisellä yksikköympyrällä olevan leikkauspisteen *x*- ja *y*-koordinaatit, niin ne toteuttavat kyseisen ympyrän yhtälön $x^2+y^2=1$, joten $(\cos\alpha)^2+(\sin\alpha)^2=1$. Termien järjestystä vaihtamalla saadaan seuraava lause.

Lause. $\boxed{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1}$.

Huomautus. Edellä on vakiintuneen tavan mukaisesti käytetty luettavaan tekstiin soveltuvaa lyhennettyä merkintätapaa $(\sin\alpha)^n=\sin^n\alpha$. Tämä lyhennetty merkintätapa ei kuitenkaan yleensä sovellu laskimiin ja tietokoneohjelmiin, vaan esimerkiksi TI-89:ssä on kirjoitettava $\sin(\alpha)\,\hat{}\,n$ tai vieläkin selvemmin $(\sin(\alpha))\,\hat{}\,n$. Laskimessa TI-nspire cx CAS voi sopivaa lausekepohjaa käyttäen kirjoittaa myös $\sin(\alpha)^n$ tai vieläkin selvemmin $(\sin(\alpha))^n$.

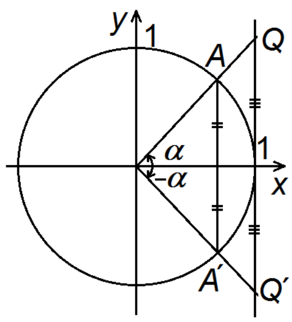
Suoraan trigonometristen funktioiden määritelmästä saadaan myös

Lause. $\boxed{\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$.

Huomautus. Myös harvinaisemmat trigonometriset funktiot voidaan lausua tutumpien avulla seuraavasti:

$$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}\quad,\quad \operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}\quad,\quad \cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\ .$$

Ajattelemalla kulmien α ja $-\alpha$ sijaintia sekä kulman trigonometristen funktioiden määritelmiä yksikköympyrällä olevan leikkauspisteen koordinaattien avulla saadaan seuraavat tulokset



$$\sin(-\alpha)=A'\text{:n } y\text{-koordinaatti}=-\big(A\text{:n } y\text{-koordinaatti}\big)=-\sin\alpha$$

$$\cos(-\alpha)=A'\text{:n } x\text{-koordinaatti}=A\text{:n } x\text{-koordinaatti}=\cos\alpha$$

$$\tan(-\alpha)=Q'\text{:n } y\text{-koordinaatti}=-\big(Q\text{:n } y\text{-koordinaatti}\big)=-\tan\alpha$$

Nämä voidaan esittää seuraavana lauseena:

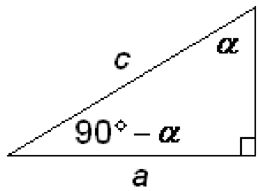
Lause.

$$\boxed{\begin{array}{lll} \sin(-\alpha) = -\sin\alpha & \text{ts.} & \text{Sini on pariton funktio.} \\ \cos(-\alpha) = \cos\alpha & \text{ts.} & \text{Kosini on parillinen funktio.} \\ \tan(-\alpha) = -\tan\alpha & \text{ts.} & \text{Tangentti on pariton funktio.} \end{array}}$$

Suorakulmaisesta kolmiosta nähdään **komplementtikulmia koskevat kaavat:**

Lause.

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha) \\ \sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha) \end{array}}$$



ts.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Kulman kosini} = \text{komplementtikulman sini} \\ \text{Kulman sini} = \text{komplementtikulman kosini} \end{array}}$$

Todistus. $\cos\alpha = \dfrac{\alpha\text{:n vier.kateetti}}{\text{hypotenuusa}} = \dfrac{b}{c} = \dfrac{(90^\circ - \alpha)\text{:n vast.kateetti}}{\text{hypotenuusa}} = \sin(90^\circ - \alpha)$

$$\sin\alpha = \frac{\alpha\text{:n vast.kateetti}}{\text{hypotenuusa}} = \frac{a}{c} = \frac{(90^\circ - \alpha)\text{:n vier.kateetti}}{\text{hypotenuusa}} = \cos(90^\circ - \alpha)$$

Lause on voimassa kaikille kulmille, vaikka edellä rajoituttiinkin teräviin kulmiin.

Huomautus. Jos komplementtikulmia koskevaan toiseen kaavaan käytetään kosinin parillisuutta (ts. $\cos(90^\circ - \alpha) = \cos(\alpha - 90^\circ)$), niin kaava saa muodon

$$\boxed{\sin\alpha = \cos(\alpha - 90^\circ)}.$$

Tämän tuloksen mukaan **sini- ja kosinifunktioilla on 90 asteen suuruinen vaihe-ero**: **sen arvon, jonka sinifunktio saa kohdassa α, kosinifunktio saa jo 90 astetta aiemmin kohdassa α - 90°.**

Seuraavaksi tarkastelemme ns. **yhteen- ja vähennyslaskukaavoja**:

Lause.

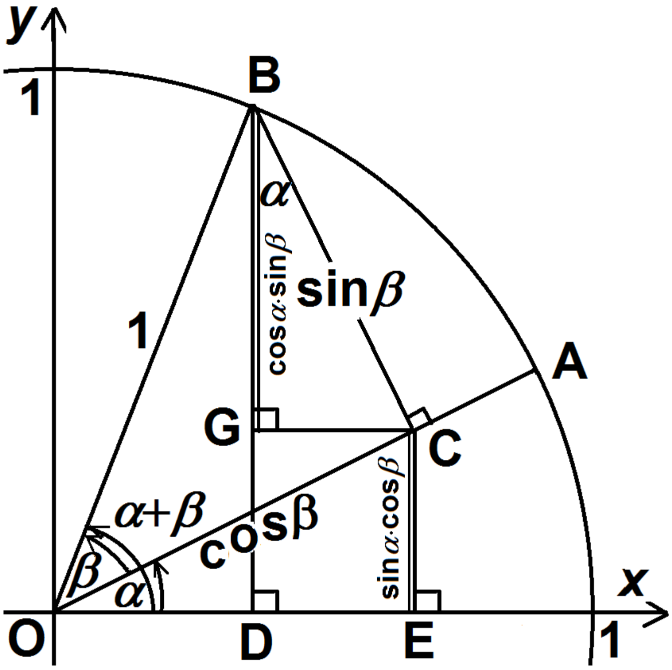
$$\boxed{\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta \\ \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta} \\ \tan(\alpha - \beta) &= \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \cdot \tan\beta} \end{aligned}}$$

Huomautus: Yo lausekkeita ei saa hajottaa auki minkäänlaista "osittelulakia" soveltaen, ts EI ole $\cancel{\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha + \sin\beta}$.

Todistus. Todistamme ensin sinin yhteenlaskukaavan siinä tapauksessa, että α, β ja $\alpha+\beta$ ovat kaikki 1. neljänneksen kulmia.

Viereiseen trigonometriseen yksikköympyrään on piirretty kulman α loppukylki *OA* sekä kulman $\alpha+\beta$ loppukylki *OB.*

Jana BC on piirretty kohtisuoraan sädettä OA vastaan. Lopuksi on piirretty pystyjanat BD ja CE sekä vaakajana CG.



Pisteeseen B syntynyt kulma $\sphericalangle DBC = \sphericalangle AOx = \alpha$, sillä näiden kahden terävän kulman samannimiset kyljet ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Sinifunktion määritelmän perusteella

$$\sin(\alpha+\beta) = \text{pisteen B pystykoordinaatti} = BD = BG + GD = BG + CE\ .$$

Koska suorakulmaisen kolmion *OBC* hypotenuusa = 1 ja kärjessä O on terävä kulma β, niin kolmion kateetit ovat $BC = \sin\beta$ ja $OC = \cos\beta$ kuten kuvaankin on merkitty.

Kolmiosta *BCG* saadaan $BG = BC\cdot\cos\alpha = \sin\beta\cdot\cos\alpha$.

Vastaavasti kolmiosta *OEC* saadaan $CE = OC\cdot\sin\alpha = \cos\beta\cdot\sin\alpha$.

Siis

$$\sin(\alpha+\beta) = BG + CE = \sin\beta\cdot\cos\alpha + \cos\beta\cdot\sin\alpha = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$

kuten väitettiinkin.

Vaikka edellä rajoituttiinkin teräviin kulmiin, niin voidaan osoittaa, että sinin yhteenlaskukaava on oikea kaikilla kulmilla α ja β.

Sinin vähennyslaskukaava saadaan yhteenlaskukaavasta muuttamalla vähennyslasku vastaluvun lisäämiseksi:

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha+(-\beta))$$ | vähennyslasku muutettiin yhteenlaskuksi

$$= \sin\alpha\cdot\cos(-\beta) + \cos\alpha\cdot\sin(-\beta)$$ | käytettiin sinin yhteenlaskukaavaa

$$= \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot(-\sin\beta)$$ | käytettiin parillisuutta/ parittomuutta

$$= \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta$$

Kosinin vähennyslaskukaava saadaan siirtymällä komplementtikulman siniin:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha-\beta) &= \sin(90^\circ-(\alpha-\beta)) && \text{komplementtikulman kaava}\\ &= \sin((90^\circ-\alpha)+\beta) && \text{termejä ryhmitelty}\\ &= \sin(90^\circ-\alpha)\cos\beta && \text{sinin yhteenlaskukaava}\\ &\quad +\cos(90^\circ-\alpha)\sin\beta && \\ &= \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta && \text{komplementtikulman kaavat}\end{aligned}$$

Kosinin yhteenlaskukaava saadaan jälleen vastaluvun vähennyslaskun avulla:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha-(-\beta)) = \cos\alpha\cdot\cos(-\beta)+\sin\alpha\cdot\sin(-\beta)\\ &= \cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot(-\sin\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta\end{aligned}$$

Tangenttifunktion kaavat saadaan sinin ja kosinin vastaavien kaavojen avulla:

$$\tan(\alpha\pm\beta) = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos(\alpha\pm\beta)} = \frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta\pm\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta\mp\sin\alpha\cdot\sin\beta} \quad \Big| \text{ supistetaan lausekkeella } \cos\alpha\cdot\cos\beta$$

$$= \frac{\dfrac{\sin\alpha\cdot\cancel{\cos\beta}}{\cos\alpha\cdot\cancel{\cos\beta}} \pm \dfrac{\cancel{\cos\alpha}\cdot\sin\beta}{\cancel{\cos\alpha}\cdot\cos\beta}}{\dfrac{\cancel{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{\cancel{\cos\alpha\cdot\cos\beta}} \mp \dfrac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}} = \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\pm\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1\mp\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}} = \frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

Huomautus. Yhteen- ja vähennyslaskukaavat yhdistetään usein seuraavasti

$$\boxed{\begin{aligned}\sin(\alpha\pm\beta) &= \sin\alpha\cdot\cos\beta\pm\cos\alpha\cdot\sin\beta\\ \cos(\alpha\pm\beta) &= \cos\alpha\cdot\cos\beta\mp\sin\alpha\cdot\sin\beta\\ \tan(\alpha\pm\beta) &= \frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\cdot\tan\beta}\end{aligned}},$$

missä kaavakirjoihin vakiintuneen tavan mukaan

ylemmät merkit vastaavat toisiaan, samoin alemmat.

Jos yhteenlaskukaavoissa merkitään $\beta=\alpha$, niin saadaan ns. **kaksinkertaisen kulman kaavat**:

Lause.

$$\boxed{\begin{aligned}\sin(2\alpha) &= 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha\\ \cos(2\alpha) &= \begin{cases}\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\\ 2\cos^2\alpha-1\\ 1-2\sin^2\alpha\end{cases}\\ \tan(2\alpha) &= \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\end{aligned}}$$

Esimerkki. Esitetään $\sin(3\alpha)$ lausekkeiden $\sin\alpha$ ja $\cos\alpha$ avulla.

$$\sin(3\alpha)=\sin(2\alpha+\alpha)=\sin(2\alpha)\cdot\cos\alpha+\cos(2\alpha)\cdot\sin\alpha$$
$$=(2\sin\alpha\cdot\cos\alpha)\cdot\cos\alpha+(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\cdot\sin\alpha$$
$$=\underline{\underline{3\cdot\cos^2\alpha\cdot\sin\alpha-\sin^3\alpha}}=3\cdot(1-\sin^2\alpha)\cdot\sin\alpha-\sin^3\alpha=\underline{\underline{3\sin\alpha-4\sin^3\alpha}}$$

Mikäli olisimme käyttäneet kaksinkertaisen kulman kosinille muita vaihtoehtoja, niin vastaukseksi olisi tullut vastaavasti

$4\cdot\cos^2\alpha\cdot\sin\alpha-\sin\alpha$ tai $2\cdot\cos^2\alpha\cdot\sin\alpha-2\cdot\sin^3\alpha+\sin\alpha$,

jotka molemmat voi muuttaa edelleen muotoon $3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$.

Esimerkki. Määritä $\sin\alpha$, kun tiedetään, että $\cos\alpha=\dfrac{5}{13}$ ja $\tan\alpha<0$.

Yhtälöstä $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ saadaan

$$\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\pm\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}=\pm\frac{12}{13}$$

Koska $\cos\alpha$ ja $\tan\alpha$ ovat esimerkin mukaan erimerkkiset, niin $\sin\alpha=\cos\alpha\cdot\tan\alpha<0$. Yhdistämällä nämä tulokset saadaan $\underline{\underline{\sin\alpha=-\dfrac{12}{13}}}$

Toisin. Eräs ehdon $\cos\alpha=\dfrac{5}{13}$ mukainen kulma on $\alpha_0=\arccos\left(\dfrac{5}{13}\right)=67.38^\circ$.

Kaikki mainitun ehdon mukaiset kulmat ovat $\alpha=\pm 67.38^\circ+n\cdot 360^\circ$.
Koska $\tan\alpha<0$, niin kulman α on oltava 2. tai 4. neljänneksen kulma, joten $\alpha=-67.38^\circ+n\cdot 360^\circ$. Tällöin $\sin\alpha=\sin(-67.38^\circ)=-0.923$.

Jälkimmäistä tapaa pidetään yleisesti ”matemaattisesti arvottomampana”, koska siinä jouduttiin turvautumaan laskimella laskettuun kulman likiarvoon edellisen tavan tarkkojen arvojen asemasta.

Esimerkki. Määritä tasakylkisen kolmion huippukulman sini, jos kantakulman sini on 0.6 .

Olkoon kantakulma α, jolloin huippukulma on $180^\circ-2\alpha$. Sen sini on

$$\sin(180^\circ-2\alpha)=\sin(180^\circ)\cdot\cos(2\alpha)-\cos(180^\circ)\cdot\sin(2\alpha)$$
$$=0\cdot\cos(2\alpha)-(-1)\cdot\sin(2\alpha)=\sin(2\alpha)=2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$=2\cdot\sin\alpha\cdot\left(\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}\right)\quad\Big|\;+\text{, sillä }\alpha\text{ terävä}$$
$$=2\cdot 0.6\cdot\sqrt{1-0.6^2}=\underline{\underline{0.96}}$$

Toisin. Kantakulma $\alpha=\arcsin 0.6=36.87^\circ$. Arvo $\alpha=180^\circ-36.87^\circ$ ei kelpaa, sillä tasakylkisen kolmion kantakulma on aina terävä. Huippukulma on siten $180^\circ-2\cdot\alpha=106.26^\circ$ ja sen sini on 0.96. Likiarvoihin turvautumien ei kuitenkaan ole (ainakaan ylioppilaskirjoituksissa) suositeltava tapa.

Esimerkki. Sievennä $\dfrac{1-\cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)}$.

Murtolauseketta sievennetään yleensä supistamalla osoittajasta ja nimittäjästä yhteinen tekijä pois. Näin ollen meidän pitäisi saada jaettua osoittaja ja nimittäjä tekijöihin. Nimittäjään voi tietenkin käyttää kaksinkertaisen kulman sinin kaavaa. Osoittajaan taas valitaan se $\cos(2\alpha)$:n kolmesta mahdollisesta esityksestä, joka kumoaa osoittajassa olevan termin 1. Siis

$$\frac{1-\cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)}=\frac{1-(1-2\sin^2\alpha)}{2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\frac{\cancel{2}\cdot\sin^{\cancel{2}}\alpha}{\cancel{2}\cdot\cancel{\sin\alpha}\cdot\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\underline{\underline{\tan\alpha}}$$

Sama tulos saadaan, kun lauseke kirjoitetaan laskimeen TI-89 ja sievennetään se sitten Enteriä painamalla.

Huomautus. Komennolla tExpand ($t \mathrel{\hat{=}}$ trigonometry) TI-Nspire CX CAS-laskin hajottaa yhteen- ja vähennyslaskukaavojen mukaiset lausekkeet

$$\sin(\alpha\pm\beta)\ \underset{\text{tCollect}}{\overset{\text{tExpand}}{\rightleftarrows}}\ \sin\alpha\cdot\cos\beta\pm\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)\ \underset{\text{tCollect}}{\overset{\text{tExpand}}{\rightleftarrows}}\ \cos\alpha\cdot\cos\beta\mp\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\tan(\alpha\pm\beta)\ \underset{\text{tCollect}}{\overset{\text{tExpand}}{\rightleftarrows}}\ \frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

vasemmalta oikealle. Vastaavasti komennolla tCollect lausekkeet kootaan oikealta vasemmalle.

Huomautus. TI-laskimen komento tExpand esittää **radiaanimoodissa** lausekkeet $\sin(n\cdot\alpha)$, $\cos(n\cdot\alpha)$ ja $\tan(n\cdot\alpha)$ lausekkeiden $\sin\alpha$ ja $\cos\alpha$ avulla . Astemoodissa komento tExpand ei kuitenkaan hajota kyseisiä lausekkeita.

Sopivat lausekkeista $\sin\alpha$ ja $\cos\alpha$ muodostuvat lausekkeet saadaan koottua muotoihin $\sin(n\cdot\alpha)$, $\cos(n\cdot\alpha)$ ja $\tan(n\cdot\alpha)$ komennolla tCollect sekä aste- että radiaanimoodissa.

Huomautus. Sopivalla moodivalinnalla voimme vaikuttaa siihen miten pitkälle laskin hajottaa muotoa $\sin(n\cdot\alpha+m\cdot\beta)$, $\cos(n\cdot\alpha+m\cdot\beta)$ ja $\tan(n\cdot\alpha+m\cdot\beta)$ olevat lausekkeet komennolla tExpand. **Astemoodissa** laskin soveltaa vain yhteen- ja vähennyslaskukaavoja, kun taas **radiaanimoodissa** laskin käyttää lisäksi useammankertaisen kulman kaavoja, joista olemme esittäneet lähinnä kaksinkertaisen kulman kaavat ja esimerkissä olemme tutkineet myös kolminkertaisen kulman kaavoja.

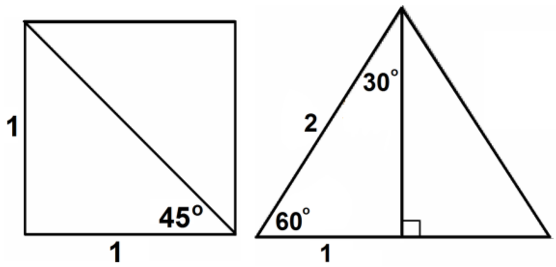
Tehtäviä

8.1 Olkoon α sellainen terävä kulma, että $\sin\alpha = 0.3$. Määritä ilman laskinta mahdollisimman monella tavalla (ja tarkista laskimella)

$$\sin(-\alpha),\ \sin(\pi-\alpha),\ \sin(2\pi+\alpha),\ \cos(\tfrac{\pi}{2}-\alpha),\ \cos(\tfrac{\pi}{2}+\alpha).$$

8.2 Esitä **v)** $\cos(3\alpha)$ **a)** $\cos(4\alpha)$ sekä käsin laskien että laskinta hyödyntäen $\cos(\alpha)$:n lausekkeena.

8.3 Päättele vieressä olevista neliöstä ja tasasivuisesta kolmiosta kulmien $30°$, $45°$ ja $60°$ trigonometristen funktioiden tarkat arvot. Tulokset kannattaa opetella ulkoa tai ainakin **kannattaa muistaa nämä apukuviot**, joista saat usein esiintyvien kulmien trigonometristen funktioiden tarkat arvot.



Määritä sitten lausekkeiden $\sin 75°$, $\cos 15°$ ja $\tan 105°$ tarkat arvot käsin laskien. Tarkista tuloksesi laskimella.

Vinkki: ”Rakenna” tarkasteltavat kulmat tunnetuista kulmista.

8.4 Osoita, että $\tan\alpha + \cot\alpha = \dfrac{2}{\sin(2\alpha)}$. Ratkaise tätä tulosta hyödyntäen kulma α ilman laskinta yhtälöstä $\tan\alpha + \cot\alpha = 4$. Tarkista laskimella.

8.5 Määritä laskinta käyttämättä $\cos\alpha$, kun tiedetään, että $\sin\alpha = 0.6$ ja $\tan\alpha < 0$. Tarkista tuloksesi määrittämällä laskimella ensin kulman (oikeammin kulmaparven) α likiarvo.

8.6 Olkoon $\cos\alpha = -0.8$ ja $\tan\alpha > 0$. Määritä kulman 2α trigonometriset funktiot käsin laskien. Tarkista tuloksesi laskimella.

8.7 Määritä tasakylkisen kolmion huippukulman kosini, jos kantakulman kosini on **v)** $5/13$ **a)** $12/13$.

8.8 Todista, että $\tan\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$. Opastus: Lausu α muodossa $2\cdot\dfrac{\alpha}{2}$ ja käytä kaksinkertaisen kulman kaavoja.

8.9 Muunna ensimmäisen asteen lausekkeeksi
v) $\sin^2(5x)$ **a)** $\cos^2(3x)$ **b)** $\sin^4(7x)$.
Opastus. Hyödynnä kaksinkertaisen kulman kosinin kaavoja.

8.10 Sievennä tässä tehtävässä annetut lausekkeet käsin laskien ja tarkista tulokset laskimella. Huomaa, että TI-laskin ei sievennä lauseketta v1) ilman sopivaa komentoa. Kyseinen kohta sievenee tExpand-komennolla radiaanimoodissa, mutta ei astemoodissa.
Kohta v2) ei sievene tExpand- eikä tCollect-komennoillakaan. Kohdasta v2) käsin laskemalla saamasi vastauksen voit kuitenkin tarkistaa sieventämällä alkuperäisen lausekkeen ja saamasi vastauksen erotuksen. Jos laskin sieventää erotuksen nollaksi, niin vastauksesi on arvoltaan oikea, mutta ei välttämättä sievin mahdollinen. Saattaa tietenkin olla, että laskin ei pysty sieventämään erotusta tarkassa tilassa. Laske sellaisessa tapauksessa laskimella erotuksen likiarvo muutamassa satunnaisessa kohdassa. Jos erotuksen likiarvo on aina hyvin pieni (esimerkiksi suuruusluokkaa 10^{-13}), niin nollasta poikkeaminen johtunee vain likiarvoilla laskemisesta ja olet muokannut lauseketta oikein, mutta taaskaan vastauksesi ei välttämättä ole sievin mahdollinen.

v1) $\dfrac{1+\cos(2\omega)}{\cos\omega}$ **v2)** $\dfrac{1-\sin\psi}{\cos^2\psi}$ **a)** $\dfrac{\sin(2\alpha)}{1+\cos(2\alpha)}$

b) $\dfrac{\sin\beta}{1-\cos^2\beta}$ **c)** $\dfrac{1-\sin^2\gamma}{\sin(2\gamma)}$ **d)** $\dfrac{\cos^2\delta}{1-\sin\delta}$

e) $\dfrac{1+\cos\varepsilon}{\sin^2\varepsilon}$ **f)** $\dfrac{\cos(2\varphi)+1}{\sin(2\varphi)}$ **g)** $\dfrac{1-\cos(2\eta)}{\sin\eta}$

h) $\dfrac{\sin(2\lambda)}{\cos(2\lambda)}$ **i)** $\sin^2(2\sigma)+\cos^2(2\sigma)$ **j)** $\cos(2\xi)+\sin^2\xi+\cos^2\xi$

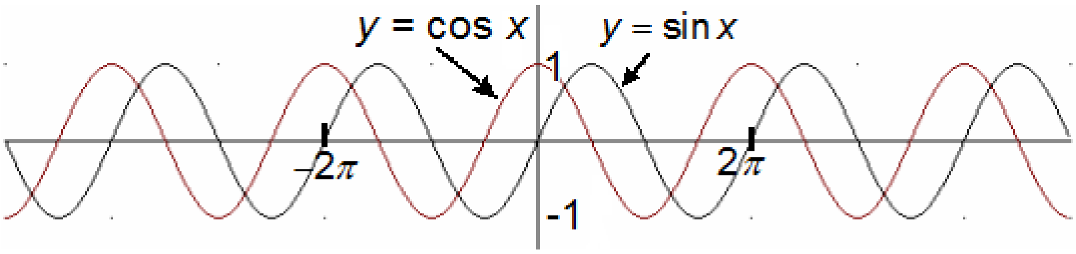
8.11 Olkoot α ja β sellaisia toisen neljänneksen kulmia, joilla $|\sin\alpha| = |\cos\beta| = \dfrac{5}{13}$. Laske $\cos(\alpha-\beta)$ laskimen trigonometrisiä näppäimiä käyttämättä. Tarkista tuloksesi määrittämällä laskimella ensin kulmien (kulmaryhmien) α ja β likiarvot.

8.12 Etsi sellaiset kulmat α ja β, että lausekkeet $\sin(\alpha+\beta)$ ja $\sin\alpha+\sin\beta$ ovat erisuuret. Tarkistus vaikka laskimella. Etsi myös useampia sellaisia kulmapareja, joilla mainitut lausekkeet ovat yhtä suuret.

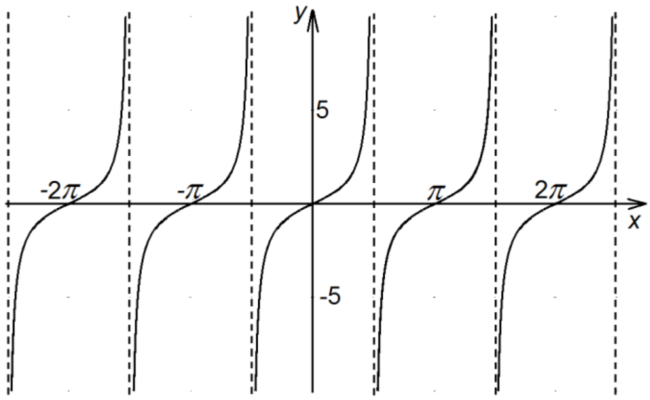
9. TRIGONOMETRISTEN FUNKTIOIDEN KUVAAJAT

Seuraavassa trigonometristen funktioiden argumenttia merkitään symbolilla x, kuten matematiikassa on yleensä tapana. Ellei toisin ilmene, niin oletamme, että x on annettu radiaaneina. Kuvaajat voidaan piirtää pisteittäin hyödyntäen edellä todettuja trigonometristen funktioiden perusominaisuuksia.

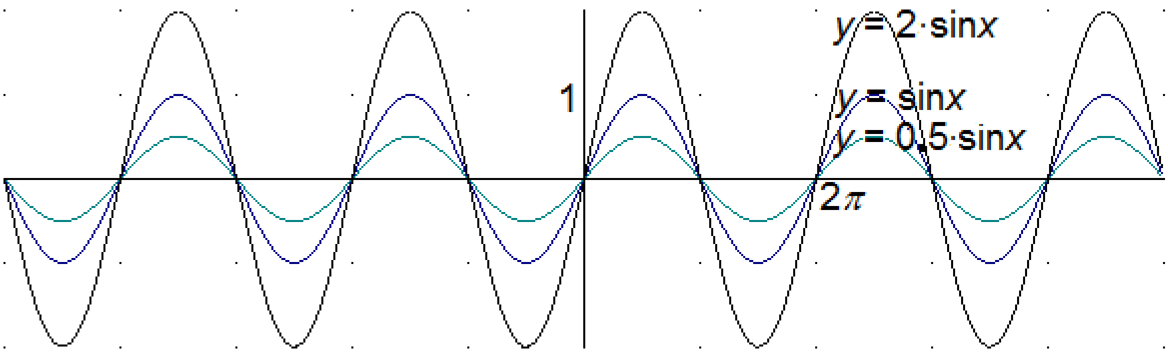
Funktioiden $y = \sin x$ ja $y = \cos x$ kuvaajat ovat seuraavanlaiset:



Tangenttifunktion $y = \tan x$ kuvaaja muodostuu viereisen kuvan mukaisesti äärettömän monesta π:n levyisestä haarasta, joista yksi nousee avoimella välillä $\left]-\pi/2\,,\ \pi/2\right[$ äärettömän alhaalta äärettömän ylös.



Olkoon $A > 0$. Funktioiden $y = A \cdot \sin x$ ja $y = A \cdot \cos x$ kuvaajat ovat joka kohdassa A kertaa niin kaukana x-akselista kuin ylimmän kuvan funktiot ts. kerroin A venyttää (tai kutistaa) kuvaajan pystysuunnassa A-kertaiseksi. Kerrointa A sanotaan tarkasteltavan sinikäyrän **laajuudeksi** eli **amplitudiksi**. Seuraavassa kuvassa on sinikäyrät $y = 2 \sin x$, $y = \sin x$ ja $y = 0.5 \sin x$.

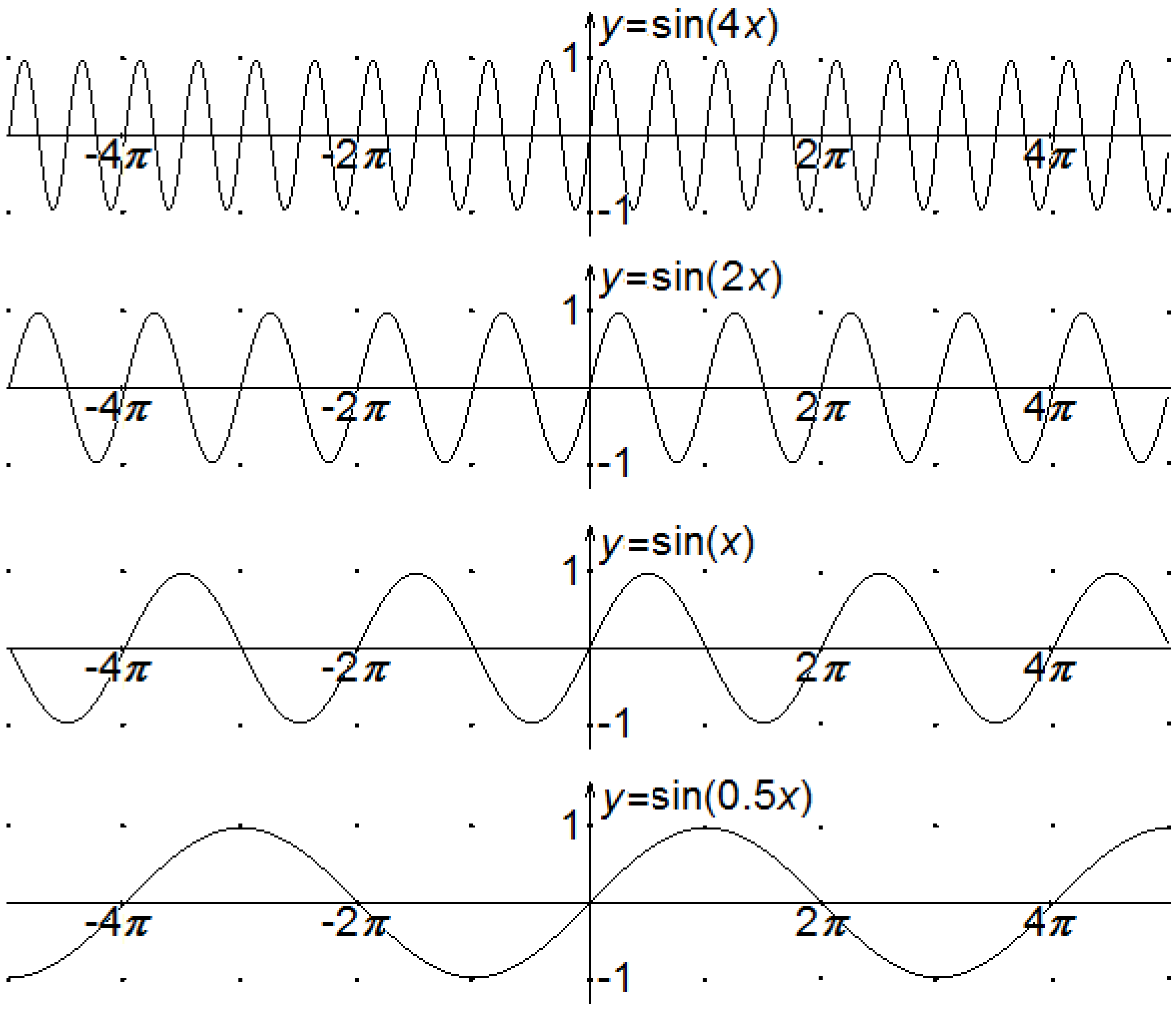


Olkoot $A, k > 0$. Käyrien $y = A \cdot \sin(kx)$ ja $y = A \cdot \cos(kx)$ amplitudi on sama A kuin edelläkin, mutta käyrien **perusjakso** eli **aallonpituus** on

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{k}},$$

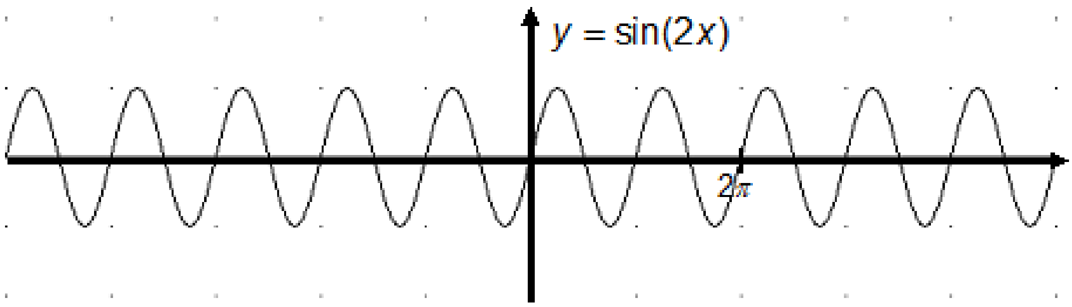
sillä jos muuttuja x kasvaa määrän $2\pi/k$, niin lauseke kx kasvaa määrän 2π, joka on tavallisen sini- ja kosiniaallon perusjakso.

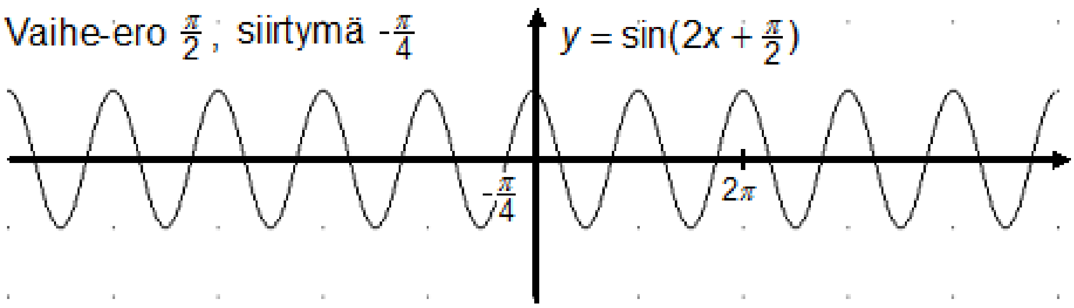
Funktion argumenttina olevan muuttujan x kertominen tekijällä k puristaa kokoon ($k > 1$) tai venyttää ($0 < k < 1$) käyrää x-akselin suunnassa seuraavista sinikäyristä ilmenevällä tavalla.

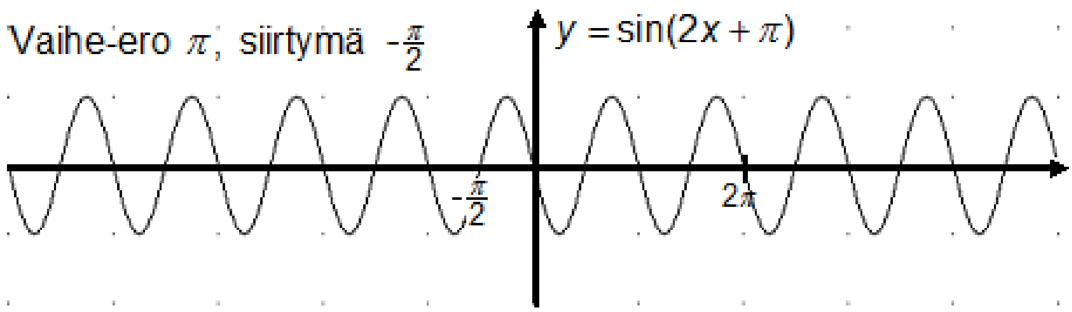


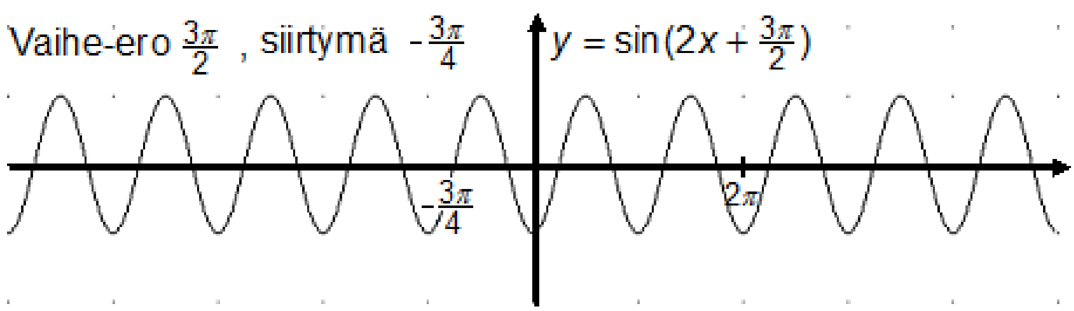
Olkoot edelleen $A, k > 0$. Käyrillä $y = A \cdot \sin(kx + \varphi)$ ja $y = A \cdot \cos(kx + \varphi)$ on edelleen sama amplitudi A ja aallonpituus $\lambda = 2\pi/k$ kuin edelläkin, mutta **vaihe-ero** φ aiheuttaa kuvaajiin x-akselin suunnassa **siirtymän** $-\dfrac{\varphi}{k}$, sillä esimerkiksi uudella sinifunktiolla $y = A \cdot \sin(kx + \varphi)$ on kohdassa $x = -\dfrac{\varphi}{k}$ samanlainen ”nouseva nollakohta” kuin alkuperäisellä sinifunktiolla $y = A \cdot \sin(kx)$ oli kohdassa $x = 0$.

Vaihe-ero φ rajoitetaan käytännössä jollekin 2π:n mittaiselle välille, tavallisesti joko välille $[0, 2\pi[$ tai $[-\pi, \pi[$. Vaihe-erotermin φ aiheuttama siirtymä riippuu muuttujan x kertoimesta k ja näkyy seuraavista kuvista.

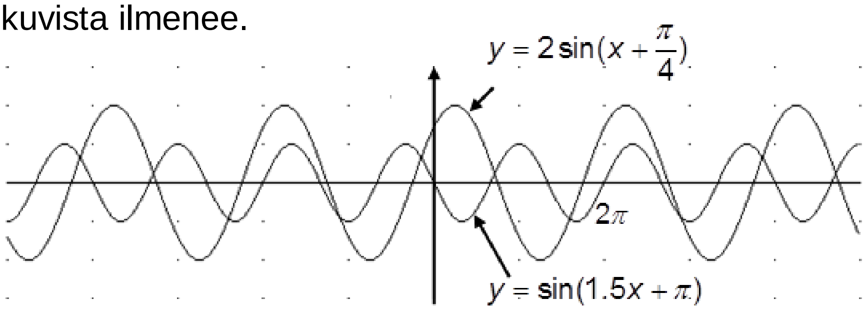


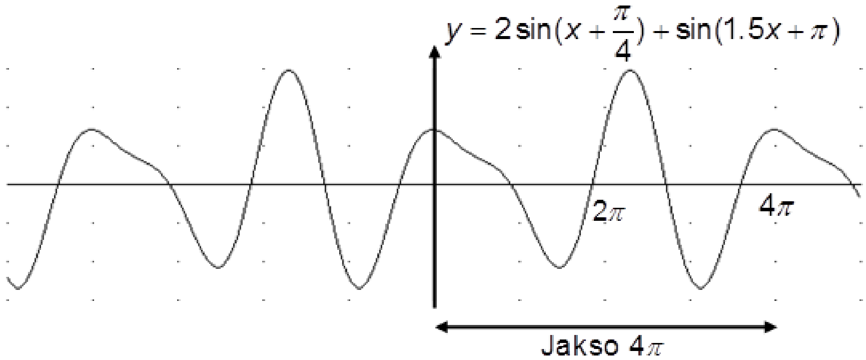






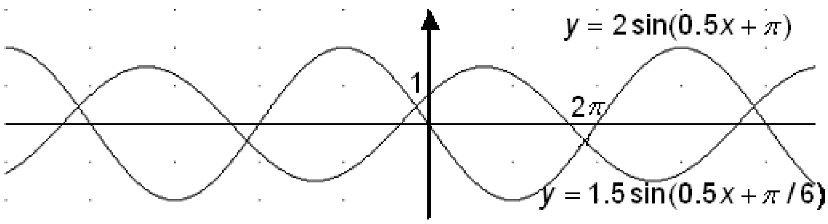
Esimerkki. Kahden sini- ja/tai kosiniaallon summa ei yleensä ole enää sinimuotoinen aalto, vaan summa on jokin mutkikkaampi "aalto", kuten seuraavista kuvista ilmenee.

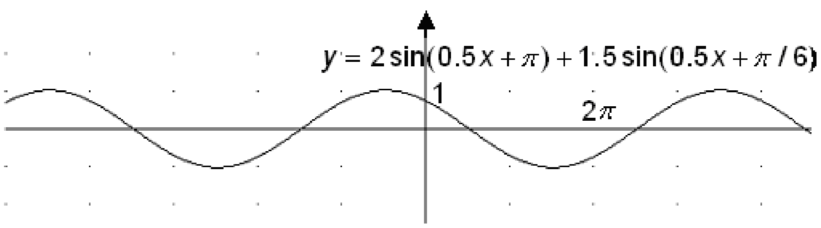




Mikäli yhteenlaskettavien aaltojen aallonpituuksilla on jokin yhteinen monikerta, johon molempien yhteenlaskettavien aaltojen aallonpituudet sisältyvät tasan, niin summa-aalto on jaksollinen ja sen jaksona on edellä mainittu aallonpituuksien yhteinen monikerta. Esimerkiksi edellisen kuvan yhteenlaskettavien aaltojen aallonpituudet 2π ja $2\pi/1.5 = 4\pi/3$ sisältyvät tasan 2 ja 3 kertaa 4π : hin, joka on kuvan mukaisesti summafunktion jaksonpituus.

Mielenkiintoinen ja käytännössä **tärkeä erikoistapaus on se, jossa yhteenlaskettavilla aalloilla on sama aallonpituus**. Tällöin alla olevien kuvien mukaan summa-aaltokin vaikuttaa edelleen sinimuotoiselta aallolta. Tämä havaintomme on yleisesti oikea, sillä esimerkeissä tulemme hakemaan summa-aallolle sinimuotoisen esityksen.





Esimerkki. Esitetään yhtenä siniaaltona

$$y = 1.2\sin(3.4x + 56°) - 4.5\cos(3.4x + 67°).$$

Molemmilla aalloilla on sama aallonpituus $360°/3.4 \approx 105.9°$, joten edellisen sivun väitteen mukaan yhdistäminen on mahdollista ja seuraavassa näemme, että se voidaan suorittaa kahdessa vaiheessa:

Vaihe 1. Hajottaminen

Esimerkin lausekkeesta saadaan sinin ja kosinin yhteenlaskukaavoilla

$$\begin{aligned} y &= 1.2\left(\underline{\sin(3.4x)}\cos(56°) + \underline{\underline{\cos(3.4x)}}\sin(56°)\right) \\ &\quad - 4.5\left(\underline{\underline{\cos(3.4x)}}\cos(67°) - \underline{\sin(3.4x)}\sin(67°)\right) \end{aligned}$$

Ryhmittele samanmuotoiset termit

$$\begin{aligned} &= \left(1.2\cos(56°) + 4.5\sin(67°)\right)\underline{\sin(3.4x)} \\ &\quad + \left(1.2\sin(56°) - 4.5\cos(67°)\right)\underline{\underline{\cos(3.4x)}} \end{aligned}$$

Laske laskimella isoissa suluissa olevat kerroinlausekkeet

$$= 4.8133\sin(3.4x) - 0.7634\cos(3.4x)$$

Vaihe 2. Kokoaminen

Etsitään sellaiset luvut A ja φ, että seuraava kysymysmerkillä varustettu yhtäsuuruus on voimassa kaikilla x:n arvoilla

$$4.8133\sin(3.4x) - 0.7634\cos(3.4x) \overset{?}{=} A \cdot \sin(3.4x + \varphi)$$

$$\overset{\text{hajotetaan}}{=} A \cdot \sin(3.4x) \cdot \cos\varphi + A \cdot \cos(3.4x) \cdot \sin\varphi$$

Yhtäsuuruus toteutuu varmasti, jos sekä lausekkeiden $\sin(3.4x)$ kertoimet ovat keskenään yhtä suuret että myös lausekkeiden $\cos(3.4x)$ kertoimet ovat keskenään yhtä suuret yhtälöketjun kummassakin päässä. Tällöin saadaan matematiikassa hyvin tavallista tyyppiä oleva yhtälöpari

$$(*) \quad \begin{cases} A \cdot \cos\varphi = 4.8133 \\ A \cdot \sin\varphi = -0.7634 \end{cases}$$

Korotetaan neliöön ja lasketaan yhteen | Jaetaan alempi yhtälö ylemmällä

$$A^2 \cdot (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = 4.8133^2 + 0.7634^2$$

$$\Leftrightarrow \quad A = \pm\sqrt{23.7506} = 4.873 \quad \left(\text{amplitudi positiivinen}\right)$$

$$\tan\varphi = \frac{-0.7634}{4.8133} = -0.1586$$

Eräs tämän yhtälön ratkaisu on $\varphi = \arctan(-0.1586) = -9.01°$

Kaikki tämän yhtälön ratkaisut ovat $\varphi = -9.01° + n \cdot 180°$

Koska yhtälöitä $(*)$ keskenään jaettaessa merkit saattavat ”mennä sekaisin” (osamäärän miinusmerkki voisi olla peräisin joko sinistä tai kosinista), niin kulma φ on valittava siten, että yhtälöparin $(*)$ alkuperäiset merkit ovat voimassa.

$$\left.\begin{aligned} &\cos\varphi > 0 \quad \therefore \quad \varphi \text{ on 1. tai 4. neljänneksen kulma} \\ &\sin\varphi < 0 \quad \therefore \quad \varphi \text{ on 3. tai 4. neljänneksen kulma} \end{aligned}\right\} \therefore$$

φ on 4. neljänneksen kulma $\quad\therefore\quad$ Voidaan valita $\varphi = -9.01°$

Vastaus: $\underline{\underline{y = 4.87\sin(3.4x - 9.01°)}}$

Kannattaa huomata, että edellisessä esimerkissä ollut yhtälöpari ($*$) on sama kuin määritettäessä suorakulmaisen koordinaatiston pisteen (4.8133, -0.7634) napakoordinaatteja. Algebran kurssissa käyttämiemme napakoordinaatti-symbolien r ja θ asemasta nyt on vain käytössä symbolit A ja φ. Niinpä laskimen napakoordinaattimuunnoksella [4.8133 , -0.7634]▹Polar saataisiin välittömästi oikeat A- ja φ-arvot ilman mitään neljännestarkasteluja.

Huomautus. Laskimella TI voi äskeisen aaltojen yhdistämisen suorittaa **astemoodissa** käyttäen samoja vaiheita kuin käsinlaskuissakin: ensin hajotetaan ja lopuksi kootaan. Laskin suorittaa puolestamme kaikki mekaaniset rutiinit.

Vaihe 1. Hajottaminen

Kirjoitetaan lauseke tExpand(1.2sin(3.4x+56)−4.5cos(3.4x+67)) ,
josta saadaan likiarvotilassa 4.8133sin(3.4x)−0.7634cos(3.4x) .

Vaihe 2. Kokoaminen

Kirjoitetaan lauseke tCollect(4.8133sin(3.4x)−0.7634cos(3.4x)),
josta saadaan likiarvotilassa 4.873sin(3.4(x−2.651)) .

Aiempi vastaus saadaan suorittamalla sulkeiden sisällä oleva kertolasku.

Huomautus: Molemmat vaiheet voidaan suorittaa yhdelläkin kertaa:

tCollect(tExpand(1.2sin(3.4x+56)−4.5cos(3.4x+67)))

Esimerkki. Yhdistetään matemaattisen harjoittelun vuoksi poikkeuksellisesti yhdeksi kosiniaalloksi ne aalloista

$$111\sin(122x+44^\circ)\ ,\ \ 322\cos(122x+144^\circ)\ \text{ ja }\ 111\sin(222x+244^\circ)\,,$$

joiden summa on (ko)sinimuotoinen aalto. Käytännössä kosiniaalloksi yhdistämistä tuskin koskaan tehdään.

Kaksi ensimmäistä aaltoa voidaan yhdistää, koska niillä on sama x:n kerroin. Suoritetaan ensin hajottaminen yhteenlaskukaavoja käyttäen:

$$\begin{aligned}
&111\sin(122x+44^\circ)+322\cos(122x+144^\circ)\\
&=111\big(\sin(122x)\cos(44^\circ)+\cos(122x)\sin(44^\circ)\big)\\
&\qquad\qquad+322\big(\cos(122x)\cos(144^\circ)-\sin(122x)\sin(144^\circ)\big)\\
&=\big(111\cos(44^\circ)-322\sin(144^\circ)\big)\sin(122x)\\
&\qquad\qquad+\big(111\sin(44^\circ)+322\cos(144^\circ)\big)\cos(122x)\\
&=-109.42\sin(122x)-183.396\cos(122x)
\end{aligned}$$

Lopuksi saadut termit yhdistetään kosiniaalloksi $A\cos(122x+\varphi)$ eli muotoon

$$A\cos(122x)\cos\varphi-A\sin(122x)\sin\varphi\,.$$

Vastintermien kertoimia vertaamalla saamme yhtälöparin

$$\begin{cases} -A\sin\varphi = -109.420 \\ A\cos\varphi = -183.396 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} \wedge 2 \\ \wedge 2 \end{vmatrix} + \quad \Big| \text{ Jaetaan ylempi alemmalla}$$

$A^2 = 45606.8$, valitaan amplitudille positiivinen arvo

$$A = \sqrt{45606.8} = 213.558$$

$-\tan\varphi = 0.596632$, eräs tällainen $\varphi = -30.82°$.

Koska yhtälöparimme mukaan sini on positiivinen ja kosini negatiivinen, niin kulman φ on oltava toisen neljänneksen kulma, esimerkiksi

$$\varphi = -30.82° + 180° = 149.18°$$

Vastaus: Kahden ensimmäisen aallon summa on $214\cos(122x + 149°)$

Sama laskimella. Kahden ensimmäisen aallon summa saadaan astemoodissa syötteellä tCollect(tExpand(111sin(122x+44) +322cos(122x+144))) yhdistettyä yhdeksi siniaalloksi $213.558\sin(122(x - 0.99034°))$, joka voidaan muokata kosiniaalloksi ottamalla huomioon, että kosiniaalto on 90 astetta siniaaltoa edellä:

$$\begin{aligned} 213.558\sin(122(x - 0.99034°)) &= 213.558\cos(122(x - 0.99034°) - 90°) \\ &= 213.558\cos(122x - 210.82°) \\ &= 213.558\cos(122x - 210.82° + 360°) \\ &\approx \underline{\underline{214\cos(122x + 149°)}} \end{aligned}$$

Tehtäviä

9.1 Määritä seuraavien siniaaltojen amplitudi, aallonpituus ja siirtymä.

v1) $y = 2\sin(3x + 45°)$ **v2)** $y = 0.4\sin(0.2x - \frac{\pi}{3})$

a) $y = \frac{2}{7}\sin(\frac{x + 3\pi}{10})$ **b)** $y = 2.5\sin(0.5x - 20°)$

9.2 Hahmottele seuraavien siniaaltojen kuvaajat ruutupaperille määrittämällä ensin kunkin aallon amplitudi, aallonpituus ja siirtymä. Valitse akseleiden yksiköt piirtämisen kannalta sopiviksi. Piirrä kuvaajat myös laskimella.

a) $y = 3\sin(2x + 30°)$ **b)** $y = \frac{1}{3}\sin(\frac{2x - \pi}{5})$

c) $y = 0.25\sin(3x + 45°)$ **d)** $y = 20\sin(\frac{x}{6} + \frac{\pi}{2})$

9.3 Kirjoita sellaisen siniaallon yhtälö, joka

v) kasvaa välillä $-\frac{\pi}{4} \le x \le 0$ pienimmästä arvostaan -5 suurimpaan arvoonsa 5

a) kasvaa välillä $-10° \le x \le 5°$ pienimmästä arvostaan -2 suurimpaan arvoonsa 2

b) kasvaa välillä $\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{5\pi}{6}$ nollasta suurimpaan arvoonsa 4

c) vähenee välillä $50° \le x \le 120°$ suurimmasta arvostaan 6 pienimpään arvoonsa -6.

9.4 Yhdistä (i) laskinta tehokkaasti hyödyntäen
(ii) laskinta yksinkertaisena funktiolaskimena käyttäen

v) yhdeksi siniaalloksi $7\sin(5x+45°)-3\cos(5x-30°)$

a) yhdeksi siniaalloksi $2\sin(3x+10°)+4\cos(3x+130°)$

b) yhdeksi kosiniaalloksi $3\sin(2x+40°)+\cos(2x+20°)$

9.5 Mitkä seuraavista summista ovat
(ii) jaksollisia? Ilmoita myös mahdollisen jakson pituus.
(ii) sinimuotoisia aaltoja?
Tarkista vastauksesi laskimen kuvan avulla!

a) $2\sin(3x+10°)-2\cos(4x+10°)$

b) $\frac{1}{3}\sin(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4})+\frac{1}{4}\cos(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{5})$

c) $2.3\sin(3.4x+45°)-4.5\cos(3.4x-23°)$

d) $3\sin(x\sqrt{3}+\pi)-4\sin(2x-\pi)$

10. KOLMION RATKAISEMINEN

Kolmion ratkaiseminen tarkoittaa kolmion tuntemattomien sivujen ja kulmien määrittämistä, kun jotkin näistä osista tunnetaan.

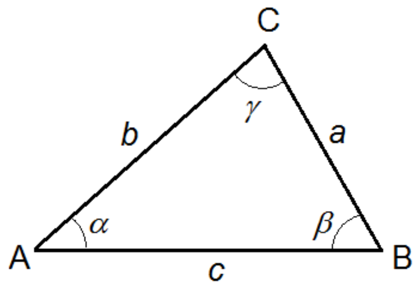
Mainituista osista on tunnettava kolme, joista vähintään yhden on oltava sivu, jotta muut osat voitaisiin määrittää.

Kolmion ratkaiseminen on keskeinen tehtävä, sillä kaikki monikulmiot voidaan jakaa kolmioiksi ja jos me saamme ratkaistua kyseiset osakolmiot, niin samalla määräytyvät monikulmionkin kaikki osat.

Suorakulmaisen kolmion ratkaiseminen on varmastikin lukijalle tuttua. Tälläkin taidolla tultaisiin periaatteessa toimeen, koska jokainen kolmio voidaan edelleen jakaa kahdeksi suorakulmaiseksi kolmioksi. Tällöin jouduttaisiin kuitenkin usein ratkaisemaan hankalia epälineaarisia yhtälöryhmiä. Siksi opettelemme tämän pykälän lopussa myös vinokulmaisen kolmion laskennollisen ratkaisemisen, koska se vähentää oleellisesti tarvittavien laskujen määrää.

10.1 Nimeämissopimus

Kolmion ABC kärjissä olevia kulmia merkitään kirjaimilla α, β ja γ sekä näiden kulmien vastaisia sivuja kirjaimilla *a*, *b* ja *c* mainitussa järjestyksessä.



Huomautus. Kaavastoissa noudatetaan yleensä yo nimeämissopimusta, joten kaavoja käytettäessä on muistettava, että kaavassa esiintyvä kulma γ on juuri sivun *c* vastainen kulma. Mikäli me käytämme kaavaa siten, että kulma γ onkin vaikka sivun *a* vastainen kulma, niin saamme tietenkin vääriä tuloksia.

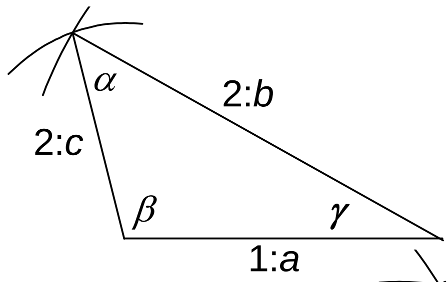
Mikäli kuvissa esiintyy useampia kolmioita, niin nimeämissopimuksesta ei tietenkään voida pitää orjallisesti kiinni, vaan on käytettävä muitakin kirjaintunnuksia tai alaindeksejä.

10.2 Kolmion ratkaiseminen piirtämällä

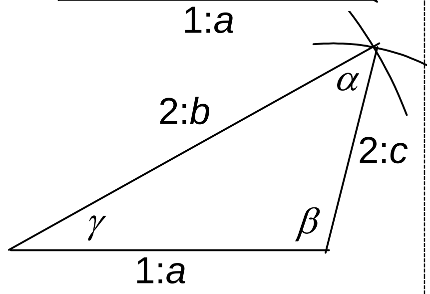
Seuraavassa tarkastelemme kolmion määrittämistä piirtämällä ja mittaamalla, kun kolmion osista tunnetaan kolme, joista vähintään yksi on sivu.
Seuraavan esimerkin osiot on nimetty kolmella kirjaimella sen mukaan, mitkä kolme osaa tunnetaan ja miten osat sijaitsevat toisiinsa nähden. Kussakin kuvassa on numeroilla osoitettu osien piirtämisjärjestys. Joissakin kuvissa näkyy yksi tai kaksi kaarta ilmaisten, että kolmion kärkipiste on haettava ympyrän ja suoran tai kahden ympyrän leikkauspisteenä. Muuten sivut on määritetty pituusmitalla ja kulmat astelevyllä.

Esimerkki. Määritä kolmion muut osat, kun kolmiosta tunnetaan

(sss) kaikki kolme sivua:
$a = 30$ mm, $b = 40$ mm ja $c = 20$ mm.

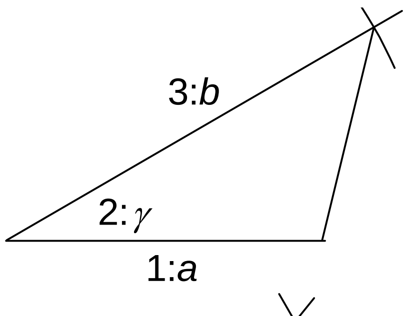


Mikäli sivujen b ja c paikkaa vaihdetaan, niin saadaan edellisen kolmion kanssa kääntäen yhtenevä kolmio: Mikäli jälkimmäinen kolmio leikataan irti tasosta, niin se voidaan kääntää kolmannen ulottuvuuden kautta ensimmäisen kolmion päälle siten, että kolmiot täysin yhtyvät. Annetuista osista voidaan siis ainakin tällä kertaa koota vain yhdenlainen kolmio, jonka tuntemattomat osat saadaan kuvasta mittaamalla:
$\alpha = 47°$, $\beta = 104°$, $\gamma = 29°$.



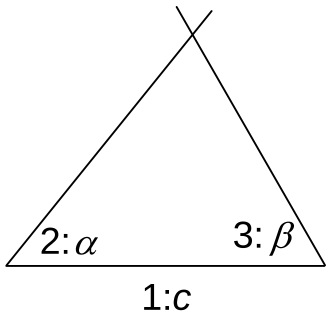
On selvää, että kolmion piirtämisen onnistumiseksi tapauksessa (sss) yksikään kolmion sivuista ei saa olla pidempi kuin kahden muun sivun summa.

(sks) kaksi sivua ja niiden välinen kulma:
$a = 30$ mm, $b = 40$ mm ja $\gamma = 30°$.



Tälläkin kertaa mahdolliset kolmiot ovat (kääntäen) yhteneviä, joten jälleen on vain yksi ratkaisu:
$c = 21$ mm , $\alpha = 47°$ ja $\beta = 103°$.

(ksk) kaksi kulmaa ja niiden välinen sivu:
$\alpha = 50°$, $\beta = 60°$ ja $c = 30$ mm .



Jälleen on vain yksi ratkaisu
$a = 25$ mm , $b = 28$ mm ja $\gamma = 70°$.

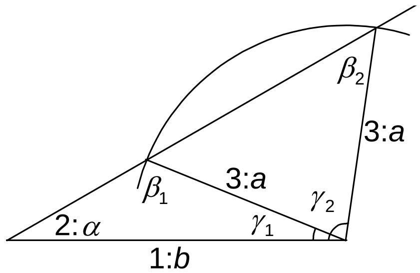
Tunnettujen kulmien summan on oltava tietenkin alle 180°.

(kks) kaksi kulmaa ja toisen vastainen sivu: $\alpha = 50°$, $\beta = 60°$ ja $a =$ 30mm.

Kulma γ voidaan laskea $\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = \underline{\underline{70°}}$, minkä jälkeen piirtäminen on mahdollista tapauksen (ksk) tavoin ja jälleen saadaan vain yksi ratkaisu $\underline{\underline{b = 34 \text{ mm ja } c = 37 \text{ mm}}}$.

Tunnettujen kulmien summan on jälleen oltava tietenkin alle 180°.

(ssk) kaksi sivua ja toisen vastainen kulma:
$a = 20$ mm , $b = 32$ mm ja $\alpha = 30$ °.



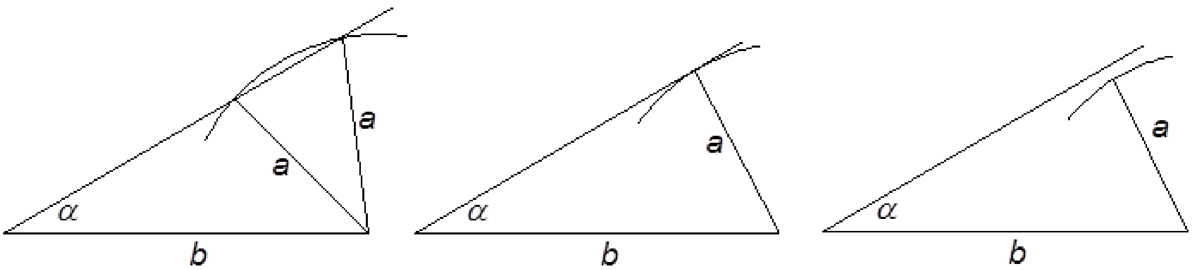
Annetuista osista voidaan konstruoida kaksi oleellisesti erilaista kolmiota, joista toisessa on osat

$\underline{\underline{c_1 = 16 \text{ mm }, \ \beta_1 = 127° \text{ ja } \gamma_1 = 23°}}$

ja toisessa vastaavasti

$\underline{\underline{c_2 = 40 \text{ mm }, \ \beta_2 = 53° \text{ ja } \gamma_2 = 97°}}$

On helppo havaita, että sivun *a* lyhetessä molempien ratkaisukolmioiden sivut *a* lähestyvät toisiaan ja arvolla $a = 16$ mm annetuista osista saadaan vain yksi ratkaisu. Jos sivu *a* lyhenee edelleen, niin tehtävä muuttuu mahdottomaksi.



Edellisessä esimerkissä havaitut oleellisesti erilaisten ratkaisukolmioiden lukumäärät pitävät paikkansa yleisestikin:

Yhteenveto. Mikäli kolmion sivuista ja kulmista tunnetaan kolme osaa, joista vähintään yksi on sivu, niin välttämättömiä ehtoja kolmion konstruoimiseksi ovat:

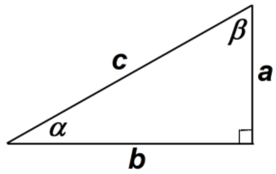
(i) Mikään sivuista ei saa olla pidempi kuin kahden muun sivun summa.

(ii) Tunnettujen kulmien summa ei saa ylittää 180 astetta.

Jos ehdot (i) ja (ii) ovat voimassa, niin annetuista osista voidaan piirtää tarkalleen yksi kolmio paitsi tapauksessa ssk, jossa mahdollisia ratkaisuja on 0 – 2 kappaletta.

10.3 Suorakulmaisen kolmion ratkaiseminen laskemalla

Täydennämme vielä aikaisempaa nimeämissopimusta siten, että jos tiedämme kolmion suorakulmaiseksi ja haluamme korostaa sen suorakulmaisuutta, niin merkitsemme hypotenuusaa symbolilla c, jolloin siis γ on suorakulma.



Suorakulmaisen kolmion ratkaisemisessa voit käyttää seuraavia jo tuntemiasi tuloksia. Niiden asemasta tai lisäksi voit tietenkin käyttää myös myöhemmin esitettäviä sini- ja kosinilauseita, jotka ovat voimassa kaikille kolmioille.

Lause. Jokaisessa kolmiossa kulmien summa on 180 astetta, ts.

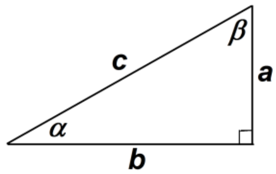
$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ .$$

Suorakulmaisessa kolmiossa on lisäksi voimassa

Pythagoraan lause. Suorakulmaisen kolmion hypotenuusan neliö on yhtä suuri kuin kateettien neliöiden summa, ts.

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}.$$

Suorakulmaisen kolmion avulla määriteltyjä terävän kulman trigonometrisia funktioita voidaan tietenkin käyttää hyväksi tutkittaessa suorakulmaista kolmiota.



Lause. Suorakulmaisessa kolmiossa on voimassa

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \text{vastaisen kateetin suhde hypotenuusaan}$$

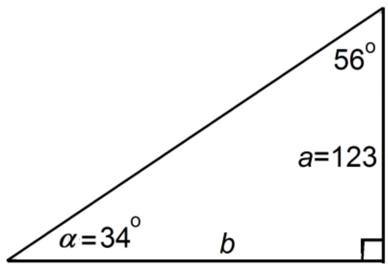
$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \text{viereisen kateetin suhde hypotenuusaan}$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \text{vastaisen kateetin suhde viereiseen kateettiin}$$

Huomautus. Kaksi viimeistä lausetta ovat **voimassa vain suorakulmaisissa kolmioissa**, joten saat käyttää niitä vain, jos tiedät kolmion varmuudella suorakulmaiseksi. Pelkkä kolmion näyttäminen suorakulmaiselta ei oikeuta käyttämään näitä lauseita, vaan sellaisessa tapauksessa joudut käyttämään yleiselle kolmiolle voimassa olevia sini- ja kosinilauseita.

Huomautus. Monet kuvat ovat jatkossa vain periaatekuvia havainnollistaen eri osien keskinäistä asemaa. Laskemalla saadut tulokset voi luonnollisesti tarkistaa piirtämällä kuvat mittatarkasti tai käyttämällä laskimia varten valmiiksi tehtyjä kolmionratkaisuohjelmia.

Esimerkki. Suorakulmaisen kolmion lyhyempi kateetti *a* on 123 mm ja toinen terävistä kulmista on 34°. Määritä pidempi kateetti *b.*



Kolmion toinen terävä kulma on $90° - 34° = 56°$. Koska kolmiossa pienintä sivua vastaa pienin kulma, niin tehtävässä annettu kulma 34° on lyhyemmän kateetin *a* vastainen kulma α.

Suorakulmaisessa kolmiossa $\tan\alpha = \frac{a}{b}$, joten

$$b = \frac{a}{\tan\alpha} = \frac{123\text{ mm}}{\tan 34°} \approx \underline{\underline{182\text{ mm}}}.$$

Esimerkki. Määritä suorakulmaisen kolmion kulmat, kun kolmion hypotenuusa on $c = 123.0$ m ja ala on 567.0 m^2.

Olkoon α toinen kolmion terävistä kulmista, jolloin kateetit ovat $c \cdot \sin\alpha$ ja $c \cdot \cos\alpha$. Näin ollen saamme alaa koskevan yhtälön

$$\frac{1}{2} \cdot c \sin\alpha \cdot c \cos\alpha = 567.$$

Ratkaisuiksi kelpaavat terävät kulmat $4.3°$ ja $85.7°$ saa kätevästi esimerkiksi TI-laskimen komennolla

$$\text{solve}(.5c^2 \sin(\alpha)\cos(\alpha) = 567, \alpha) \,\big|\, c = 123 \text{ and } 0 < \alpha < 90°$$

10.4 Sini- ja kosinilause

Jos kolmion suorakulmaisuudesta ei olla varmoja, niin kolmio ratkaistaan tavallisesti käyttäen apuna kolmion kulmien summaa koskevaa lausetta sekä seuraavassa esitettäviä sini- ja kosinilauseita. **Huomaa, että Pythagoraan lausetta ja suorakulmaisen kolmion trigonometriaa ei voi soveltaa vinokulmaisen kolmion tapauksessa.**

Sinilause. Kolmiossa jokaisen sivun suhde vastaisen kulman siniin on kyseiselle kolmiolle ominainen vakio ts.

$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}}.$$

Todistus. Koska kolmion ala on "puoli kertaa kahden sivun tulo kerrottuna välisen kulman sinillä" niin saamme alalle kolme esitystä riippuen käytetyistä sivuista

$$A=0.5bc\sin\alpha=0.5ac\sin\beta=0.5ab\sin\gamma.$$

Mikäli kaikki lausekkeet jaetaan tulolla $0.5abc$, niin saamme

$$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\gamma}{c}.$$

Koska yhtä suurten lukujen käänteisluvutkin ovat myös keskenään yhtä suuret, niin sinilause on tullut todistetuksi.

Huomautus. Sinilause sopii hyvin kolmion sivun laskemiseen, mikäli kysytty sivu ja tunnetut osat muodostavat kaksi vastakkaista sivu-kulma-paria.

Huomautus. Sinilausetta voidaan käyttää kolmion kulmankin laskemiseen, mikäli kysytty kulma ja tunnetut osat muodostavat kaksi sivu-kulma-paria.

Jos sinilauseella ratkaistava kulma ei ole pisimmän sivun vastainen kulma, niin se on varmasti terävä ja kulmalle kelpaa arvoksi sinilauseesta ratkaistun arcsin-lausekkeen mukainen terävä kulma.

Jos sinilauseella ratkaistava kulma on kuitenkin kolmion pisimmän sivun vastainen kulma, niin sinilauseesta ratkaistun arcsin-lausekkeen mukaisen terävän kulman lisäksi on huomioitava myös sen tylppä suplementtikulma, jolla myös on sama sinin arvo. Näistä kahdesta kulmavaihtoehdosta mahdollisesti toinen joudutaan karsimaan pois jonkin lisäehdon perusteella, kuten myöhemmistä esimerkeistä ilmenee.

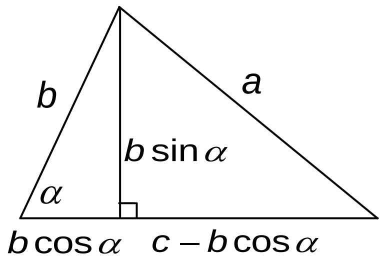
Huomautus. Myöhemmin näemme, että sinilauseessa mainittu vakio on kaksi kertaa kolmion ympäripiirretyn ympyrän säteen R suuruinen, ts.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R \ .$$

Kosinilause. Jokaisessa kolmiossa on voimassa

$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{aligned}} \ .$$

Todistus. Tarkastellaan kuvan mukaista teräväkulmaista kolmiota. (Koska kyseessä on erikoistapaus, niin todistuksemme ei ole aivan täydellinen). Sovelletaan Pythagoraan lausetta oikeanpuoleiseen suorakulmaiseen osakolmioon, jolloin



$$\begin{aligned} a^2 &= \text{vaakakateetti}^2 + \text{pystykateetti}^2 \\ &= (c - b\cos\alpha)^2 + (b\sin\alpha)^2 \\ &= c^2 - 2bc\cos\alpha + b^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha \\ &= c^2 - 2bc\cos\alpha + b^2\underbrace{(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)}_{=1} \ = \ b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \ . \end{aligned}$$

Vastaavasti voidaan johtaa muutkin kosinilauseen yhtälöt.

Huomautus. Kosinilause kannattaa opetella myös sanallisesti:

Kolmiossa yhden sivun neliö on kahden muun sivun neliöiden summa vähennettynä näiden muiden sivujen pituuksien ja niiden välisen kulman kosinin kaksinkertaisella tulolla.

Huomautus. Hankalasta ulkonäöstään huolimatta kosinilause on käyttökelpoinen ja ennen kaikkea hyvin turvallinen myös kolmion kulman ratkaisemisessa, jos kolmiosta tunnetaan kaikki sivut, sillä kolmion kulmaksi kelpaavalla välillä $0° \ldots 180°$ on vain yksi kulma, jolla on tietty kosinin arvo.

Sinilauseesta poiketen kosinilausetta käytettäessä ei (yksinkertaisen funktio-) laskimen antaman kulman lisäksi tarvitse milloinkaan tarkastella muita mahdollisia kulmavaihtoehtoja.

Esimerkki. Määritä kolmion pisin sivu, kun kolmiosta tunnetaan osat $\alpha = 45°$, $\beta = 67°$ ja $b = 89$ mm .

Koska kolmion kolmas kulma $\gamma = 180° - \alpha - \beta = 68°$ on suurin kolmion kulmista, niin sen vastainen sivu c on pisin. Sinilauseen avulla

$$\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{b}{\sin\beta},$$

josta edelleen

$$c = \frac{b}{\sin\beta} \cdot \sin\gamma = 89.6 \text{ mm} \approx \underline{\underline{90 \text{ mm}}}.$$

Esimerkki. Ratkaise kolmion tuntemattomat kulmat, kun kolmiosta tunnetaan $a = 76.0$ mm , $b = 54.0$ mm ja $\alpha = 65.0°$.

Koska sivu b ei ole kolmion pisin sivu, niin sen vastainen kulma on varmasti terävä. Voimme siis huoletta käyttää sinilausetta **terävän** kulman β ratkaisemiseen:

$$\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\alpha}{a} \quad \Leftrightarrow \quad \sin\beta = b \cdot \frac{\sin\alpha}{a},$$

josta

$$\beta = \arcsin(b \cdot \frac{\sin\alpha}{a}) = \underline{\underline{40.1°}} .$$

Kolmion kolmas kulma on tietenkin $\gamma = 180° - \alpha - \beta = \underline{\underline{74.9°}}$.

Esimerkki. Ratkaise kolmion tuntemattomat kulmat, kun kolmiosta tunnetaan $a = 76.0$ mm , $b = 54.0$ mm ja $\beta = 40.1°$.

Koska sivu a voi olla pisin kolmion sivuista, niin sen vastainen kulma voi olla terävä tai tylppä. Näin ollen sinilauseesta

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} \quad \Leftrightarrow \quad \sin\alpha = a \cdot \frac{\sin\beta}{b}$$

saatavan terävän kulman $\alpha_1 = \arcsin(a \cdot \frac{\sin\beta}{b}) = 65.0°$

lisäksi on huomioitava vastaava tylppä kulma $\alpha_2 = 180° - \alpha_1 = 115.0°$.

Kolmioiden kolmas kulma saadaan kaavalla $\gamma_i = 180° - \alpha_i - \beta$.

Vastaus: Muille kulmille on kaksi eri mahdollisuutta

$$\underline{\underline{\begin{cases} \alpha_1 = 65.0° \\ \gamma_1 = 74.9° \end{cases} \text{tai} \begin{cases} \alpha_2 = 115.0° \\ \gamma_2 = 24.9° \end{cases}}}.$$

Esimerkki. Ratkaise kolmion sivu *b*, kun kolmiosta tunnetaan sivut $a = 23.4$ mm ja $c = 56.7$ mm sekä niiden välinen kulma $\beta = 89.0°$

Kosinilauseesta $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$ saadaan

$$b = (\pm)\sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta} = \underline{\underline{61.0 \text{ mm}}}.$$

Esimerkki. Ratkaise kolmion suurin kulma, kun kolmiosta tunnetaan $a = 34$ mm, $b = 45$ mm ja $c = 56$ mm.

Pisintä sivua *c* vastaa suurin kulma γ. Kosinilauseesta

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \;\Leftrightarrow\; \cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

saadaan vain yksi välillä [0,180°] oleva ja kolmion kulmaksi kelpaava ratkaisu

$$\gamma = \arccos\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right) = \underline{\underline{89.2°}}.$$

Kulman γ voi ratkaista myös laskimen syötteellä

$$\text{solve}(c^2 = a^2 + b^2 - 2a\cdot b\cdot\cos(\gamma), \gamma)\,\big|\, a = 34 \text{ and } b = 45 \text{ and } c = 45 \text{ and } 0 < \gamma < 180°,$$

jossa kulma on rajoitettu oikealle välillä. Vaihtoehtoisesti ratkaisussa voi käyttää apuna sopivaa alkuarvausta seuraavan mallin mukaisesti

$$\text{solve}(c^2 = a^2 + b^2 - 2a\cdot b\cdot\cos(\gamma), \gamma = 90°)\,\big|\, a = 34 \text{ and } b = 45 \text{ and } c = 45.$$

Kulman γ alkuarvaus saanee olla mitä tahansa väliltä $0 \le \gamma < 180°$ ja jopa jonkin verran suurempikin kuin 180°.

Ilman rajoitusehtoa tai alkuarvausta laskin tulostaisi yleisen ratkaisun ja me joutuisimme itse valitsemaan oikean ratkaisun ja sieventämäänkin sitä.

Esimerkki. Määritä kolmion pisin sivu, jos sivun $a = 111$ mm vastainen kulma $\alpha = 54.3°$ ja kolmion piiri on 345 mm.

Merkitään kolmion toista sivua *b*:llä, jolloin kolmas sivu on

$$c = 345 - a - b = 345 - 111 - b = 234 - b.$$

Kosinilauseesta $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ saadaan nyt yhtälö

$$111^2 = b^2 + (234 - b)^2 - 2\cdot b\cdot(234 - b)\cdot\cos(54.3°).$$

Laskimella saamme tästä toisen asteen yhtälöstä sivulle *b* ratkaisut 134.036 ja 99.964 , jotka esittävät itse asiassa kolmion molempia tuntemattomia sivuja, koska näiden summa on 234. Kolmion pisin sivu on siis pyöristettynä $\underline{\underline{134 \text{ mm}}}$.

10.5 Yleisen kolmion tapauskohtaiset ratkaisuohjeet

Seuraavassa tarkastellaan kaikkien mahdollisten kolmionratkaisutehtävien suositeltavia ratkaisutapoja, mikäli kolmio ratkaistaan tavallisella funktiolaskimella tai kehittyneeseen laskimeen laaditaan sopiva kolmionratkaisuohjelma.

Tapaus sss: Tunnetaan kolmion kaikki sivut.

Huomaa, että tapaus sss on mahdoton, mikäli yksi kolmion sivuista on pidempi kuin kahden muun summa.

Tapa 1. Ratkaise kulmat yksitellen kosinilausetta käyttäen. Mahdolliset laskuvirheet paljastuvat, jos lopuksi tarkistat, että kulmien summa on $180°$.

Tapa 2. Ratkaise kaksi kulmaa kosinilauseella ja laske kolmas kulma käyttäen hyväksesi kolmion kulmien summaa.

Tapa 3. Ratkaise pisimmän sivun vastainen kulma kosinilauseella. Loput kulmat voit huoletta ratkaista sinilauseella, sillä muut kulmat ovat pienempiä kuin ensin ratkaistu ja ovat siis teräviä. Lopuksi voit tarkistaa kulmien summan.

Tapa 4. Ratkaise pisimmän sivun vastainen kulma kosinilauseella, toinen kulma sinilauseella ja kolmas kulma käyttäen hyväksesi kulmien summaa.

Tapaus sks: Tunnetaan kolmion kaksi sivua ja niiden välinen kulma.

Laske kolmas sivu kosinilauseella.

Laske sitten loput kulmat yksitellen kuten edellä tapauksessa sss käyttäen mielesi mukaan kosinilausetta, sinilausetta tai kolmion kulmien summaa koskevaa lausetta. **Varo kuitenkin, ettet ratkaise kolmion pisintä sivua vastaavaa kulmaa sinilauseella**, koska et useinkaan tiedä etukäteen, pitäisikö kyseisen kulman olla terävä vai tylppä. Piirtämisratkaisujen yhteydessä on jo todettu, että mahdollisia ratkaisuja on tapauksessa sks vain yksi, joten pisimmän sivun vastaiselle kulmalle ei nyt saa hyväksyä kahta eri vaihtoehtoa: terävää ja tylppää. Siksi sinun tuleekin ratkaista pisimmän sivun vastainen kulma kosinilauseella, jolloin saat vain yhden vastauksen, joka on oikea. Jos kuitenkin haluat käyttää sinilausetta kulman ratkaisemiseen, niin ratkaise ensin muun kuin pisimmän sivun vastainen kulma, joka on varmasti terävä. Kolmannen kulman saat sitten summaehdosta.

Tapaus ssk: Tunnetaan kolmion kaksi sivua ja toisen vastainen kulma.

Edellä piirtämisratkaisuissa on jo todettu, että juuri **tapauksessa ssk voi ratkaisuja mahdollisesti olla kaksikin erilaista.**

Laske toisen tunnetun sivun vastainen kulma sinilauseella. Tällöin on kaksi oleellisesti erilaista mahdollisuutta:

- **Jos laskettavan kulman vastainen sivu on pidempi kuin tunnetun kulman vastainen sivu, niin (suoran kulman tapausta lukuunottamatta) sinun tulee huomioida sekä terävän että tylpän kulman mahdollisuudet. Joudut siis jatkossa tutkimaan kahta oleellisesti erilaista kolmiota erillisinä tapauksina.**
- Jos taas laskettavan kulman vastainen sivu on lyhyempi kuin tunnetun kulman vastainen sivu, niin laskettavan kulman tulee ilman muuta olla terävä ja tutkittavanasi on vain yksi mahdollinen kolmio.

Kolmannen kulman saat kolmion kulmien summaa koskevasta lauseesta.

Kolmas sivu saadaan helpoiten sinilauseella.

Tapaukset ksk ja kks: Tunnetaan kaksi kulmaa ja joko niiden välinen sivu tai toisen vastainen sivu.

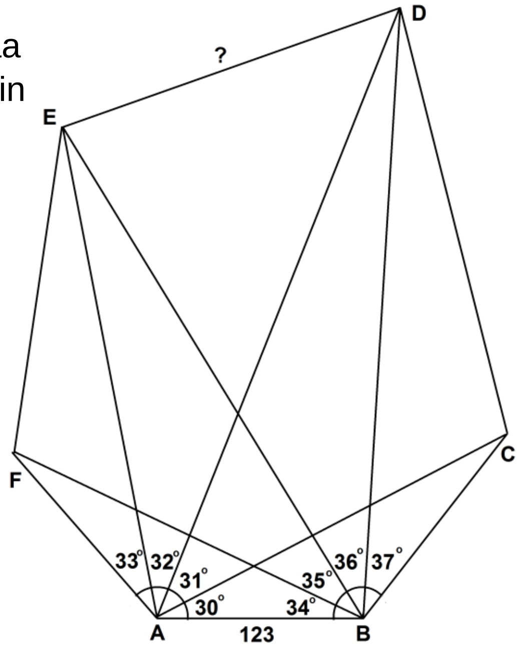
Kolmas kulma lasketaan kulmien summaa koskevan lauseen avulla. Sivut saa mukavimmin sinilauseella.

10.6 Kolmion ratkaisuohjelma

Netistä löytyy useita laskimiin ladattavia ohjelmia, jotka ratkaisevat kolmion tuntemattomat kulmat ja sivut sekä monia muita suureita, jos kolmion osista tunnetaan kolme, joista vähintään yksi on sivu.
Näihin ohjelmiin pitää kuitenkin aina suhtautua varauksella, koska on ilmennyt, että ne usein laskevat väärin erityisesti niissä tapaukseen ssk liittyvissä erikoistapauksissa, joissa on kaksi mahdollista kolmiota.

Satakunnan ammattikorkeakoulussa ovat erityisesti insinööriopiskelijat Heikki Anto, Hannes Palomäki ja Joonas Helava kehittäneet Texasin laskimiin sopivia kolmionratkaisuohjelmia, minkä johdosta tämän teoksen kirjoittajista erityisesti yliopettaja Timo Ojala esittää heille julkisen kiitoksensa. Jos kolmion sivuista ja kulmista tunnetaan kolme osaa, joista vähintään yksi on sivu, niin nämä ohjelmat määrittävät kolmion tuntemattomat sivut ja kulmat sekä korkeusjanat, keskijanat, sisään- ja ympäripiirrettyjen ympyröiden säteet sekä kolmion alan.

Esimerkki. Ratkaise likimääräisesti piirretyn monikulmion ABCDEF tuntematon sivu ED, kun tunnetaan sivu $AB = 123$ ja kuvaan merkityt kulmat.



Koska kolmiosta ABE tunnetaan kaksi kulmaa $93°$ ja $69°$ sekä näiden välinen sivu 123, niin voimme ratkaista kolmion muut osat kolmio-ohjelmalla, jolloin saamme $BE = 397.491$.

Vastaavasti kolmiosta ABD tunnetaan kaksi kulmaa $61°$ ja $105°$ sekä näiden välinen sivu 123, joten voimme ratkaista muut osat, jolloin saamme $BD = 444.682$.

Koska kolmiosta BED tunnetaan nyt kaksi sivua 397.491 ja 444.682 sekä niiden välinen kulma $36°$, niin saamme tuntemattoman sivun pituudeksi lopulta $DE = 264.087 \approx 264$.

Tehtäviä

10.1 Laske suorakulmaisen kolmion ala, kun hypotenuusa on 123 mm ja toinen terävä kulma on **v)** $43.00°$ **a)** 34.00°.

10.2 Määritä suorakulmaisen kolmion sivut, kun kolmion piiri on 234.0 mm ja ala on **v)** 987.0 mm^2 **a)** 1234 mm^2 .

10.3 Määritä suorakulmaisen kolmion terävät kulmat, kun hypotenuusa on 345 mm ja ala on **v)** 9870 mm^2 **a)** 7890 mm^2 .

10.4 Kolmion sivut ovat AB = 32 mm , BC = 43 mm ja CA = 54 mm. Luettele kulmia laskematta kolmion kulmat α, β ja γ suuruusjärjestyksessä suurimmasta pienimpään. Tarkista laskemalla.

10.5 Ratkaise annetut osat sisältävän kolmion muut osat
(i) piirtämällä
(ii) valmiilla kolmionratkaisuohjelmalla
(iii) laskintasi tavallisena funktiolaskimena käyttäen.
Varusta kukin kohta vielä kolmikirjaimisella tunnuksella, joka kuvaa annettujen osien keskinäistä sijaintia.
a) b = 23 mm, α = 76° ja γ = 46° ,
b) a = 32 mm, b = 25 mm ja c = 20 mm ,
c) α = 40°, a = 30 mm ja b = 20 mm ,
d) a = 30 mm, β = 25° ja b = 16 mm ,
e) a = 24 mm, α = 67° ja β = 50° ,
f) a = 25 mm, c = 15 mm ja γ = 60° ,
g) a = 30 mm, c = 25 mm ja β = 60° .

10.6 Selvitä lyhyesti, millä ehdolla tapauksissa sss, ksk ja kks kolmion piirtämistehtävällä ei ole ratkaisua.

10.7 Kirjoita sellainen annetuista kolmesta sivusta ja/tai kulmasta muodostuva kolmion piirtämistehtävä, jolla on **a)** 2 **b)** 0 ratkaisua siten, että ratkaisujen määrää ei näe ilman tarkempaa tutkimista. Tutki tilannetta piirtämällä.

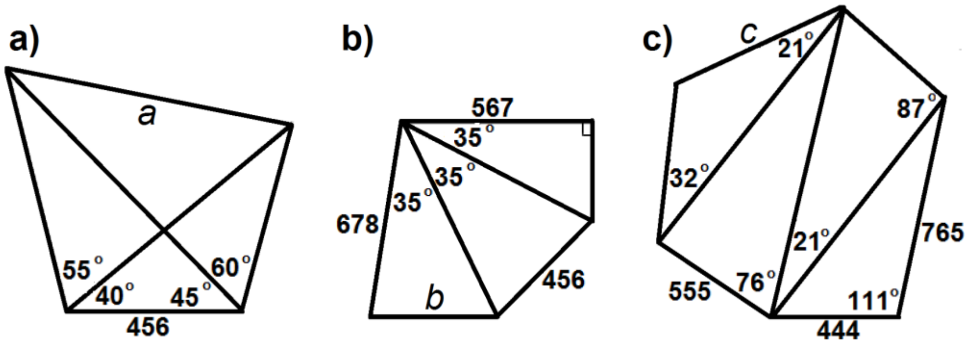
10.8 Kiinnittäen erityistä huomioita ratkaisujen lukumäärään määritä
a) kolmion kulma α, kun tiedetään, että $\sin \alpha = 0.123$
b) kolmion lyhimmän sivun vastainen kulma β, kun $\sin \beta = 0.23$
c) kolmion pisimmän sivun vastainen kulma γ, kun $\sin \gamma = 0.34$
d) kolmion pisimmän sivun vastainen kulma β, kun $\sin \beta = 0.98$
e) kolmion kulma α, kun $\cos \alpha = -0.567$.

10.9 Ratkaise kolmion kulma α, kun tunnetaan kolmion sivut b = 123.45 mm ja c = 234.56 mm sekä ala **v)** A = 12345 mm^2 **a)** $A = 9876$ mm^2

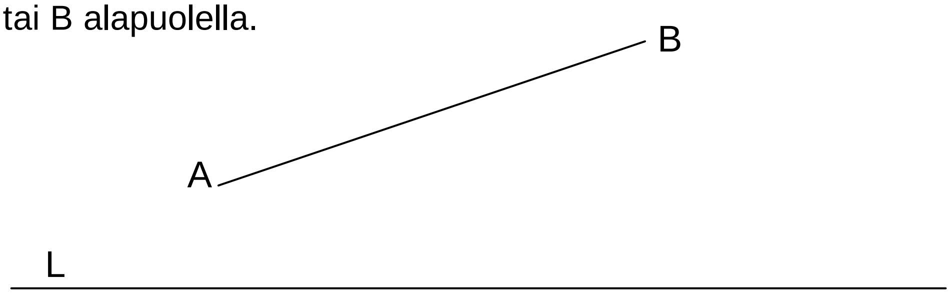
10.10 Määritä kolmion kulma β, kun $\alpha = 34.0°$, $a = 123$ mm ja
v) $b = 135$ mm **a)** $b = 234$ mm **b)** $b = 189$ mm **c)** $b = 111$ mm **.**

10.11 Suoran ympyräkartion korkeus on 345 mm ja pohjaympyrän säde on **v)** 123 mm **a)** 234 mm. Pohjaympyrään on piirretty 159 mm pitkä jänne AB. Määritä sekä tavallista funktiolaskinta käyttäen että kolmionratkaisuohjelmalla kulman AHB suuruus, kun H on kartion kärkipiste.

10.12 v) Selvitä ilman laskuja millä alla olevissa epätarkasti piirretyissä kuvissa olevista janoista *a* - *c* on kaksi mahdollista pituutta?
a – c) Laske valmiilla kolmionratkaisuohjelmalla janojen *a* - *c* pituudet.



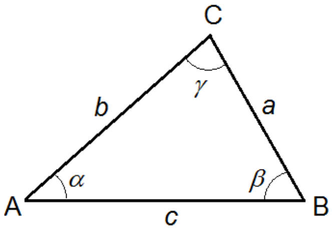
10.13 Määritä kuvan janan AB pituus suorittamalla vain seuraavia mittauksia:
- Suoralle L voit erottaa janoja, joiden pituuden saat mitata kuvasta.
- Voit mitata sellaisten kulmien suuruuksia, joiden kärki on suoralla L, mutta kulman kärki ei kuitenkaan saa olla suoraan pisteiden A tai B alapuolella.



11. KOLMIOITA KOSKEVIA TULOKSIA

Noudatamme yhä kolmiota koskevaa nimeämissopimusta mikäli mahdollista.

Edellisessä luvussa tarkastelimme kolmion ratkaisemisessa käytettäviä lauseita:



- Kolmion kulmien summa on 180 astetta.
- Sinilause: Kolmiossa
  $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=\text{kolmiolle ominainen vakio}$.
- Kosinilause: Kolmiossa $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$.

Mikäli kolmio on suorakulmainen eli $\sin\gamma=\sin 90°=1$ ja $\cos\gamma=\cos 90°=0$, niin sinilauseen alkupää sisältää suorakulmaisen kolmion trigonometriset perusyhtälöt ja kosinilause vastaa Pythagoraan lausetta.

Kolmion alan voi laskea esimerkiksi kaavoilla

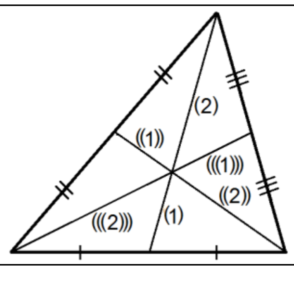
$$A=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$$

$$A=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\text{, missä } p \text{ on puolipiiri.}$$

Jatkossa tarkastelemme kolmioon liittyviä käsitteitä ja tuloksia usein ilman perusteluja. Esitettyihin asioihin perehdytään ennen kaikkea harjoitustehtävien avulla. Monet esitettävät tulokset saadaan kätevästi laskettua TI-laskimeen ladattavalla kolmionratkaisuohjelmalla.

Määritelmä. Kolmion **mediaani** eli **keskijana** on kolmion kärkipisteen ja vastaisen sivun keskipisteen yhdysjana.

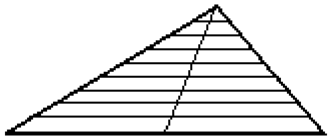
Lause. Kolmion keskijanat leikkaavat toisensa samassa pisteessä, joka jakaa kunkin keskijanan kärjestä lukien suhteessa 2:1 .



Huomautus. Jos kuvassa janojen vierellä on sulkeiden sisällä olevia lukuja edellisen kuvan tapaan, niin saman sulkumäärän sisällä olevat luvut ilmoittavat, miten lukujen vierellä olevien janojen pituudet suhtautuvat toisiinsa.

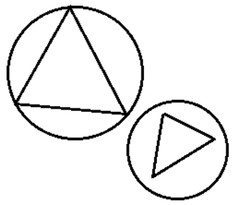
Huomautus. Homogeenisen kolmiolevyn painopiste on kolmion keskijanojen leikkauspisteessä.

Perustelu. Homogeenisen kolmiolevyn painopisteen tulee sijaita jokaisella kolmioon piirretyllä keskijanalla, sillä jos kolmio jaetaan kuvan mukaisesti keskijanan vastaisen sivun suuntaisiin (äärettömän) kapeisiin kaistaleisiin, niin kukin kaistale on tasapainossa keskijanan kohdalta tuettuna. Näin ollen koko kolmiolevykin on tasapainossa keskijanalta tuettuna eli kolmiolevyn painopiste on piirretyllä keskijanalla. Koska painopiste on jokaisella keskijanalla, niin sen tulee olla keskijanojen leikkauspisteessä.

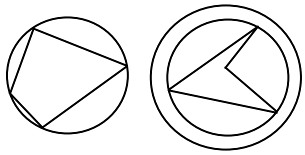


Määritelmä. Kolmion ympäri piirretty ympyrä tarkoittaa sitä ympyrää, joka kulkee kolmion kaikkien kärkipisteiden kautta.

Huomautus. Kolmion ympärille piirretty ympyrä tarkoittaa mitä tahansa ympyrää, jonka sisällä koko kolmio on.



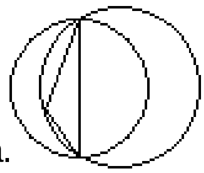
Huomautus. Yleisemminkin **monikulmion ympäri piirretty ympyrä** tarkoittaa ympyrää, joka kulkee monikulmion kaikkien kärkien kautta.



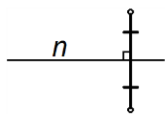
On selvää, että neli- ja useampisivuisilla monikulmioilla ei aina ole ympäri piirrettyä ympyrää. Kuvan oikeanpuoleisella nelikulmiolla ei ole ympäripiirrettyä ympyrää, mutta nelikulmion ympäri**lle** on piirretty kaksikin eri ympyrää.

Huomautus. Mikäli kolmio on *teräväkulmainen*, niin kolmion ympäripiirretty ympyrä on pienin kolmion ympärille piirretyistä ympyröistä.

Jos kolmio on *tylppäkulmainen*, niin kolmion ympäripiirretty ympyrä ei ole pienin kolmion ympärille piirretyistä ympyröistä. Tylppäkulmaisen kolmion tapauksessa pisin sivu halkaisijana piirretty ympyrä on pienin kolmion ympärille piirretyistä ympyröistä.



Määritelmä. Janan **keskinormaali** on se janan keskipisteen kautta kulkeva suora, joka on kohtisuorassa janaa vastaan.

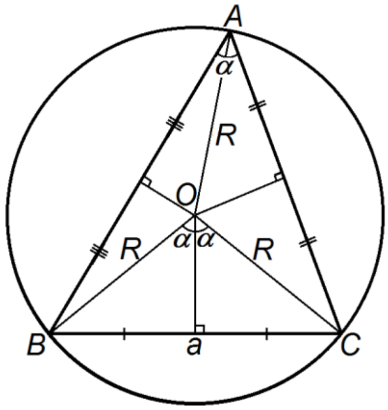


Lause. Kolmion ympäripiirretyn ympyrän keskipiste on kolmion sivujen keskinormaalien leikkauspisteessä ja ympäripiirretyn ympyrän säde on

$$R = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{\sin\beta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{\sin\gamma}$$

Todistus. On selvää, että kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste on yhtä kaukana kaikista kärkipisteistä, joten keskipisteen tulee olla kärkipisteiden välisten janojen keskinormaaleilla eli keskinormaalien leikkauspisteessä.

Säde R saadaan laskettua kuvan pienestä suorakulmaisesta kolmiosta käyttäen seuraavassa pykälässä esitettävää lausetta, jonka mukaan ympyrän keskuskulma BOC on kaksi kertaa vastaavan kehäkulman BAC suuruinen.

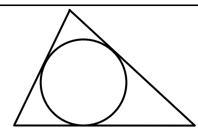


Huomautus. Edellisen lauseen nojalla sinilause esitetäänkin usein muodossa

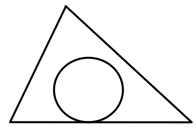
$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R},$$

missä R on kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde.

Määritelmä. Kolmion sisään piirretty ympyrä tarkoittaa sitä ympyrää, joka sivuaa kolmion kaikkia sivuja.



Huomautus. Kolmion sisälle piirretty ympyrä tarkoittaa mitä tahansa ympyrää, joka on kolmion sisällä.



Huomautus. Kolmion sisään piirretty ympyrä on suurin kolmion sisälle piirretyistä ympyröistä.

Lause. Kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste on kolmion kulmanpuolittajien leikkauspisteessä ja sisään piirretyn ympyrän säde on

$$\boxed{r = \frac{A}{p}},$$

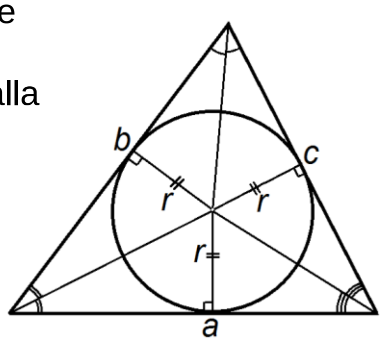
missä $A =$ kolmion pinta-ala ja $p =$ kolmion puolipiiri $= \dfrac{a+b+c}{2}$.

Todistus. Kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste on selvästi yhtä kaukana kolmion kaikista sivuista. Siksi keskipiste on kolmion jokaisella kulmanpuolittajalla eli kulmanpuolittajien leikkauspisteessä.

Kolmion ala saadaan laskemalla yhteen kolmen sellaisen osakolmion alat, joissa kaikissa korkeutena on sisään piirretyn ympyrän säde r ja kantana on vuorollaan jokin sivuista a, b ja c. Näin ollen

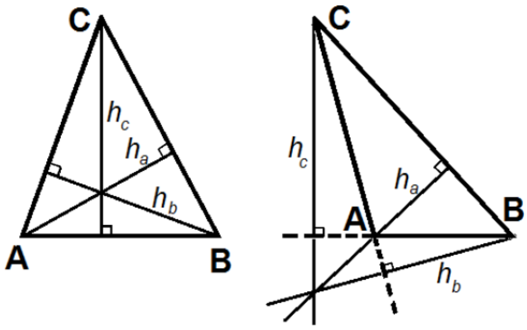
$$A = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = \frac{a+b+c}{2}r = pr,$$

josta voidaan ratkaista sisään piirretyn ympyrän säde r.



Määritelmä. Kolmion **korkeusjana** tarkoittaa kolmion kärjestä kohtisuoraan vastakkaista sivua tai sen jatketta vastaan piirrettyä janaa.

Huomautus. Myös kolmion korkeusjanat tai niiden jatkeet leikkaavat toisensa samassa pisteessä, joka on kolmion ulkopuolella, jos kolmio on tylppäkulmainen.



Huomautus. Monien kaavakirjojen merkinnät h_a, m_a ja w_a tarkoittavat kärjestä A alkavaa ja sivulle a (tai sen jatkeelle) suuntautuvaa korkeusjanaa, keskijanaa ja kulmanpuolittajaa.

Tehtäviä

11.1 Kolmion terävä-, suora- tai tylppäkulmaisuuden voi helposti selvittää tutkimalla, onko pisimmän sivun neliö pienempi, yhtä suuri vai suurempi kuin kahden lyhimmän sivun neliöiden summa. Tutki sekä tällä testillä että kolmio-ohjelmalla kolmion tyyppi, kun sivut ovat

- **a)** 51 mm, 62 mm ja 87 mm ,
- **b)** 50 mm, 120 mm ja 130 mm ,
- **c)** 55 mm, 65 mm ja 75 mm .

11.2 Tarkastellaan kolmiota, jonka sivut ovat

$$a = 55\,\text{mm}\ ,\ b = 77\,\text{mm ja } c = 99\,\text{mm}.$$

Määritä (i) kolmio-ohjelmaa hyödyntäen (ii) kaavoja käyttäen (iii) piirtämällä ja mittaamalla

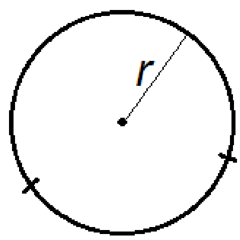
- **a)** kolmion kärkipisteen A etäisyys painopisteestä P,
- **b)** kolmion ympäripiirretyn ympyrän säde,
- **c)** kolmion sisään piirretyn ympyrän säde,
- **d)** niiden osien pituudet, joihin kolmion suurimman kulman puolittaja jakaa vastaisen sivun.

12. YMPYRÄÄ KOSKEVIA TULOKSIA

Ympyräviiva muodostuu niistä pisteistä, jotka ovat **säteen** etäisyydellä **keskipisteestä**.

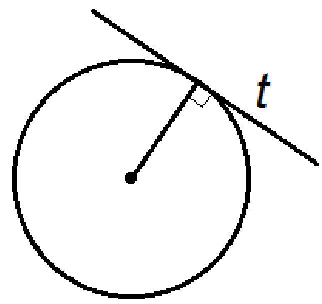
Ympyräviivaa sanotaan myös **ympyrän kehäksi** tai lyhyesti vain **ympyräksi.**

Sana **ympyrä** tarkoittaa usein myös ympyräviivan rajoittamaa tason osaa.



Kaksi ympyrän kehällä olevaa pistettä jakaa kehän kahteen **kaareen.**

Suora, jolla on ympyrän kanssa yksi yhteinen piste, on ympyrän **sivuaja eli tangentti.**



Lause. Ympyrän tangentti on kohtisuorassa sivuamispisteeseen piirrettyä sädettä vastaan.

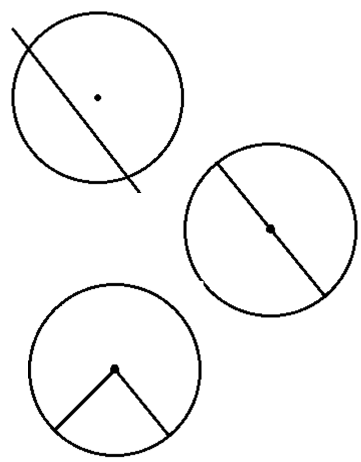
Suora, joka leikkaa ympyrää, on ympyrän **leikkaaja eli sekantti.**

Sekantista ympyrän sisään jäävä jana on **jänne.**

Jänne jakaa ympyräalueen kahteen **segmenttiin.**

Ympyrän keskipisteen kautta kulkeva jänne on ympyrän **halkaisija**.

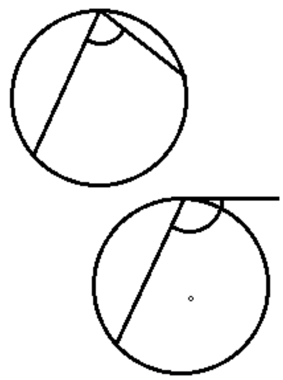
Kaksi sädettä jakaa ympyräalueen kahteen **sektoriin.**



Kulma, jonka kärki on ympyränkehällä ja jonka kyljet ovat ympyrän jänteitä, on **kehäkulma.** Kehäkulman toisena kylkenä voi olla myös ympyrän tangentti.

Kehäkulman sisään jäävää kaarta sanotaan **kehäkulmaa vastaavaksi kaareksi.**

Kehäkulmaa voidaan myös sanoa (erääksi) tätä **kaarta vastaavaksi kehäkulmaksi.**

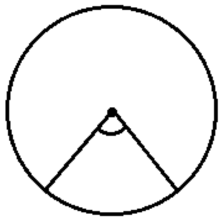


Ympyrän kehällä on toinenkin kaari kehäkulman ulkopuolella. Kehäkulma on (eräs) tämän **kaaren sisältämä kehäkulma**.

Kulma, jonka kärki on ympyrän keskipisteessä ja jonka kyljet ovat säteitä, on **keskuskulma**.

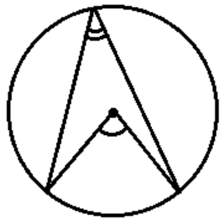
Keskuskulman sisään jäävää kaarta sanotaan **keskuskulmaa vastaavaksi kaareksi.**

Keskuskulmaa sanotaan myös tätä **kaarta vastaavaksi keskuskulmaksi.**



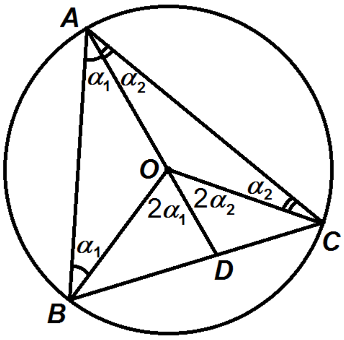
Kaaren asteluku tarkoittaa kaarta vastaavan keskuskulman astelukua.

Jos kehäkulmaa ja keskuskulmaa vastaa sama kaari, niin kehäkulma on (eräs) tätä **keskuskulmaa vastaava kehäkulma** ja kääntäen keskuskulma on **kehäkulmaa vastaava keskuskulma**.



Lause. Kehäkulma on puolet vastaavasta keskuskulmasta.

Todistus. Tarkastelemme nyt vain tapausta, jossa ympyrän keskipiste jää kehäkulman sisään.



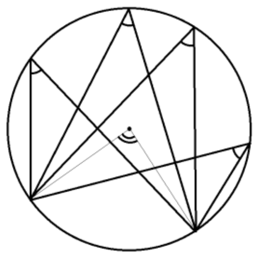
Kulma *BOC* on kehäkulmaa *BAC* vastaava keskuskulma. Piirretään kuvan mukainen jana *AD* ympyrän keskipisteen *O* kautta. Piirretty jana jakakoon kehäkulman osiin α_1 ja α_2.
Koska kuvan kolmio *AOB* on tasakylkinen (kylkinä ympyrän säteet), niin myös $\sphericalangle ABO = \alpha_1$. Samassa kolmiossa $\sphericalangle AOB = 180° - 2\alpha_1$ ja sen vieruskulma $\sphericalangle BOD = 2\alpha_1$.

Samoin päätellään, että $\sphericalangle COD = 2\alpha_2$.
Niinpä $\sphericalangle BOC = \sphericalangle BOD + \sphericalangle DOC = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2(\alpha_1 + \alpha_2) = 2 \cdot \sphericalangle BAC$, m.o.t.

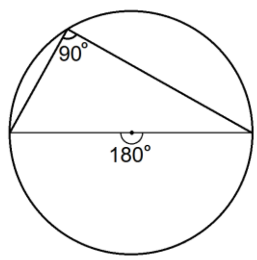
Edellisestä lauseesta saadaan useita tärkeitä seurauslauseita.

Seurauslause 1. Samaa kaarta vastaavat kehäkulmat ovat yhtä suuret.

Seurauslause 2. Saman kaaren sisältämät kehäkulmat ovat yhtä suuret.

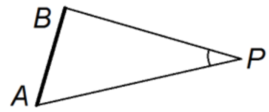


Seurauslause 3. Puoliympyrän sisältämä kehäkulma on suorakulma.

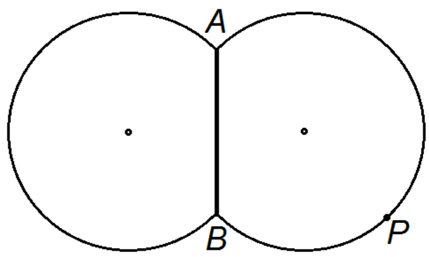


Seurauslauseet ovat ilmeisen selvät, koska tarkasteltavat kehäkulmat ovat puolet vastaavasta keskuskulmasta.

Määritelmä. Janan *AB* **näkökulma** pisteessä *P* tarkoittaa kulmaa *APB*.



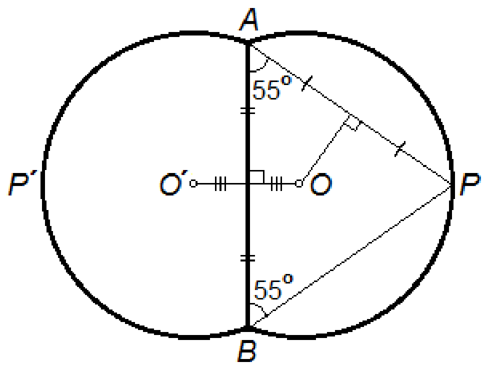
Lause. Janan *AB* näkökulma on sama kaikissa kolmion *APB* ympäripiirretyn ympyrän kaaren $\overset{\frown}{APB}$ (ja sen peilikuvakaaren) pisteissä.



Kaarten väliin jäävästä alueesta jana *AB* näkyy suuremmassa kulmassa kuin em. kaarilta.

Kaarten ulkopuolella olevasta alueesta jana *AB* näkyy puolestaan pienemmässä kulmassa kuin kyseisiltä kaarilta.

Esimerkki. Määritetään kaikki ne pisteet, joista annettu jana *AB* näkyy kulmassa $70°$.



Eräs tällainen piste *P* löydetään täydentämällä janan *AB* viereen tasakylkinen kolmio, jonka kantakulmat ovat $(180° - 70°) / 2 = 55°$.
Seuraavaksi määritetään kolmion *ABP* ympäripiirretyn ympyrän keskipiste *O* kolmion sivujen keskinormaalien leikkauspistettä käyttäen.
Peilikuvakaaren keskipiste *O´* sijaitsee symmetrisesti janan *AB* toisella puolen.

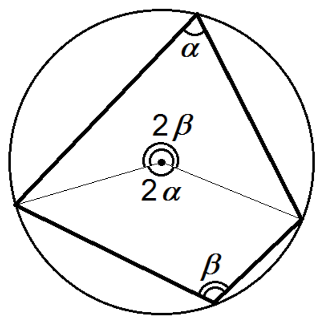
Nopeampi ratkaisu: Piirrettävän ympyränkaaren keskipiste *O* löydetään konstruoimalla tasakylkinen kolmio *AOB*, jonka huippukulma *AOB* on näkökulmaa vastaavana keskuskulmana $2 \cdot 70° = 140°$ ja kantakulmat

$$\measuredangle OAB = \measuredangle OBA = (180° - 140°) / 2 = 20°.$$

Toisen ympyränkaaren keskipiste *O´* löydetään symmetriaa hyödyntäen.

Lause. Nelikulmion ympäri voidaan piirtää ympyrä tarkalleen silloin, kun nelikulmion vastakkaisten kulmien summa on 180 astetta.

Todistus. Osoitamme vain, että lauseen ehto on välttämätön ympyrän piirtämiseksi.

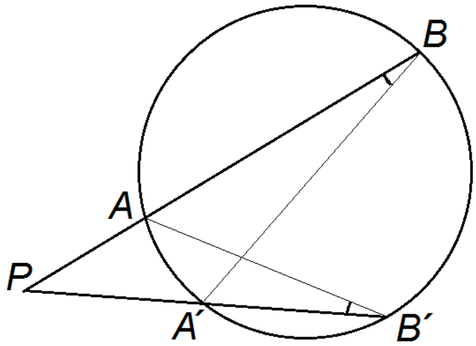


Mikäli nelikulmion ympäri voidaan piirtää ympyrä, niin nelikulmion vastakkaisia kulmia α ja β vastaavat keskuskulmat 2α ja 2β muodostavat yhdessä täyskulman 360°. Nelikulmion vastakkaisten kulmien summa on siis tällöin

$$\alpha + \beta = 1/2 \cdot (2\alpha + 2\beta) = 1/2 \cdot 360° = 180°.$$

Sekanttilause. Kiinteästä pisteestä P tietylle ympyrälle piirretyn sekantin osien tulo $PA \cdot PB$ on piirretystä sekantista riippumaton vakio. Tämä vakio riippuu vain ympyrän säteestä ja pisteen P etäisyydestä ympyrän keskipisteestä.

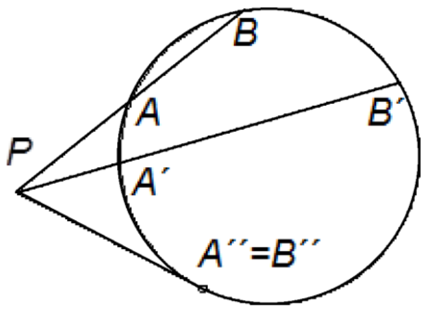
Todistus. Tarkastelemme nyt vain tapausta, jossa annettu piste on ympyrän ulkopuolella.



Piirretään pisteestä P annetulle ympyrälle kaksi eri sekanttia PAB ja $PA´B´$. Kolmiot $PAB´$ ja $PA´B$ ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen mukaan (kulma P yhteinen sekä $\sphericalangle B = \sphericalangle B´$ samaa kaarta vastaavina kehäkulmina). Koska yhdenmuotoisten kolmioiden vastinsivujen suhde on vakio, niin

$\dfrac{PB´}{PB} = \dfrac{PA}{PA´}$, josta väite saadaan ristiinkertomalla.

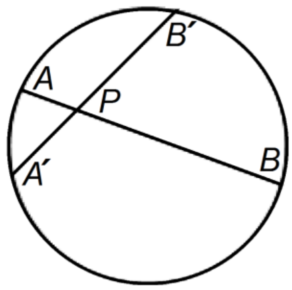
Esimerkki. Mittaamalla todetaan, että (A5-kokoiselle arkille tulostetun sivun) kuvassa



$$\begin{cases} PA \cdot PB \approx 14 \text{ mm} \cdot 27 \text{ mm} = 378 \text{ mm}^2 \\ PA´ \cdot PB´ \approx 10 \text{ mm} \cdot 38 \text{ mm} = 380 \text{ mm}^2 \\ PA´´ \cdot PB´´ \approx 19 \text{ mm} \cdot 19 \text{ mm} \approx 361 \text{ mm}^2 \end{cases}.$$

Vaihtelu tulon arvossa johtuu mittausepätarkkuudesta.

Vastaavasti viereisessä kuvassa

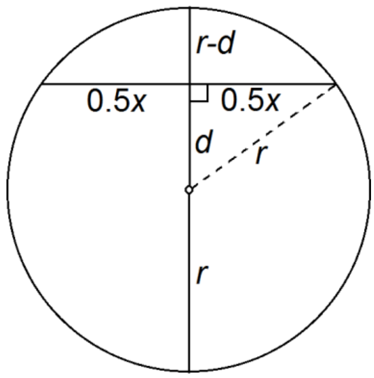


$$\begin{cases} PA \cdot PB \approx 6 \text{ mm} \cdot 20 \text{ mm} = 120 \text{ mm}^2 \\ PA´ \cdot PB´ \approx 9 \text{ mm} \cdot 13 \text{ mm} = 117 \text{ mm}^2 \end{cases}.$$

Vaihtelu tulon arvossa johtuu jälleen mittausepätarkkuudesta.

Huomautus. Sekanttilausetta käytettäessä sekantin osien tulo on laskettava **sekanttien leikkauspisteestä alkaen**. Erityisesti edellisen esimerkin ensimmäisessä kuvassa kaikki osat alkavat leikkauspisteestä P.

Esimerkki. *r*-säteisen ympyrän sisälle piirretään jänne siten, että keskipisteen etäisyys jänteestä on *d*. Laske jänteen pituus *x*.



Piirretään jännettä vastaan kohtisuora halkaisija, jolloin sekanttilauseen mukaan

$$0.5x \cdot 0.5x = (r-d)\cdot(r+d),$$

mistä saadaan

$$\underline{\underline{x = 2\sqrt{r^2-d^2}}}.$$

Saman tuloksen saa myös Pythagoraan lauseella täydentämällä säteen avulla ensin kuvaan suorakulmaisen kolmion, jonka sivut ovat r, d ja $0.5x$.

Tehtäviä

12.1 Ympyrään, jonka säde on 123 mm, piirretään 159 mm pitkä jänne, joka jakaa ympyrän kehän kahteen kaareen. Määritä **a)** kaarten asteluvut
b) ympyrän keskipisteen etäisyys jänteestä,
c) pienempää kaarta vastaava kehäkulma,
d) pienemmän kaaren sisältämä kehäkulma.

12.2 Nelikulmiosta ABCD tunnetaan sivut BC=11.111 mm ja CD=23.456 mm sekä kulmat $<$ABC=97.654º , $<$BCD=123.456º ja $<$CDA=56.544º . Voidaanko nelikulmion ympäri piirtää ympyrä? Jos ei voida, niin minkä mitan pitäisi muuttua, jotta piirtäminen onnistuisi.

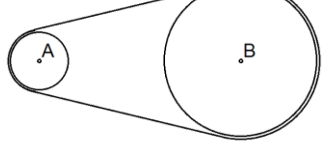
12.3 Määritä sen ympyräkaaren säde, jolta 567 mm pitkä jana näkyy **v)** 87.6 **a)** 76.5 asteen suuruisessa kulmassa.

12.4 Määritä sen tasoalueen pinta-ala, josta 34.5 mm pituinen jana näkyy kulmassa, joka on suurempi kuin **v)** 120 º **a)** 90º **b)** 55º.

12.5 Tarkastellaan ympyrää, jonka säde on 123 mm. Ympyrän ulkopuolella olevasta pisteestä P piirretään sekantti, joka leikkaa ympyrää pisteissä A ja B, joista A on lähempänä P:tä kuin B. Kuinka kaukana P on ympyrän keskipisteestä O, jos PA = 311 mm ja **v)** AB = 51 mm **a)** AB = 91 mm?

12.6 Määritä piirtämällä ne pisteet, joista 50 mm pitkä jana näkyy kulmassa **a)** 40° **b)** 90° **c)** 130° .

12.7 Määritä hihnan pituus, jos kuvan hihnapyörien säteet ovat 1.00 m ja 3.00 m sekä pyörien keskipisteiden välimatka on **v)** 6.00 m **a)** 9.00 m.



12.8 Määritä hihnapyörien keskipisteiden välimatka AB, kun hihnan pituus on 20.00 m sekä pyörien säteet $r_A = 1.00$ m ja **v)** $r_B = 2.00$ m **a)** $r_B = 1.90$ m. Huom. Tarvittava yhtälö voidaan ratkaista vain numeerisesti!

Vastauksia osan 1 tehtävien v-osioihin

1.1	$55°, 145°, 325°, 145°, 35°$	**1.2**	$\beta = \delta = 47°, \gamma = \varepsilon = 43°$
1.3	i) $125°, 55°$ ii) $145°, 35°$	**2.1**	9.92 m^2
2.2	4.03 tai 10.28	**2.4**	39.3 mm
2.5	6.437 m^2	**2.6**	37800000 km^2
2.7	0.159 m, 0.159 m	**2.8**	6.07 dm^2
2.9	1.19 m	**2.10**	50%
3.1	0.620 m, 4.84 m^2	**3.2**	0.6355 m, 0.3211 m
3.3	80.1 kg	**3.4**	4.45 m^2
3.5	0.422 dm^3	**3.6**	2.03 m
3.7	0.34 mm		

3.8 15.84 % (Vinkki: Kuution tilavuudesta on pallon ulkopuolella yhtä paljon kuin pallon tilavuudesta on kuution ulkopuolella.)

4.1	14000 m^2	**4.2**	41 mm
4.3	24.6 kg	**4.4**	0.2 m, 0.1 m^2 , 0.002 m^3, 16 kg
4.5	105, 314	**4.6**	185 mm, 296 mm
4.7	$x = 271.5$ $y = 95.6$	**5.7**	1.84 sr
5.8	2.58 sr	**5.9**	$58.5°$

6.4 $\sin\alpha$ kasvaa -1:stä $+1$:een

6.5 **v1)** $-78° + n \cdot 360°$ tai $-102° + n \cdot 360°$
v2) $\pm 21° + n \cdot 360°$ **v3)** $-42° + n \cdot 180°$

8.2	$4\cos^3 x - 3\cos x$	**8.7**	$\frac{119}{169}$
8.9	$\frac{1-\cos(10x)}{2}$	**8.10**	**v1)** $2\cos\omega$ **v2)** $\frac{1}{1+\sin\psi}$

9.1 **v1)** 2, $120°$, $-15°$ **v2)** 0.4, 10π, $\frac{5\pi}{3}$

9.3	$5\sin(4x + \frac{\pi}{2})$	**9.4**	$4.175\sin(5x + 34.28°)$
10.1	3773	**10.2**	18.45, 107.0 ja 108.6
10.3	$9.69°$ ja $80.31°$	**10.9**	$58.502°$ tai $121.498°$
10.10	$37.9°$ tai $142.1°$	**10.11**	$25.1°$

10.12 Jana *b* (Jo kolmion **b)** keskimmäisellä osakolmiolla on kaksi mahdollisuutta.)

12.3	284 mm	**12.4**	487 mm^2
12.5	357 mm	**12.7**	25.2 m
12.8	4.99 m		

Timo Ojala, Leena Ojala ja Timo Ranta

GEOMETRIA

Osa 2

Todistetaan Pythagoraan lause oikeaksi *n*-ulotteisessa avaruudessa.
Tarkastellaan *n*-ulotteisen avaruuden suorakulmaista kolmiota *OAB,* missä sivu *OA* on kohtisuorassa sivua *OB* vastaan.
Lasketaan hypotenuusan *AB* pituuden neliö vektoriopin merkinnöin

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 &= \left|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right|^2 = (\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})\bullet(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}) \\ &= \overrightarrow{OB}\bullet\overrightarrow{OB} \underbrace{-\overrightarrow{OB}\bullet\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB}}_{\text{molemmat}=0\text{ kohtisuoruuden vuoksi}} + \overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OA} \\ &= \left|\overrightarrow{OB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OA}\right|^2,\end{aligned}$$

mikä onkin kateettien neliöiden summa. **Q.E.D.**

13. AVARUUSGEOMETRIAA

13.1 Suora ja taso

Kaksi avaruuden pistettä määrittää **suoran**.

Tason kaksi suoraa voivat olla leikkaavia, yhdensuuntaisia tai sama.

Avaruudessa on myös uusi mahdollisuus: suorat ovat **ristikkäiset**, jolloin ne eivät ole yhdensuuntaiset eivätkä leikkaa toisiaan.

Kolme avaruuden pistettä, jotka eivät ole samalla suoralla, määrittävät **tason**.

Kaksi tasoa voi leikata toisensa (pitkin jotakin suoraa) tai olla yhdensuuntaisia tai samoja.

Huomaa, että taso on aina äärettömän laaja, vaikka sitä esitetäänkin monissa kuvissa suunnikkaan tai kolmion avulla.

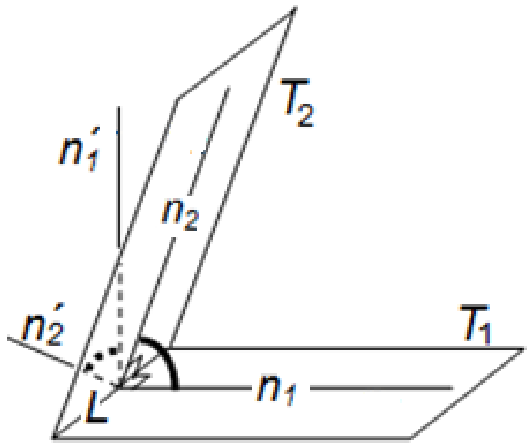
Suoran sanotaan olevan **kohtisuorassa tasoa vastaan**, jos suora on kohtisuorassa jokaista leikkauspisteen kautta kulkevaa tason suoraa vastaan.

Tällöin sanotaan, että taso on suoran **normaalitaso** ja kääntäen suora on tason **normaali**.

Jos suora on kohtisuorassa kahta leikkauspisteen kautta kulkevaa tason suoraa vastaan, niin suora on kohtisuorassa kaikkia muitakin leikkauspisteen kautta kulkevia saman tason suoria vastaan.

Kahden tason T_1 ja T_2 välinen kulma (ns. **diedrikulma**) tarkoittaa kyseisiin tasoihin piirrettävien tasojen leikkaussuoran L normaalien n_1 *ja* n_2 välistä pienempää kulmaa, joka on merkitty viereiseen kuvaan yhtenäisellä kaarella.

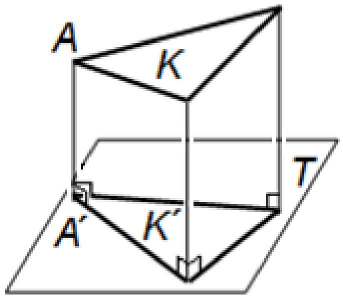
Tasojen välinen kulma on toisaalta myös yhtä suuri kuin tasojen normaalien n_1' *ja* n_2' välinen pienempi kulma, joka on merkitty samaan kuvaan katkoviivalla.



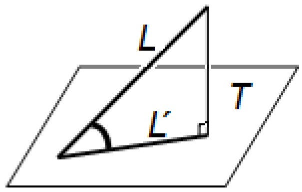
13.2 Ortogonaaliprojektio ja yleinen suuntaisprojektio

Pisteen A **ortogonaaliprojektio** (eli **kohtisuora projektio**) tasolla T tarkoittaa pisteestä A tasolle T piirretyn normaalin kantapistettä A'.

Kuvion K ortogonaaliprojektio tasolla T tarkoittaa kuvion K pisteiden ortogonaaliprojektioista muodostuvaa kuviota K'.

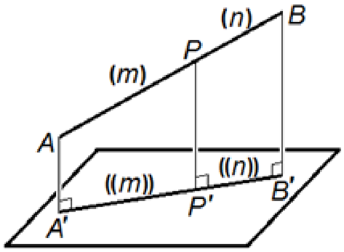


Suoran L ja tason T välinen kulma (eli suoran L **kaltevuuskulma** tason T suhteen) tarkoittaa suoran L ja suoran tasolla T olevan ortogonaaliprojektion L' välistä kulmaa.



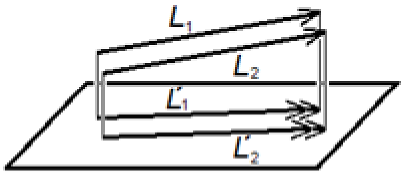
Lause. Ortogonaaliprojektiolle on voimassa tulokset:

1) Janan jakosuhde säilyy ts. jos piste P jakaa janan AB suhteessa $m:n$, niin projektiopiste P' jakaa kuvajanan $A'B'$ samassa suhteessa $m:n$.

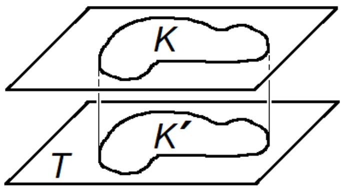


2) Suorien yhdensuuntaisuus säilyy ts. yhdensuuntaisten suorien ortogonaaliprojektiot ovat yhdensuuntaiset eli

$$L_1 \parallel L_2 \Rightarrow L_1' \parallel L_2'$$

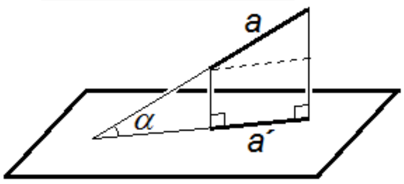


3) Kuvatason T suuntaisen tasokuvion K ortogonaaliprojektio K' on yhtenevä alkuperäisen kuvion kanssa.



4) Janan a tasolla T olevan ortogonaaliprojektion a' pituus = janan a pituus kerrottuna kaltevuuskulman kosinilla ts.

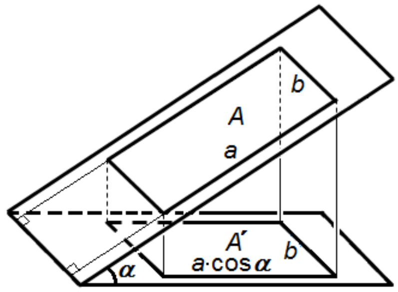
$$a' = a \cdot \cos\alpha$$



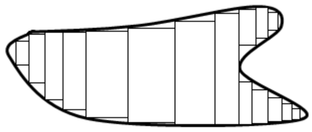
5) Jos tasokuvio projisioidaan kohtisuorasti toiselle tasolle, niin kuva-alueen pinta-ala A' = alkuperäisen tasokuvion ala A kerrottuna tasojen välisen kulman kosinilla:

$$A' = A \cdot \cos\alpha$$

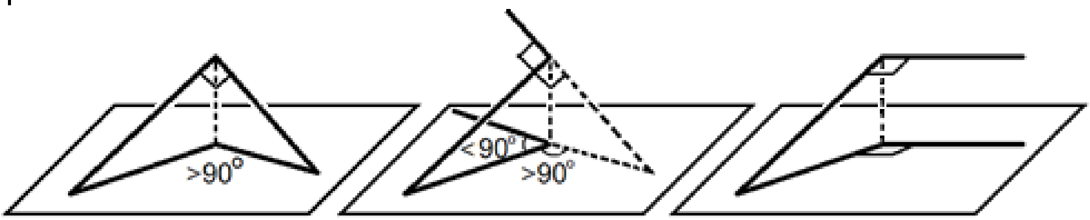
Tulos 5) on ilmeinen sellaiselle suorakulmiolle, jonka toinen sivupari on kohtisuorassa tasojen leikkaussuoraa vastaan, koska tällaisen suorakulmion toinen sivu säilyttää pituutensa ja toisen sivun pituus tulee kerrottua tasojen välisen kulman kosinilla.



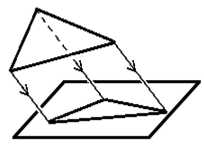
Koska jokaisen tasokuvion alaa voidaan arvioida mainitunlaisilla kapeilla suorakulmaisilla kaistaleilla, niin alaa koskeva tulos on voimassa kaikille tasokuvioille.



6) Suoran kulman ortogonaaliprojektio on
- tylppä kulma, jos suoran kulman molemmat kyljet tai molempien kylkien jatkeet leikkaavat kuvatason (todistus harjoitustehtävänä!)
- terävä kulma, jos toinen kylki ja toisen kyljen jatke leikkaavat kuvatason
- suorakulma, jos ainakin toinen kulman kyljistä on kuvatason suuntainen, koska suoran kulman äärettömän pienellä kalistuksella päädytään kumpaan tahansa edellisistä vaihtoehdoista.



Suuntaisprojektiossa kaikki kuvasäteet ovat yhdensuuntaisia (eivät siis välttämättä kohtisuorassa kuvatasoa vastaan).

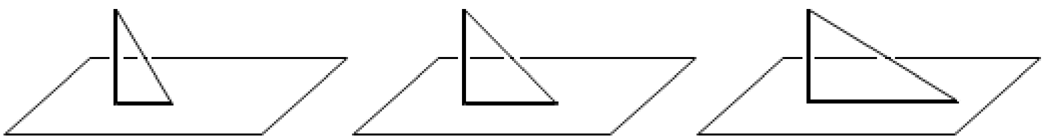


Ortogonaaliprojektio on suuntaisprojektion erikoistapaus, jossa kuvasäteet ovat kohtisuorassa kuvatasoa vastaan.

Sellaista suuntaisprojektiota, joka ei ole kohtisuora, voidaan sanoa **vinoksi suuntaisprojektioksi**.

Kaikille suuntaisprojektioille on voimassa edellisen lauseen kohdat 1-3, mutta pituuksien (ja alojen) välillä ei ole yleisessä tapauksessa yhtä yksinkertaista riippuvuutta kuin ortogonaaliprojektiossa.

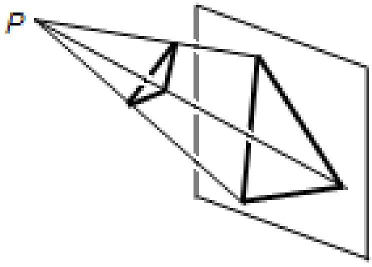
Huomautus. Suuntaisprojektiossa voi kuvajanan pituus olla pidempikin kuin alkuperäisen janan pituus, kuten auringon laskiessa lipputangon heittovarjoa maan pinnalla esittävästä kuvasarjasta ilmenee:



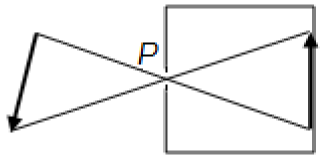
13.3 Keskusprojektio

Keskusprojektiossa kaikki kuvasäteet kulkevat saman pisteen eli **projektiokeskuksen** *P* kautta, jolloin syntyy ns. **perspektiivikuva**.

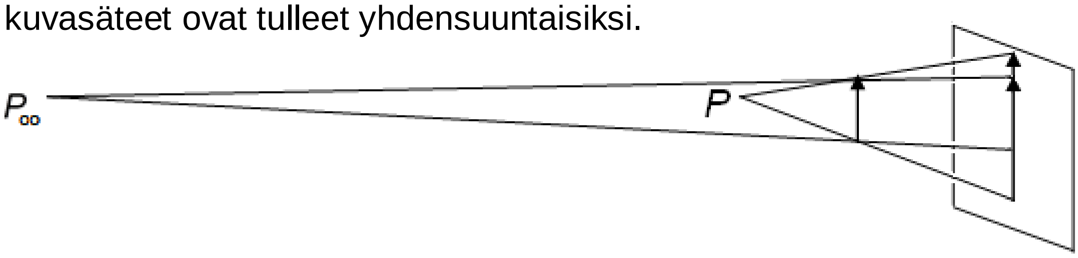
Kyseessä voi olla esimerkiksi pistemäisen valolähteen antama varjokuva tasolla.



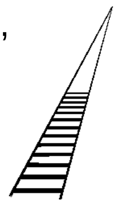
Keskusprojektio esiintyy myös esimerkiksi ns. neulanreikäkamerassa (tai vähän muuttuneena silmässä), jolloin projektiokeskus *P* sijaitseekin alkuperäisen kuvion ja sen kuvan välissä.



Suuntaisprojektiota voidaan pitää keskusprojektion sellaisena erikoistapauksena, missä projektiokeskus on siirtynyt äärettömän kauas ja tarkasteltavat kuvasäteet ovat tulleet yhdensuuntaisiksi.

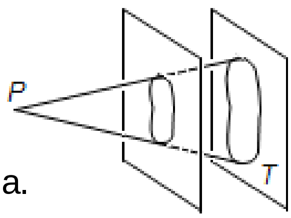


Keskusprojektiolle ei ole voimassa edellisen lauseen kohdat 1 ja 2, mikä ilmenee ajateltaessa pitkän suoran junaradan kuvaa: Siinä yhdensuuntaiset kiskot näyttävät leikkaavan horisontissa ja ratapölkkyjen väliset yhtä pitkät kiskon osat näyttävät eripituisilta.



Keskusprojektiolle edellisen lauseen kohta 3 on muutettava muotoon

3´) Kuvatason suuntaisen tasokuvion kuva keskusprojektiossa on yhdenmuotoinen alkuperäisen kuvion kanssa.



Keskusprojektioon liittyvien pituuksien ja kulmien laskeminen on yleensä varsin työlästä.

13.4 Avaruusgeometrian tehtäviä

Tyypillisessä avaruusgeometrian tehtävässä kysytään tavallisesti jonkin janan pituutta tai kulman suuruutta tai sitten jotain muuta suuretta (esimerkiksi alaa tai tilavuutta), jonka arvo saadaan pituuksien ja kulmien avulla laskettua. Tällaisen tehtävän voit usein ratkaista seuraavin välivaihein:

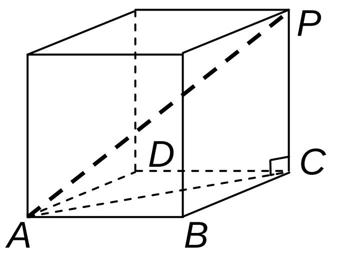
1) Piirrä tilanteesta "3-ulotteinen" mallikuva, johon merkitset tunnetut osat kiinnittäen erityistä huomiota mahdollisiin suoriin kulmiin.

2) Etsi mallikuvasta sellainen mahdollisimman helposti selvitettävä kolmio, jonka yhtenä osana määritettävä jana tai kulma on. Piirrä kyseinen kolmio erilleen ja merkitse siihen tunnetut osat. Mikäli tunnet kolmiosta kolme osaa, joista vähintään yksi on sivu, niin kolmio voidaankin jo ratkaista.

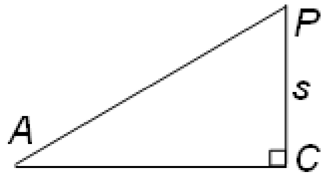
2´) Mikäli edellisessä vaiheessa löytämästäsi kolmiosta ei tunneta riittävästi osia, niin koeta selvittää, mitkä kolmion osat voidaan selvittää muiden kolmioiden avulla. Piirrä nämä kolmiot erilleen ja merkitse niihin tunnetut osat.

2´´) Mikäli uusissakin kolmioissa on liian vähän tunnettuja osia, niin näitä osia yritetään määrittää jälleen uusien kolmioiden avulla. Menettelyä jatketaan kunnes kaikista tarvittavista kolmioista voidaan määrittää riittävästi osia.

Esimerkki. Määritä kuution avaruuslävistäjän kaltevuuskulma pohjaneliön suhteen.



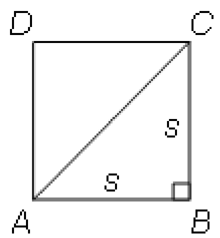
1) Piirretään kuutiosta ja sen avaruuslävistäjästä *AP* havainnollinen mallikuva. Olkoon kuution särmä *s*.
Koska janan *AP* kaltevuuskulma pohjatason suhteen saadaan janan ja sen ortogonaaliprojektion *AC* välisenä kulmana, niin kuution sisälle muodostuu suorakulmainen kolmio *PAC*.



2) Piirretään kolmio *PAC* erilleen.

2´) Koska kolmiosta *PAC* tunnetaan vain suorakulma ja kateetti $PC = s$, niin tuntemattoman kateetin *AC* ratkaisemiseksi piirretään vielä kuution pohjakin, jonka suorakulmaisista kolmioista saadaan

$$AC = s\sqrt{2}.$$

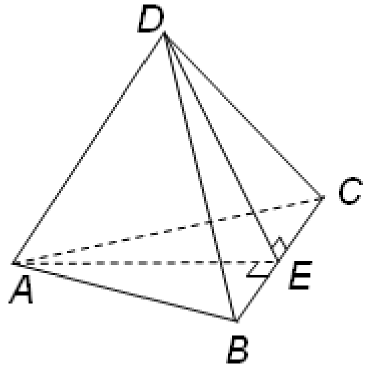


Vaiheen 2) kolmiosta saadaan lopulta

$$\tan(\sphericalangle PAC) = \frac{PC}{CA} = \frac{s}{s\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

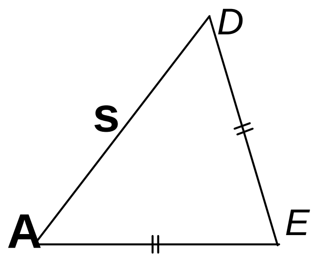
josta $\quad \sphericalangle PAC = \underline{\underline{35.3^\circ}}$

Esimerkki. Määritä säännöllisen tetraedrin (eli nelitahokkaan) tahkojen välinen diedrikulma.

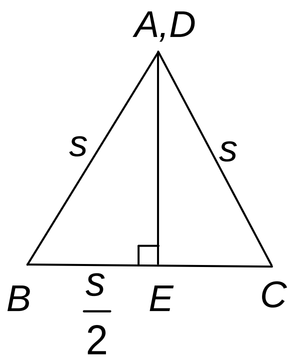


Olkoon tetraedrin särmän pituus s.

Säännöllisessä tetraedrissa kaikki neljä tahkoa ovat keskenään samanlaisia tasasivuisia kolmioita ja kaikkien tahkojen väliset diedrikulmat ovat tietenkin keskenään yhtä suuria.
Määritetään erityisesti sivutahkon *DBC* ja pohjatahkon *ABC* välinen diedrikulma.



Olkoon *E* särmän *BC* keskipiste. Koska säännöllisen tetraedrin kaikki neljä sivutahkoa ovat tasasivuisia kolmioita, niin särmän keskipiste *E* on myös tahkoihin *DBC* ja *ABC* piirrettyjen korkeusjanojen kantapiste. Näin ollen tahkojen välinen diedrikulma saadaan janojen *DE* ja *AE* välisenä kulmana kolmiosta *DEA* (katso diedrikulman määritelmä kohdasta 13.1).



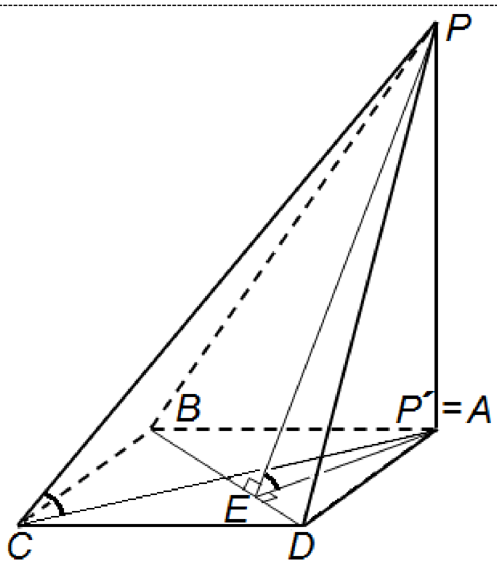
Tetraedrin tahkoista saadaan Pythagoraan lauseella

$$AE = DE = \sqrt{s^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2} = \frac{s\sqrt{3}}{2}.$$

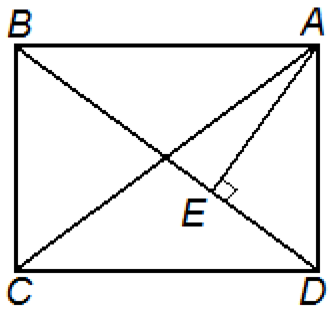
Kolmionratkaisuohjelmamme ei käsittele kolmiota, jonka sivut ovat symbolisessa muodossa. Siksi korvaammekin kolmion *DEA* sivut s, $\frac{s\sqrt{3}}{2}$ ja $\frac{s\sqrt{3}}{2}$ yhdenmuotoisen kolmion sivuilla 1, $\sqrt{3}/2$ ja $\sqrt{3}/2$, jolloin saamme $\sphericalangle DEA = \underline{\underline{70.5^\circ}}$. Kysytyn kulman voi vaihtoehtoisesti laskea kosinilauseella samasta kolmiosta *DEA,* jonka sivut tunnetaan.

Esimerkki. Tarkastellaan vaakasuorassa tasossa olevaa suorakulmiota *ABCD*, jossa $AB = 8.00\,\text{m}$ ja $AD = 6.00\,\text{m}$. Olkoon piste *P* kohtisuoraan pisteen *A* yläpuolella 18.00 metrin korkeudella. Määritä

a) sivujanan *PC* kaltevuuskulma pohjatason *ABCD* suhteen sekä
b) tasojen *PBD* ja *ABCD* välinen kulma.



Pohjan suorakulmiossa kaikki kärkikulmat ovat luonnollisesti suoria kulmia sekä vastakkaiset sivut pareittain yhtä pitkiä, joten *DC* = *AB* = 8.00 m ja *BC* = *AD* = 6.00 m.



Pystysuora suora *PA* on vaakasuoran tason *ABCD* normaali, joten *PA* on kohtisuorassa jokaista pisteen *A* kautta kulkevaa tason *ABCD* suoraa vastaan. Näin ollen myöhemmissä kuvissa erityisesti kulmat *PAC* ja *PAE* ovat suoria kulmia.

a) Janan *PC* kaltevuuskulma tason *ABCD* suhteen saadaan janan *PC* ja sen ortogonaaliprojektion *P´C=AC* välisenä kulmana *PCA* suorakulmaisesta kolmiosta *PCA.*

Ensin on kuitenkin laskettava kolmion sivu *AC*, joka saadaan pohjasuorakulmion lävistäjänä Pythagoraan lausetta käyttäen

$$AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = 10.00 \text{ m}.$$

Em. suorakulmaisesta kolmiosta *PAC* saadaan lopulta

$$\tan(\sphericalangle PCA) = \frac{PA}{AC} = \frac{18}{10} = 1.8, \quad \text{josta} \quad \sphericalangle PCA = \arctan 1.8 = \underline{\underline{60.9^\circ}}.$$

b) *BD* on tarkasteltavien tasojen *PBD* ja *ABCD* leikkaussuora. Piirretään edelliseen (vinoon) tasoon jana *PE* kohtisuoraan janaa *BD* vastaan (katso 3-ulotteinen mallikuva). Koska näin syntyvän suorankulman *PED* toinen kylki *ED* on pohjatasossa (ja siis samalla pohjatason suuntainen), niin tämän suorankulman *PED* ortogonaaliprojektio $\sphericalangle AED$ pohjatasolla on myös suorakulma (katso pykälän 13.2 olleen lauseen kohta 6). Siispä *AE* on kohtisuorassa janaa *BD* vastaan. Näin ollen tasojen *PBD* ja *ABCD* välinen diedrikulma saadaan leikkaussuoran *BD* normaalien *PE* ja *AE* välisenä terävänä kulmana.

Diedrikulma *PEA* saadaan suorakulmaisesta kolmiosta *PEA*, josta pitäisi kuitenkin ensin määrittää vielä yksi osa, esimerkiksi sivu *AE*.

Pyramidin pohjasuorakulmiossa olevan osakolmion *ABD* korkeusjanan *AE* voi laskea esimerkiksi kolmionratkaisuohjelmalla tai lausumalla kolmion alan kahdella eri tavalla:

$$\frac{1}{2} \cdot 8.00 \cdot 6.00 = \frac{1}{2} \cdot 10.00 \cdot AE,$$

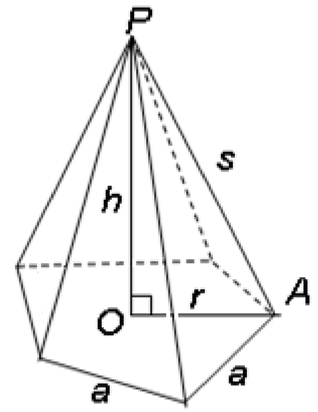
josta saadaan $AE = 4.80$.

Edellä esitetystä suorakulmaisesta kolmiosta *PEA* saadaan

$$\tan(\sphericalangle PEA) = \frac{PA}{AE} = \frac{18.00}{4.80},$$

mistä edelleen $\sphericalangle PEA = \underline{\underline{75.1^\circ}}$.

Esimerkki. Määritä suoran säännöllisen 5-sivuisen pyramidin vaipan ala, kun pyramidin korkeus on h = 222 mm ja pohjamonikulmion sivu a = 123 mm.

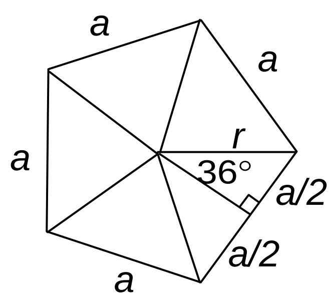


Pyramidin sivusärmä s saadaan kuvan suorakulmaisesta kolmiosta POA, kunhan vain ensin laskemme pohjan keskipisteen O etäisyyden r pohjan kärkipisteestä A.

Pohjan suorakulmaisesta kolmiosta saadaan

$$\sin\left(\frac{360^\circ}{2\cdot 5}\right)=\frac{a/2}{r} \quad\Leftrightarrow\quad r=\frac{a/2}{\sin 36^\circ}=104.63\text{ mm},$$

joten $s=\sqrt{h^2+r^2}=245.42\text{ mm}$.

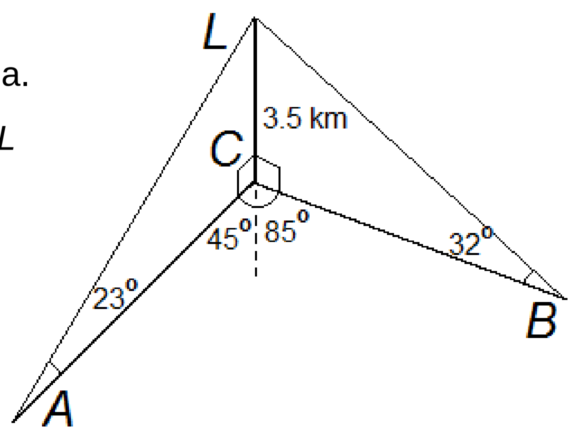


Koska pyramidin yhden sivutahkon särmät ovat s, s ja a, niin kolmionratkaisuohjelmalla tai Heronin kaavalla $A=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ saamme yhden tahkon alaksi 14611.7 mm^2.

Viiden sivutahkon yhteisalaksi saadaan 73058.5 mm^2 eli pyöristettynä $\underline{\underline{73100\text{ mm}^2}}$.

Esimerkki. Määritä henkilöiden A ja B välimatka tasaisessa hiekkaerämaassa, kun he tekevät 3,5 km korkeudessa lentävästä lentokoneesta L seuraavat havainnot: Henkilö A näkee lentokoneen tarkalleen koillisessa 23° vaakatason yläpuolella. Henkilö B näkee samanaikaisesti lentokoneen 32° vaakatason yläpuolella suunnassa, joka on 85° pohjoisesta länteen.

Olkoon C se vaakatason piste, joka sijaitsee suoraan lentokoneen alapuolella.



Suorakulmaisista kolmioista ACL ja BCL saadaan

$$AC=\frac{CL}{\tan 23^\circ}=8.245\text{ km}$$

ja

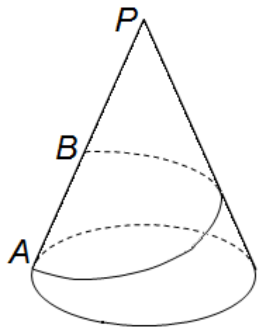
$$BC=\frac{CL}{\tan 32^\circ}=5.601\text{ km}.$$

Koska vaakatason kolmion ABC kärjessä C oleva kulma on $45^\circ+85^\circ=130^\circ$, niin joko kolmionratkaisuohjelmalla tai kosinilauseella

$$AB=\sqrt{AC^2+BC^2-2\cdot AC\cdot BC\cdot\cos\left(\sphericalangle ACB\right)}=12.598\text{ mk}=\underline{\underline{12.6\text{ km}}}.$$

Vinkki: Joissakin avaruusgeometrian tehtävissä kappaleen vaippa kannattaa levittää auki tasokuvioksi.

Esimerkki. Kuinka pitkä matka kärpäsen on vähintään kuljettava pitkin suoran ympyräkartion muotoisen sokeritopan pintaa, jos se lähtee pohjaympyrällä olevasta pisteestä A ja määränpäänä on pisteeseen A päättyvän sivuviivan PA keskipiste B. Kärpänen ei saa mennä suoraan sivuviivaa pitkin pisteestä A pisteeseen B, vaan sen on matkallaan kierrettävä kartion ympäri eli reitin pitää kulkea jokaisen sivuviivan poikki. Kartion korkeus on 456 mm ja pohjaympyrän säde a) $r_a = 123$ mm b) $r_b = 345$ mm.

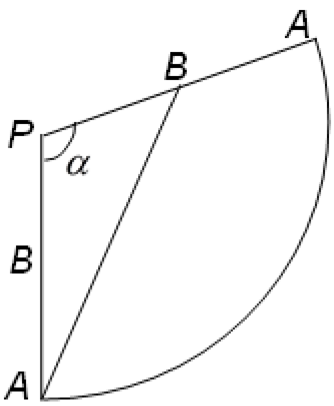


a) Koska kartion sivuviivan pituus on $s_a = \sqrt{456^2 + 123^2} = 472.298$, niin kartion vaipasta saadaan auki levittämällä 472.298 mm-säteisen ympyrän sektori, jonka keskuskulma α saadaan ehdosta

sektorin kaaren pituus $=$ kartion pohjaympyrän piiri

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi s_a = 2\pi r_a$$

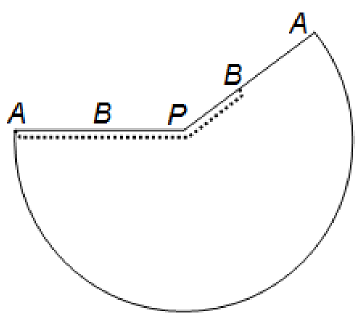
$$\Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{r_a}{s_a} \cdot 360° = 93.7544° \quad .$$



Koska suora viiva antaa kahden pisteen välisen lyhimmän etäisyyden, niin kärpäsen kannattaa kulkea aukilevitettyyn vaippaan merkittyä janaa pitkin. Reitin pituus saadaan kuvassa näkyvästä kolmiosta, jonka sivuina on sivuviiva 472.298 ja sen puolikas 236.149 . Vaikkapa kolmionratkaisuohjelmalla tai kosinilauseella saamme reitin pituudeksi 541.699 eli pyöristettynä $\underline{\underline{542\text{ mm}}}$.

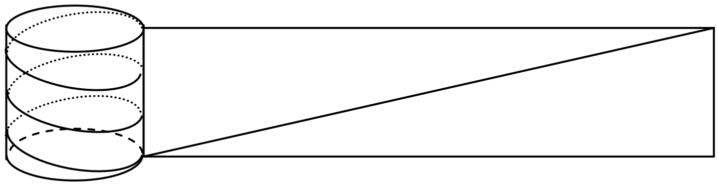
b) Kartion sivuviivan pituus on nyt $s_b = \sqrt{456^2 + 345^2} = 571.805$.
Kartion vaipasta saatavan ympyräsektorin keskuskulma on nyt

$$\beta = \frac{r_b}{s_b} \cdot 360° = 217.207° \quad .$$



Oleellista on, että sektorin keskuskulma on yli 180 astetta, jolloin a-kohdan mukainen ratkaisu ei enää tule kyseeseen. Kärpäsen kannattaakin nyt ilmeisesti kulkea aivan sivuviivan vierellä erittäin lähelle huippua ja palata saman (halkaistun) sivuviivan toista puolta takaisin.
Matkaa kertyy (äärimmäisen vähän päälle) puolitoista sivuviivaa eli
$1.5 \cdot 571.805 = 857.708 \approx \underline{\underline{858\text{ mm}}}$.

Esimerkki. Suoran ympyrälieriön korkeus on 7890 mm ja pohjan säde 345 mm. Lieriön alareunasta alkava, tasaisesti nouseva ruuviviiva päättyy yläreunaan kierrettyään lieriön ympäri kolme kertaa. Määritä ruuviviivan pituus.



”Levitetään lieriön vaippaa kolme kierrosta”, jolloin saadaan suorakulmio, jonka kanta on kolmen kierroksen pituinen. Aukilevitetty ruuviviiva nousee tämän suorakulmion alanurkasta suoraan vastakkaiseen ylänurkkaan, joten sen pituus on

$$\sqrt{7890^2 + (3 \cdot 2\pi \cdot 345)^2} = 10224.6 \approx \underline{\underline{10200\text{ mm}}}$$

Tehtäviä

13.1 Tarkastellaan suorakulmaista särmiötä, jonka pohjasärmät ovat 123 mm ja 234 mm sekä korkeus **v)** 345 mm **a)** 456 mm. Määritä särmiön avaruuslävistäjän kaltevuuskulma pohjatahkon suhteen.

13.2 Määritä kuution kahden avaruuslävistäjän välinen kulma.

13.3 Tarkastellaan suoraa ympyrälieriötä, jonka korkeus on 1350 mm ja pohjaympyrän säde 95.0 mm. Kuinka pitkä on se ruuviviiva, joka nousee alapohjan pisteestä *A* yläpohjan pisteeseen *B* kierrettyään lieriön ympäri tarkalleen **v)** 2.5 **a)** 3.5 kierrosta.

13.4 Tarkastellaan suoraa ympyräpohjaista kartiota, jonka korkeus on 234 mm ja pohjaympyrän säde **v)** 321 mm **a)** 432 mm.
Olkoon *AB* pohjaympyrän eräs halkaisija ja *P* kartion huippu. Olkoon piste *C* kartion sivuviivan *PB* keskipiste. Kuinka pitkä matka on pisteestä *A* pisteeseen *C* pitkin kartion vaippaa.

13.5 Tarkastellaan kolmisivuista pyramidia, jonka huippu *P* osuu vaakasuoran pohjan *ABC* kärkipisteen *A* yläpuolelle. Tiedetään, että *AB*=44.00, *BC*=55.00, *CA*=66.00 ja **v)** *PA*=77.00 **a)** *PA*=88.00 . Tarkastellaan sivutahkon *PBC* kärjestä *P* alkavaa keskijanaa *PE*.
- i) Määritä *PE*:n kaltevuuskulma pohjatason suhteen.
- ii) Määritä sivutahkon *PBC* ja pohjatason välinen kulma.

13.6 Tarkastellaan suoraa säännöllistä 6-sivuista pyramidia *ABCDEFP*, jonka huippu on *P*, korkeus 333 ja pohjan sivu **v)** 111 **a)** 222 .
- i) Määritä vaipan ala.
- ii) Määritä pohjan kärkipisteen *A* ja vastakkaisella puolella olevan sivuviivan *PD* keskipisteen *Q* välinen lyhin etäisyys läpi pyramidin.
- iii) Määritä lyhimmän reitin pituus pisteestä *A* pisteeseen *Q* pitkin kartion vaippaa.
- iv) Määritä lyhimmän reitin pituus pisteestä *A* pisteeseen *Q* siten, että ensin kuljetaan pitkin pohjaa ja lopuksi pitkin yhtä sivutahkoa.

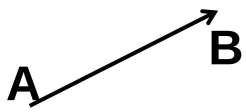
14. VEKTOREIDEN PERUSKÄSITTEITÄ

Suureet voidaan jakaa **skalaareihin** ja **vektoreihin**.

Skalaarisuureeseen liittyy pelkkä suuruus, joka voidaan ilmoittaa yhdellä luvulla ja siihen liittyvällä mittayksiköllä. Esimerkiksi janan pituus, kuvion pinta-ala, kappaleen massa ja ympäristön lämpötila ovat skalaarisuureita.

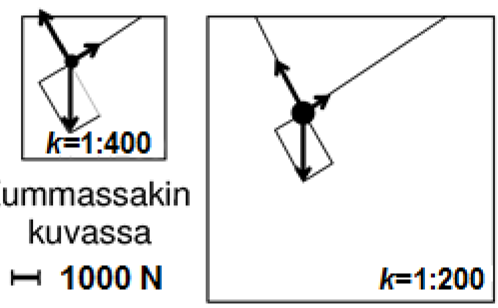
Vektorisuureeseen liittyy suuruuden lisäksi tietty suunta. Esimerkiksi siirtymä, nopeus ja voima ovat vektorisuureita. Niinpä kahden siirtymän yhteisvaikutus voidaan määrittää vasta, kun siirtymien pituuksien lisäksi tunnetaan myös niiden suunnat. Samoin voiman vaikutus voidaan selvittää vasta, kun voiman suuruuden lisäksi tunnemme sen suunnan.

Geometrisen tason tai avaruuden vektoria merkitään alku- ja loppupisteidensä avulla muodossa $\overrightarrow{AB}$ tai lyhyemmin yhdellä pikkukirjaimella esimerkiksi $\vec{a}$, $\bar{a}$ tai $\boldsymbol{a}$.



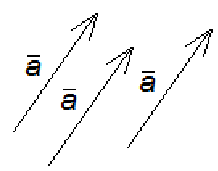
Fysiikassa suureen vektoriluonne ilmaistaan lihavoimalla suureen vakiintunut tunnus tai merkitsemällä sen päälle nuoli tai viiva. Esimerkiksi voimavektorista voidaan käyttää merkintöjä $\boldsymbol{F}$, $\vec{F}$ tai $\bar{F}$. Fysiikan vektorisuureita voidaan havainnollistaa kuvaan piirretyillä vektoreilla, joiden suunta valitaan esitettävän vektorin suuntaiseksi ja joiden pituus riippuu suureelle sovitusta mittakaavasta.

Esimerkki. Verstaan katosta köysien varassa riippuvaan kappaleeseen, jonka massa on 200 kg, vaikuttavat voimat voidaan havainnollistaa viereisillä kuvilla.



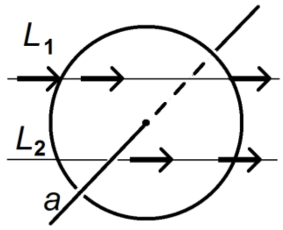
Kummassakin kuvassa esiintyy kahta eri "pituutta": Yhtäältä geometristen viivojen pituudet, jotka näkyvät kuvassa tietyissä ilmoitetuissa mittakaavoissa ja joita mitataan metrien avulla, sekä toisaalta voimien suuruudet, joita mitataan newtoneilla ja havainnollistetaan kuvaan piirrettyjen voimavektoreiden pituuksilla, vaikkakaan emme todellisuudessa näe voimia tietyn mittaisina.
Kuvaan merkitty voimavektorin pituus kuvaakin siis vain voiman suuruutta ilman, että se mitenkään liittyisi todellisen geometrisen pituuden käsitteeseen.

Kaikkia yhtä pitkiä ja samansuuntaisia vektoreita pidetään matematiikassa alkupisteestä riippumatta samana vektorina, joten matemaattinen vektori voidaan siirtää paikasta toiseen, jos sen suunta ja suuruus säilyy.

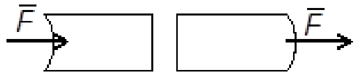


Fysiikassa asia ei aina ole näin kuten seuraavasta esimerkistä näemme.

Esimerkki. Voiman kiertovaikutus riippuu oleellisesti voiman vaikutussuorasta. Suoralla L_1 vaikuttavilla yhtä suurilla voimilla on keskenään sama vaikutus, mutta niiden kiertovaikutus akselin a suhteen eroaa oleellisesti suoralla L_2 vaikuttavien samansuuruisten voimien vaikutuksesta. *Jäykän* kappaleen mekaniikkaa tutkittaessa voima voidaankin siirtää kappaleen sisällä pitkin vaikutussuoraansa.



Elastisen kappaleen muodonmuutoksia tutkittaessa voimaa ei sen vaikutuksen muuttumatta saa kuitenkaan siirtää edes vaikutussuoraansa pitkin.



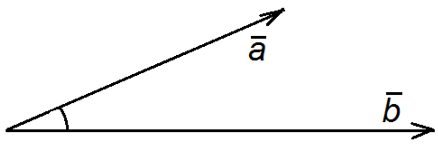
Vaikka fysiikan ja matematiikan vektoreilla on eroavuuksia, niin vektorilaskenta on erinomainen apuväline monien fysikaalistenkin ongelmien ratkaisemisessa.

Merkintöjä

Merkitään $|\overline{a}| =$ geometrisen vektorin $\overline{a}$ **pituus** tai fysikaalisen vektorin $\overline{a}$ **suuruus.** Joissakin kirjoissa vektorin $\overline{a}$ pituutta (suuruutta) sanotaan vektorin **normiksi** ja merkitään $\|\overline{a}\|$.

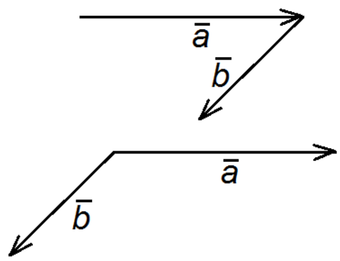
Esimerkki. Fysikaalisen voimavektorin suuruus voi olla esimerkiksi $|\overline{F}| = 8$ N**.** Geometrisista neliön lävistäjä- ja sivuvektoreista voidaan puolestaan todeta, että $|\overline{d}| = |\overline{s}|\sqrt{2}$ tai vaikkapa $|\overline{s}| = 12$ mm .

Vektoreiden $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ välistä (pienempää) **kulmaa** merkitään $\measuredangle(\overline{a},\overline{b})$, *kun vektorit on siirretty alkamaan samasta pisteestä.*



Esimerkki. Viereisessä kuvassa vektoreiden $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ välinen kulma ei ole 45°, vaikka siltä ehkä ensin vaikuttaa.

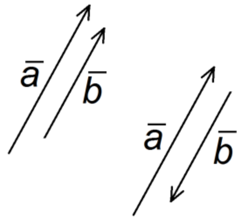
Koska vektoreiden välistä kulmaa määritettäessä vektorit on siirrettävä alkamaan samasta pisteestä, niin vektoreiden välinen kulma onkin noin 135°.



Vektoreiden $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ **yhdensuuntaisuus** $\overline{a} \parallel \overline{b}$ käsittää kaksi eri mahdollisuutta:

$\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$ eli vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat **samansuuntaiset** ts. $\measuredangle(\overline{a},\overline{b}) = 0$.

$\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$ eli vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat **vastakkaissuuntaiset** ts. $\measuredangle(\overline{a},\overline{b}) = 180°$.



Huomautus. Vektorin $\overline{a}$ suuntainen vektori tarkoittaa joissakin yhteyksissä vektorin $\overline{a}$ kanssa samansuuntaista vektoria ja joissakin toisissa yhteyksissä vektorin $\overline{a}$ kanssa yhdensuuntaista vektoria. Mikäli sekaantumisen vaara on olemassa, niin on käytettävä pidempiä yksikäsitteisiä ilmaisuja.

Vektoria, jonka pituus on yksi, sanotaan **yksikkövektoriksi**.

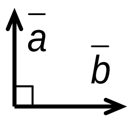
Vektorin $\overline{a}$ suuntaista yksikkövektoria merkitään $\overline{a}^0$.

Se toteuttaa ehdot $\overline{a}^0 \uparrow\uparrow \overline{a}$ ja $\left|\overline{a}^0\right| = 1$.

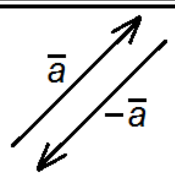
Sanonta "vektorin $\overline{a}$ suuntainen yksikkövektori" tarkoittaa siis vektorin $\overline{a}$ kanssa samansuuntaista yksikkövektoria (eikä yleisempää vektorin $\overline{a}$ kanssa yhdensuuntaista yksikkövektoria).

Merkintä $\overline{a}^0$ perustuu algebrasta tuttuun lukuja koskevaan laskulakiin $a^0 = 1$, vaikka kyseessä ei nyt olekaan vektorin potenssi.

Jos $\measuredangle(\overline{a},\overline{b}) = 90°$, niin sanotaan, että vektori $\overline{a}$ on **kohtisuorassa** vektoria $\overline{b}$ vastaan ja merkitään $\overline{a} \perp \overline{b}$.



Vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat toistensa **vastavektoreita**, jos $|\overline{a}| = |\overline{b}|$ ja $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$. Vektorin $\overline{a}$ vastavektoria merkitään luonnollisella tavalla $-\overline{a}$.



Vektoria, jonka pituus on nolla, sanotaan **nollavektoriksi** $\overline{0}$.

Koska nollavektorilla ei ole mitään tiettyä suuntaa, niin nollavektorin ja jonkin toisen vektorin välinen kulma ei ole määritelty.

Vektorin komponentteihin jaon yhteydessä pidämme kuitenkin nollavektoria annetun vektorin suuntaisena (tai sitä vastaan kohtisuorana) komponenttina, jos etsityn kaltaista, nollavektorista eroavaa komponenttivektoria ei ole.

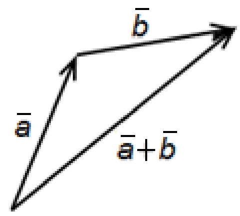
15. VEKTOREIDEN PERUSLASKUTOIMITUKSET

Määritelmä. Jos vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat yhtä pitkät ja samansuuntaiset, niin ne ovat **samat eli identtiset eli yhtä suuret** ja merkitään $\overline{a} = \overline{b}$.

Sanonta "vektorit ovat yhtä suuret" on sikäli kuitenkin huono, että se tarkoittaa usein vain vektoreiden pituuksien (suuruuksien) yhtäsuuruutta ja vektorit voivat olla erisuuntaisetkin.

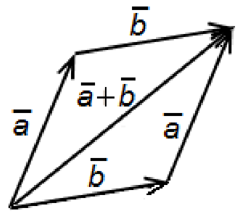
Määritelmä. Vektoreiden $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ **summa** $\overline{a} + \overline{b}$ tarkoittaa vektoria, joka alkaa vektorin $\overline{a}$ alkupisteestä ja päättyy vektorin $\overline{b}$ loppupisteeseen, kun vektorit on asetettu toistensa jatkeiksi yhteenlaskuun merkityssä järjestyksessä.

Vektoreiden summaa sanotaan **resultantiksi** ja yhteenlaskettavia summan **komponenteiksi.**

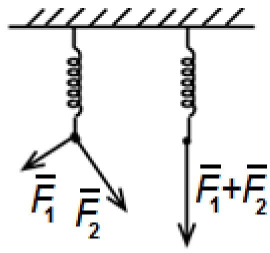


Huomautus. Vektoreiden summa kuvaa perättäisten siirtymien lopputulosta: Jos näet kappale siirtyy ensin vektorin $\overline{a}$ verran ja sitten vektorin $\overline{b}$ verran, niin kokonaissiirtymää edustaa vektoreiden $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ edellä määritelty summa.

Vektoreiden summa voidaan määritellä myös sen suunnikkaan lävistäjänä, jonka sivuvektoreina ovat yhteenlaskettavat vektorit.
Suunnikkaan ominaisuuksien perusteella vektorisumma noudattaa vaihdantalakia ts. $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$

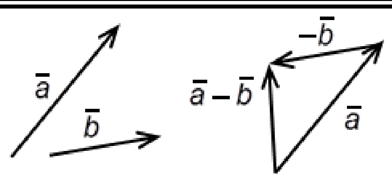


Huomautus. Kokeellisesti on helppo todeta, että kahdella samanaikaisesti vaikuttavalla voimalla $\overline{F_1}$ ja $\overline{F_2}$ on sama yhteisvaikutus kuin yhdellä voimalla, joka on määräytynyt em. suunnikassäännöllä.



Vektoreiden **erotus** on turvallisinta määritellä vastavektorin lisäämisenä:

Määritelmä. $\overline{a} - \overline{b} = \overline{a} + (-\overline{b})$.



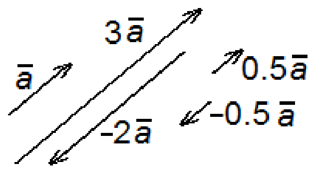
Vektorin kertominen luvulla (skalaarilla) määritellään seuraavasti:

Määritelmä. Olkoon t mielivaltainen reaaliluku ja $\bar{a}$ vektori. Silloin tulo $t\bar{a}$ on vektori, joka toteuttaa seuraavat ehdot

1) $|t\bar{a}| = |t||\bar{a}|$

2) $\begin{cases} t\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{a}\ , & \text{jos } t > 0 \\ t\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{a}\ , & \text{jos } t < 0 \end{cases}$.

Esimerkki. Viereisessä kuvassa havainnollistetaan annetun vektorin $\bar{a}$ kertomista reaaliluvulla muutamassa erikoistapauksessa.



Huomautus. Kertomerkkiä ei ole tapana käyttää käsinkirjoitetussa tai painetussa tekstissä, kun luvulla kerrotaan vektori. Monet apuvälineet lisäävät kertomerkin kuitenkin selvyyden vuoksi.

Huomautus. Määritelmän ehdossa 1) pystyviivat tarkoittavat kahta eri asiaa: reaaliluvun itseisarvoa ja vektorin pituutta. Kyseinen ehto olisi selvempi, jos pituus merkittäisiin normina käyttäen kaksinkertaisia pystyviivoja:

$$\|t\bar{a}\| = |t|\,\|\bar{a}\| \ .$$

Aivan vastaavasti joissakin ohjelmissa ja laskimissa funktio abs tarkoittaa sekä luvun itseisarvoa että vektorin pituutta, kun taas toisissa ohjelmissa ja laskimissa (esimerkiksi TI) on näiden laskemiseksi eri funktiot abs ja norm .

Määritelmä. **Vektori jaetaan reaaliluvulla** kertomalla se käänteisluvulla:

$$\frac{\bar{a}}{t} = \frac{1}{t}\,\bar{a} \ .$$

Lause. Vektorin suuntainen yksikkövektori saadaan jakamalla vektori pituudellaan.

Todistus: Riittää osoittaa, että vektorin $\bar{a}\,/\,\|\bar{a}\|$ pituus on 1.

$$\left\|\frac{\bar{a}}{\|\bar{a}\|}\right\| = \left\|\frac{1}{\|\bar{a}\|}\cdot\bar{a}\right\| = \left|\frac{1}{\|\bar{a}\|}\right|\cdot\|\bar{a}\| = \frac{1}{\|\bar{a}\|}\cdot\|\bar{a}\| = 1$$

Seuraava lause on ilmeisesti voimassa nollavektorista eroaville vektoreille $\overline{a}$ ja $\overline{b}$.

Lause. Vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat yhdensuuntaiset
$\Leftrightarrow$ on olemassa sellainen luku *t*, että $\overline{a} = t\,\overline{b}$.

Vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat samansuuntaiset
$\Leftrightarrow$ on olemassa sellainen positiivinen luku *t*, että $\overline{a} = t\,\overline{b}$.

Vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat vastakkaissuuntaiset
$\Leftrightarrow$ on olemassa sellainen negatiivinen luku *t*, että $\overline{a} = t\,\overline{b}$.

Huomautus. Kaikki edellä määritellyt vektoreiden peruslaskutoimitukset noudattavat algebrasta tuttuja lukujen laskulakeja.

Niinpä *vektoreiden yhteen- ja vähennyslaskua sekä skalaarilla kertomista* sisältävien lausekkeiden sieventäminen ja yhtälöiden ratkaiseminen tapahtuu kuten vastaavien reaalilukuja koskevien lausekkeiden ja yhtälöiden käsittelеminenkin.

Samoin seuraavien esimerkkien mukaiset vektoreiden yhteen- ja vähennyslaskua sekä skalaarilla kertomista sisältävät vektorilausekkeet voidaan sieventää ja vektoriyhtälöt ratkaista kehittyneellä laskimellakin jättämällä tarkoituksellisesti vektoriviivat syötteeseen merkitsemättä ja ajattelemalla vektoriviivat laskimen antamaan vastaukseen.

Esimerkki. $3(2\overline{a}+4\overline{b}) - \dfrac{\overline{a}-4\overline{b}}{2} = 6\overline{a}+12\overline{b}-(0.5\overline{a}-2\overline{b}) = \underline{\underline{5.5\overline{a}+14\overline{b}}}$

Esimerkki. Ratkaistaan tuntematon vektori $\overline{x}$ alla olevasta yhtälöstä algebran tavallisia laskusääntöjä käyttäen:

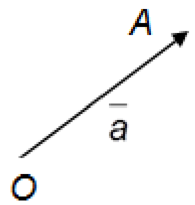
$$2(3\overline{x}-\overline{a}) = 3\overline{x}+4\overline{b} \quad\Leftrightarrow\quad 6\overline{x}-2\overline{a} = 3\overline{x}+4\overline{b} \quad\Leftrightarrow\quad 6\overline{x}-3\overline{x} = 2\overline{a}+4\overline{b}$$

$$\Leftrightarrow\quad 3\overline{x} = 2\overline{a}+4\overline{b} \quad\Leftrightarrow\quad \overline{x} = \underline{\underline{\frac{2\overline{a}+4\overline{b}}{3}}} = \underline{\underline{\frac{2}{3}\overline{a}+\frac{4}{3}\overline{b}}}$$

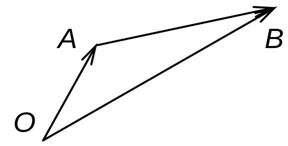
Huomautus. Vektorin ja luvun summaa tai erotusta ei määritellä, ei myöskään minkään lausekkeen jakamista vektorilla. Niinpä lausekkeita $\overline{a}+3$, $\dfrac{3}{\overline{a}}$, $\dfrac{\overline{a}}{\overline{b}}$ ei ole määritelty, joten niitä ei saisi edes kirjoittaa näkyviin puhumattakaan siitä, että lausekkeita voisi jotenkin muokata.

Määritelmä. Origosta O pisteeseen A piirrettyä vektoria $\overrightarrow{OA}$ sanotaan pisteen A **paikkavektoriksi**.

Pisteen paikkavektoria merkitään usein vastaavalla pikkukirjaimella, esimerkiksi $\overrightarrow{OA} = \bar{a}$.



Koska kuvan mukaisesti $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$, niin $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. Näin olemme saaneet tärkeän tuloksen:



Lause. Kahden pisteen välinen vektori saadaan vähentämällä loppupisteen paikkavektorista alkupisteen paikkavektori

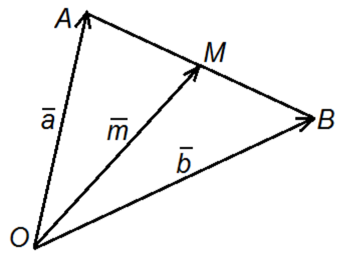
$$\boxed{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}}$$

Esimerkki. Lausutaan janan AB keskipisteen M paikkavektori päätepisteiden paikkavektoreiden avulla.

Kuvan mukaisesti saadaan

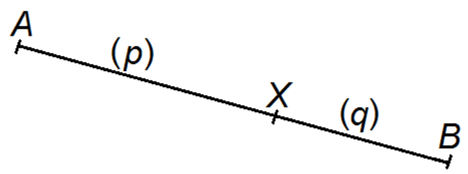
$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{\overrightarrow{AB}}{2} = \overrightarrow{OA} + \frac{\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}}{2} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}.$$

Tulos kannattaa muistaa seuraavassa muodossa:



Lause. Janan keskipisteen paikkavektori on päätepisteiden paikkavektoreiden keskiarvo.

Määritelmä. Sanotaan, että janan AB **piste X jakaa janan AB sisäpuolisesti suhteessa $p:q$**, jos $\dfrac{AX}{XB} = \dfrac{p}{q}$.

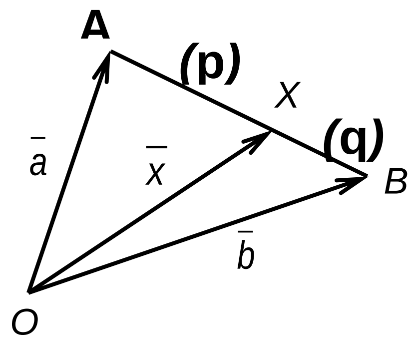


Huomautus. Jakosuhdetta ilmoitettaessa janan päätepisteiden mainitsemisjärjestys liittyy janan osien järjestykseen:

Määritelmässä mainittu piste X jakaa janan BA (vastakkaiseen suuntaan kuin edellä luettuna) suhteessa $q:p$, sillä $\dfrac{BX}{XA} = \dfrac{q}{p}$.

Esimerkki. Esitetään pisteen X paikkavektori janan AB päätepisteiden paikkavektoreiden avulla, jos piste X jakaa janan AB sisäpuolisesti suhteessa $p:q$.

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AX} = \overrightarrow{OA} + \frac{p}{p+q}\overrightarrow{AB}$$
$$= \overrightarrow{OA} + \frac{p}{p+q}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$$
$$= \frac{(p+q)\overrightarrow{OA} + p(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})}{p+q}$$
$$= \frac{q\overrightarrow{OA} + p\overrightarrow{OB}}{q+p} = \frac{q\bar{a} + p\bar{b}}{q+p}$$



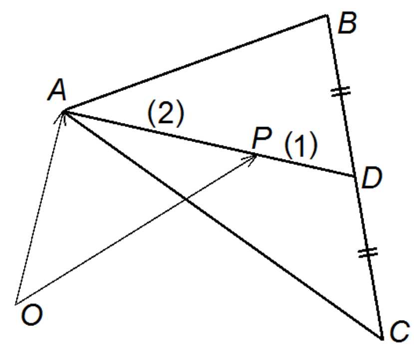
Saman tuloksen saa tietenkin myös kulkemalla toista kautta

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BX} = \overrightarrow{OB} + \frac{q}{p+q}\overrightarrow{BA} = \ldots$$

Esimerkin lopputulos voidaan esittää sanallisesti muodossa:

Lause. Janan sisäpuolisen jakopisteen paikkavektori on päätepisteiden paikkavektoreiden painotettu keskiarvo, painoina jakosuhdetta ilmoittavat luvut "käänteisessä" järjestyksessä.

Esimerkki. Määritä homogeenisen kolmiolevyn painopisteen paikkavektori kärkipisteiden A, B ja C paikkavektoreiden lausekkeena.



Kolmiolevyn painopiste sijaitsee keskijanojen leikkauspisteessä P, joka jakaa kaikki keskijanat (myös AD:n) suhteessa 2:1. Niinpä kuvan mukaan

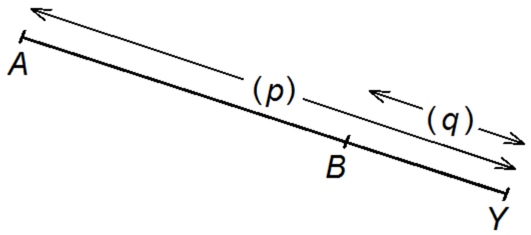
$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$$
$$= \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}) = \bar{a} + \frac{2}{3}(\frac{\bar{b}+\bar{c}}{2} - \bar{a}) = \frac{\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}}{3}$$

Tämä tulos voidaan esittää sanallisesti seuraavassa muodossa:

Lause. Homogeenisen kolmiolevyn painopisteen paikkavektori on kärkipisteiden paikkavektoreiden keskiarvo.

Määritelmä. Sanotaan, että janan AB jatkeella oleva **piste** Y **jakaa janan** AB **ulkopuolisesti suhteessa** $\boldsymbol{p:q}$, jos

$$\frac{YA}{YB} = \frac{p}{q}.$$



Esimerkki. Määritelmän viereisessä kuvassa
- piste Y jakaa janan AB ulkopuolisesti suhteessa 3:1
- piste Y jakaa janan BA ulkopuolisesti suhteessa 1:3

Tehtäviä

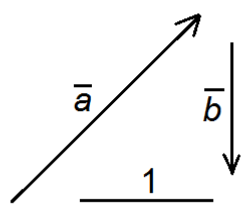
15.1 Määritä piirtämällä ja laskemalla vektoreiden $\bar{a} - \bar{b}$ ja $2\bar{a} + 3\bar{b}$ pituudet, kun $|\bar{a}| = 3.45$, $|\bar{b}| = 2.34$ ja $\sphericalangle(\bar{a}, \bar{b})$ on **v)** $56.7°$ **a)** $76.5°$

15.2 Tarkastellaan kolmiota ABC, jonka sivut ovat $AB = 56$ mm, $BC = 67$ mm ja $CA = 78$ mm. Määritä joko kolmionratkaisuohjelmaa hyväksikäyttäen tai piirtämällä ja mittaamalla **v)** $\sphericalangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ **a)** $\sphericalangle(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$.

15.3 Tarkastellaan x-akselin pisteitä $O(x = 0)$ ja $A(x = 10)$. Määritä se piste, joka jakaa janan i) OA ii) AO sisäpuolisesti suhteessa **v)** $1:3$ **a)** $4:1$.

15.4 Olkoon O origo ja kolmion ABC kärkipisteiden paikkavektorit olkoot $\bar{a}$, $\bar{b}$ ja $\bar{c}$. Olkoon piste P janan OA keskipiste. Jakakoon piste Q janan AB sisäpuolisesti suhteessa **v)** 2:5 **a)** 3:1. Jakakoon piste R janan BC ulkopuolisesti suhteessa 3:2. Piirrä tilanteesta periaatekuva. Lausu em. paikkavektoreiden avulla vektorit $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$, $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ ja $\overrightarrow{RQ}$.

15.5 Olkoot $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ kuvan mukaiset vektorit ja olkoon yksikkö kuvaan merkityn mittainen.
Seuraavassa on joukko lausekkeita. Vedä viiva niiden lausekkeiden yli, jotka eivät ole määriteltyjä.
Jos lauseke on vektori, niin piirrä se likimääräisesti.
Jos lauseke on skalaari, niin laske sen likiarvo.



v) $\bar{a} + 2\bar{b}$, $|\bar{a}|\bar{b}$, $\dfrac{|\bar{b}|}{\bar{a}}$, $|\bar{a}||\bar{b}|$, $|\bar{a}| + |\bar{b}|$, $\dfrac{\bar{a}}{2|\bar{a}^0|}$

a) $|\bar{a}| + \bar{b}$, $|2|\bar{b}$, $1 + |\bar{a}|$, $3 - \bar{a}$, $\dfrac{\bar{a}}{\bar{b}}$, $|\bar{a}|\bar{b} + |\bar{b}|\bar{a}$

15.6 Ratkaise sekä käsin että laskinta hyödyntäen vektori $\overline{x}$ yhtälöstä
v) $3(\overline{x}+\overline{a})-\overline{b}=5(\overline{x}-2\overline{b})+\overline{a}$ **a)** $2(3\overline{x}-2\overline{a})+4\overline{b}=2\overline{a}-3(\overline{x}+\overline{b})$

15.7 Ratkaise sekä käsin että laskinta hyödyntäen vektorit $\overline{x}$ ja $\overline{y}$ yhtälöparista
v) $\begin{cases} 3\overline{x}+\overline{y}=\overline{a}+2\overline{b} \\ 2\overline{x}-\overline{y}=4\overline{a}-3\overline{b} \end{cases}$ **a)** $\begin{cases} 2\overline{x}-3\overline{y}=4\overline{a}+5\overline{b} \\ \overline{x}+\overline{y}=2\overline{a}-\overline{b} \end{cases}$.

15.8 Tarkastellaan suunnikasta *ABCD*, jonka kolmen ensin mainitun kärkipisteen paikkavektorit ovat $\overline{a}$, $\overline{b}$ ja $\overline{c}$. Piirrä kuva. Määritä pisteen *D* paikkavektori tunnettujen vektoreiden lausekkeena. Määritä myös suunnikkaan lävistäjien leikkauspisteen paikkavektori.

15.9 Olkoot $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ suunnikkaan *ABCD* kahden ensin mainitun kärkipisteen paikkavektorit. Olkoon $\overline{e}$ suunnikkaan lävistäjien leikkauspisteen *E* paikkavektori. Määritä pisteen **v)** *C* **a)** *D* paikkavektori em. paikkavektoreiden avulla.

15.10 Olkoon *P* homogeenisen kolmiolevyn *ABC* painopiste. Lausu kärkipisteiden paikkavektoreiden $\overline{a}$, $\overline{b}$ ja $\overline{c}$ avulla seuraavat lausekkeet
v) $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP}$ **a)** $\overrightarrow{PO}$, AC, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$

15.11 Olkoot pisteiden *A*, *B* ja *C* paikkavektorit $\overline{a}$, $\overline{b}$ ja $\overline{c}$. Määritä näiden paikkavektoreiden lausekkeina sellaisten pisteiden *X*, *Y* ja *Z* paikkavektorit, jotka toteuttavat ehdot
v) $\overrightarrow{AX}+\overrightarrow{BX}+\overrightarrow{CX}=\overline{0}$ **a)** $\overrightarrow{YA}+2\overrightarrow{YB}+3\overrightarrow{YC}=\overline{0}$
b) $\overrightarrow{AZ}+2\overrightarrow{ZB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$.

15.12 Olkoot pisteiden *A* ja *B* paikkavektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$. Jakakoon piste *C* janan *AB* sisäpuolisesti suhteessa $p:1$ ja olkoon *D* sellainen piste, että $\overrightarrow{AD}=p\overline{b}$, missä **v)** $p=3$ **a)** $p=2$. Piirrä tilanteesta havainnollinen mallikuva ja määritä paikkavektoreiden $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ lausekkeina vektorit $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{OC}$ ja $\overrightarrow{OD}$. Mitä voit päätellä pisteiden *O, C* ja *D* sijainnista?

15.13 Olkoon **v)** $n=2$ **a)** $n=3$**.** Olkoot pisteiden *A, B* ja *C* paikkavektorit $\overline{a}$, $\overline{b}$ ja $n\overline{b}$. Olkoon *P* janan *AB* keskipiste. Jakakoon *Q* janan *AC* sisäpuolisesti suhteessa 1:*n*. Piirrä kuva. Määritä pisteiden *P* ja *Q* paikkavektorit tunnettujen vektoreiden avulla. Osoita, että piste *P* on janalla *OQ*. Missä suhteessa *P* jakaa janan *OQ*?

16. TASOVEKTOREISTA

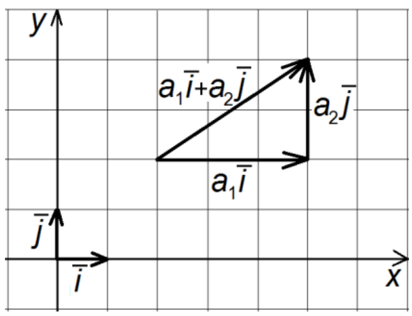
Tämän luvun jokaisessa esimerkissä tarkastellaan samassa tasossa olevia vektoreita. Tarkasteltavaan tasoon on laskusuoritusten mahdollistamiseksi jo valmiiksi sijoitettu tuttu suorakulmainen *xy*-koordinaatisto.

Käsin suoritettujen laskujen lisäksi useimmat näistä tasotehtävistä on havainnollisuuden vuoksi ratkaistu myös piirtämällä tilanteesta mittatarkka kuva. Koska laskennollinen ratkaisu on kuitenkin kolmiulotteisen avaruuden tehtävissä useimmiten ainoa mahdollinen, niin tasotehtävätkin kannattaa heti opetella laskemaan kunnollisin merkinnöin, joita voi käyttää myös laskin- ja tietokoneratkaisussa.

Apuvälineiden käyttöön perehdymme kuitenkin vasta kolmiulotteisen avaruuden vektoritehtävissä.

16.1 Tasovektorin komponenttiesitys

Olkoot $\bar{i}$ ja $\bar{j}$ positiivisten *x*- ja *y*-akselien suuntaiset yksikkövektorit.



Jokainen *xy*-tason vektori $\bar{a}$ voidaan ilmeisesti esittää yksikäsitteisesti muodossa $\bar{a} = a_1\bar{i} + a_2\bar{j}$, missä kertoimet a_1 ja a_2 ovat sopivat reaaliluvut.

Edellä ollut vektorin esitys voidaan lyhentää muotoon

$$\bar{a} = a_1\bar{i} + a_2\bar{j} = [a_1, a_2] \ .$$

Useimmat laskimet ja tietokoneohjelmat käytävät tätä lyhyempää ja apuvälineisiin helpommin kirjoitettavaa esitystä.

Molempia edellä olleita vektorin esityksiä sanotaan vektorin **komponenttiesityksiksi**, koska kummassakin vektori on jaettu kahden komponentin summaksi, vaikka jälkimmäisessä lyhennystavassa yhteenlaskua ei kirjoitetakaan selvästi näkyviin.

Koska vektoreiden yhteen- ja vähennyslasku sekä skalaarilla kertominen noudattavat algebrasta tuttuja laskulakeja, niin luonnollisin merkinnöin

$$\bar{a} + \bar{b} = (a_1\bar{i} + a_2\bar{j}) + (b_1\bar{i} + b_2\bar{j}) = (a_1 + b_1)\bar{i} + (a_2 + b_2)\bar{j}$$
$$\bar{a} - \bar{b} = (a_1\bar{i} + a_2\bar{j}) - (b_1\bar{i} + b_2\bar{j}) = (a_1 - b_1)\bar{i} + (a_2 - b_2)\bar{j}$$
$$t\bar{a} = t(a_1\bar{i} + a_2\bar{j}) = ta_1\bar{i} + ta_2\bar{j} \ .$$

Nämä tulokset esitetään seuraavassa lauseessa selvemmässä muodossa.

Lause.

$$[a_1, a_2] + [b_1, b_2] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2]$$
$$[a_1, a_2] - [b_1, b_2] = [a_1 - b_1, a_2 - b_2]$$
$$t[a_1, a_2] = [ta_1, ta_2]$$

ts. vektoreiden peruslaskutoimitukset suoritetaan komponenteittain.

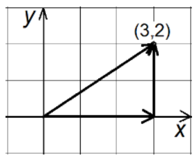
Esimerkki. $2[1,2] + 3[2,1] - [2,2] = [2\cdot 1, 2\cdot 2] + [3\cdot 2, 3\cdot 1] - [2,2]$

$$= [2,4] + [6,3] - [2,2] = [2+6-2, 4+3-2] = [6,5]$$

Osan välivaiheista voi halutessaan ohittaa.

Esimerkki. Pisteen $A(3,2)$ paikkavektori on

$$\overrightarrow{OA} = 3\bar{i} + 2\bar{j} = [3,2].$$



Yleisestikin on voimassa:

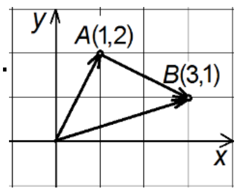
Lause. Pisteen $P(x, y)$ paikkavektori saadaan korvaamalla pisteen koordinaatti-esityksen kaarisulut vektorin komponenttiesityksen hakasuluilla:

$$\overrightarrow{OP} = [x, y]$$

Esimerkki. Laske pisteiden $A(1,2)$ ja $B(3,1)$ välinen vektori.

Koska $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$, niin $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [3,1] - [1,2] = \underline{\underline{[2,-1]}}$.

Jo aiemmin olemme todenneet tässäkin käytetyn tuloksen: Kahden pisteen välinen vektori saadaan vähentämällä loppupisteen paikkavektorista alkupisteen paikkavektori.



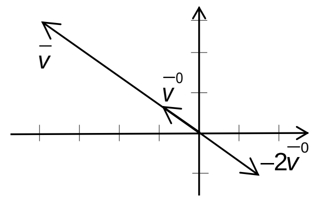
Koska origosta alkavan vektorin $\bar{a} = [a_1, a_2]$ pituus on yhtä suuri kuin kyseisen vektorin loppupisteen $A(a_1, a_2)$ etäisyys alkupisteestä $O(0,0)$, niin saamme Pythagoraan lausetta soveltaen seuraavan yleisen tuloksen.

Lause. Vektorin $\bar{a} = a_1\bar{i} + a_2\bar{j} = [a_1, a_2]$ pituus on $|\bar{a}| = \sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2}}$.

Esimerkki. Määritä vektorin $\bar{a} = [4,3]$ suuntainen yksikkövektori $\bar{a}^0$.
Koska vektorin suuntainen yksikkövektori saadaan jakamalla vektori pituudellaan, niin

$$\bar{a}^0 = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|} = \frac{[4,3]}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = [0.8, 0.6].$$

Esimerkki. Määritä vektorille $\overline{v} = [-4,3]$ vastakkaissuuntainen vektori $\overline{u}$, jonka pituus on 2.



Koska $\left|\overline{v}\right| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5$, niin etsitty vektori on

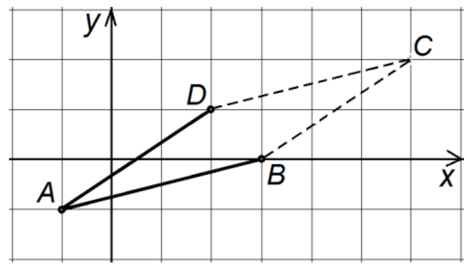
$$\overline{u} = -2\,\overline{v}^0 = -2\,\frac{\overline{v}}{\left|\overline{v}\right|} = -2\,\frac{[-4,3]}{5} = \underline{\underline{[1.6,-1.2]}}$$

Esimerkki. Määritä suunnikkaan $A(-1,-1)B(3,0)CD(2,1)$ tuntematon kärkipiste.

Koska suunnikaan vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkät ja yhdensuuntaiset, niin voimme laskea pisteen C paikkavektorin

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OB} + (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA})$$
$$= [3,0] + [2-(-1), 1-(-1)] = [6,2]\ ,$$

josta nähdään, että $C = (6,2)$.



Edellisestä esimerkistä kannattaa muistaa seuraava usein sovellettava ohje:

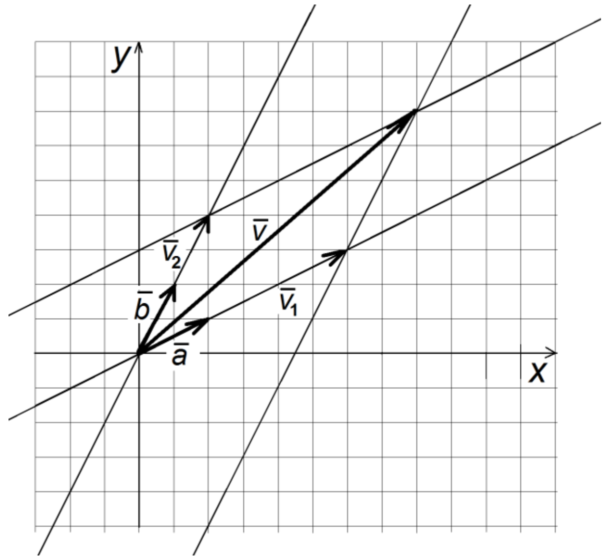
Ohje. Pisteen määrittämiseksi kannattaa usein laskea pisteen paikkavektori, josta välittömästi saadaan pisteen koordinaatit.

Huomaa, että pistettä ei saada suoraan minkään laskutoimituksen tuloksena, vaan laskut kohdistuvat vektoreihin, joita käyttäen lasketaan pisteen paikkavektori. Tästä voidaan sitten päätellä pisteen koordinaatit.

Esimerkki. Jaa vektori $\overline{v} = [8,7]$ kahteen komponenttiin, jotka ovat vektoreiden $\overline{a} = [2,1]$ ja $\overline{b} = [1,2]$ suuntaisia.

Graafinen ratkaisu. Sijoita kaikki annetut vektorit alkamaan origosta. Piirrä sitten vektorin $\overline{v}$ päätepisteiden kautta vektoreiden $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ suuntaiset (pitkät!) suorat, jolloin taso jakautuu neljään äärettömyyteen ulottuvaan sektoriin, neljään äärettömyyteen ulottuvaan kaistaleeseen ja yhteen äärelliseen *suunnikkaaseen*. Tämän suunnikkaan sivuvektoreista saat etsityt komponentit:

$$\underline{\underline{\overline{v}_1 = [6,3] \text{ ja } \overline{v}_2 = [2,4]}}$$



Totea vielä varmuuden vuoksi, että $\overline{v}_1 + \overline{v}_2 = \overline{v}$, $\overline{v}_1 = 3\overline{a}$ ja $\overline{v}_2 = 2\overline{b}$.

Laskennollinen ratkaisu. Etsitään sellaiset kertoimet p ja q, että $\bar{v} = p\bar{a} + q\bar{b}$.
Auki kerrotusta yhtälöstä $[8,7] = [2p+q, p+2q]$ saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} 2p+q=8 \\ p+2q=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=3 \\ q=2 \end{cases}.$$

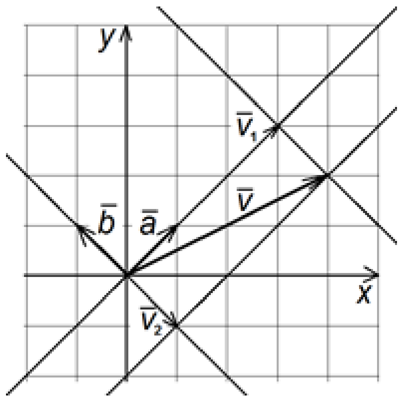
Etsityt komponentit ovat siis $p\bar{a} = 3\,[2,1] = \underline{\underline{[6,3]}}$ ja $q\bar{b} = 2\,[1,2] = \underline{\underline{[2,4]}}$.

Huomautus. Monilla apuvälineillä voi ratkaista *vektoreiden välisen yhtälön* $[8,7] = [2p+q, p+2q]$ siirtymättä edellä kirjoitettuun komponenttien väliseen yhtälöpariin..

Huomautus. Vaadittaessa, että vektorin komponentit ovat annettujen vektoreiden suuntaisia, matematiikassa tarkoitetaan annettujen vektoreiden kanssa yhdensuuntaisia vektoreita, eikä suinkaan välttämättä vektoreiden kanssa samansuuntaisia vektoreita.

Tietyissä fysiikan tilanteissa on kuitenkin esimerkiksi voiman komponenttien suuntauduttava juuri oikeaan suuntaan eikä päinvastaiseen suuntaan. Tällainen tilanne on esimerkiksi tarkasteltaessa, millaisilla voimilla tietyt köydet kannattavat annettua kuormaa. On täysin selvää, että veltto köysi voi vain vetää kappaletta köyden suuntaan. Köysi ei voi työntää kappaletta köyden suunnassa eikä vaikuttaa millään muullakaan lailla muissa suunnissa.

Esimerkki. Jaa vektori $\bar{v} = [4,2]$ kahteen komponenttiin, jotka ovat vektoreiden $\bar{a} = [1,1]$ ja $\bar{b} = [-1,1]$ suuntaisia.



Graafinen ratkaisu. Piirrä jälleen vektorin $\bar{v}$ päätepisteiden kautta vektoreiden $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ suuntaiset suorat. Syntyvän äärellisen suunnikkaan (nyt jopa suorakulmion) sivuvektoreista saat etsityt komponentit:

$$\underline{\underline{\bar{v}_1 = [3,3] \text{ ja } \bar{v}_2 = [1,-1]}}$$

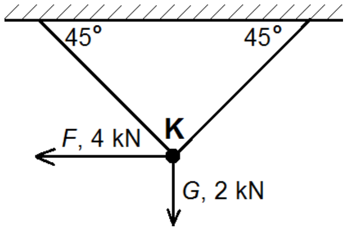
Kannattaa huomata, että jälkimmäinen komponentti on vastakkaissuuntainen vektorille $\bar{b}$.

Laskennollinen ratkaisu. Voit kokeilla vaikka TI-laskimen komentoa

solve($v = p\cdot a + q\cdot b, p, q$)| $v = [4,2]$ and $a = [1,1]$ and $b = [-1,1]$ ⊳ $p = 3$ and $q = -1$.

Syötettä voi lyhentää kirjoittamalla annettujen vektoreiden arvot suoraan solve-komennon sisään ilman sijoitusoperaattoria |. Pidempi komento on kuitenkin ehkä selvempi.

Esimerkki. Millä voimilla kuvan köydet kannattelevat paikallaan olevaa kappaletta K, johon kohdistuu alaspäin vaikuttava painovoima 2.0 kN sekä negatiivisen *x*-akselin suuntainen voima, jonka suuruus on 4.0 kN?



Koska köysien kappaleeseen kohdistamat, kappaletta vetävät voimat ovat köysien suuntaisia, niin ne ovat oikean- ja vasemmanpuoleisen köyden osalta muotoa $p\cdot[1,1]$ ja $q\cdot[-1,1]$, missä kertoimet *p* ja *q* ovat positiivisia. Koska kappale on paikoillaan, niin siihen vaikuttavien voimavektorien summan on oltava nollavektori eli

$$p\cdot[1,1]+q\cdot[-1,1]+[-4\text{kN},0]+[0,-2\text{kN}]=[0,0] \ .$$

Tästä vektoriyhtälöstä saadaan laskinkomennolla

$$\text{solve}(p\cdot[1,1]+q\cdot[-1,1]+[-4000\ \_\text{N},0]+[0,-2000\ \_\text{N}]=[0,0],p,q)$$

ratkaisu $p=3000\cdot\_\text{N}$, $q=-1000\cdot\_\text{N}$.

Koska vasemmanpuoleinen köysi tällöin työntäisi kappaletta, niin on selvää, että tilanne on fysikaalisesti mahdoton.

Tehtäviä

16.1 Määritä vektori $\overrightarrow{AB}$ ja sen suuntainen yksikkövektori $\bar{u}$, jos **v)** $A=(3,-2)$ ja $B=(0,2)$ **a)** $A=(4,2)$ ja $B=(7,-2)$.

16.2 Olkoon **v)** $\bar{a}=[6,-8]$ **a)** $\bar{a}=[-3,-4]$. Mihin xy-tason pisteeseen päädytään, jos pisteestä (1,2) siirrytään 4 yksikköä vektorille $\bar{a}$ vastakkaiseen suuntaan?

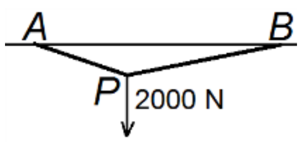
16.3 Jaa piirtämällä ja laskemalla vektori **v)** $\bar{c}=[6,7]$ **a)** $\bar{d}=[-2,6]$ vektoreiden $\bar{a}=[4,3]$ ja $\bar{b}=[2,-1]$ suuntaisiin komponentteihin.

16.4 Määritä homogeenisen kolmiolevyn *A*(0,1)*B*(5,0)*C* tuntematon kärkipiste *C*, jos kolmion painopiste on **v)** *P*(4,3) **a)** *P*(2,4).

16.5 Tarkastellaan pisteitä *A*(0,1), *B*(5,0) ja *C*(6,2). Määritä suunnikkaan **v)** *ABCX* **a)** *ABYC* **b)** *AZBC* tuntematon kärkipiste. (Kärkipisteitä lueteltaessa monikulmion piiriä kuljetaan koko ajan samaan suuntaan.)

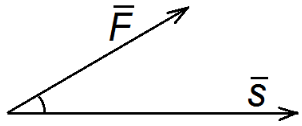
16.6 Jaa vektori **v)** $\bar{F}=[-4,7]$ **a)** $\bar{G}=[10,2]$ piirtämällä kahteen komponenttiin, joista toinen on vektorin $\bar{s}=[2,3]$ suuntainen ja toinen vektoria $\bar{s}$ vastaan kohtisuora.

16.7 Tutki piirtämällä ja laskemalla, kuinka suurilla voimilla 4 m korkean hallin katon pisteistä *A*(−3,4) ja *B*(5,4) alkavat köydet kannattavat kolmen metrin korkeudella pisteessä *P*(0,3) olevaa kuormaa, johon kohdistuva painovoima on **v)** 2000 N **a)** 5000 N. Vastaa kolmen numeron tarkkuudella.



16.2 Tasovektoreiden pistetulo

Esimerkki. Jos vakiovoima $\overline{F}$ siirtää kappaletta vektorin $\overline{s}$ verran, niin voiman tekemä työ on



$$W = |\overline{F}||\overline{s}|\cos(\overline{F}, \overline{s}) \ .$$

Fysikaalisen työn lauseke saadaan siis kertomalla kahden vektorin suuruuksien tulo vektoreiden välisen kulman kosinilla. Koska monesti muuallakin fysiikassa ja luonnontieteissä esiintyy kahden vektorin suuruuksien tulo kerrottuna kyseisten vektoreiden välisen kulman kosinilla, niin tällaista tuloa on ruvettu kutsumaan omalla nimellään seuraavasti:

Määritelmä. Vektoreiden $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ **pistetulo eli skalaaritulo** tarkoittaa lauseketta

$$\boxed{\overline{a} \bullet \overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}|\cos(\overline{a}, \overline{b})} \ .$$

Huomautus. Nimitys pistetulo johtuu tulon merkkinä käytetystä pisteestä. Vektoreiden välille määritellään toinenkin tulo ns. ristitulo, jonka merkkinä käytetään ristiä. Korostaaksemme sitä, että jo aikaisemmin määrittelemässämme luvun ja vektorin kertolaskussa ei ole kyse piste- eikä ristitulosta, jätämme yleensä luvun ja vektorin kertolaskusta pois kaikki kertomerkit.

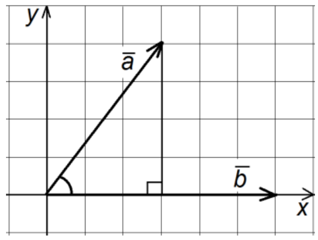
Nimitys skalaaritulo viittaa puolestaan siihen, että tulon arvona on luku eli skalaari eikä suinkaan vektori. Äsken mainittua ristituloa kutsutaan myös vektorituloksi, koska sen arvona on vektori.

Huomautus. Pistetuloa ei yleensä lasketa määritelmään perustuen, vaan käyttäen pian esitettävää laskusääntöä (tai kehittyneitä apuvälineitä).

Pistetulon määritelmä on kuitenkin osattava, koska se kertoo, millainen fysikaalinen lauseke pistetulo todellisuudessa on. Juuri määritelmän perusteella voimme esimerkiksi todeta, että fysiikasta tuttu työn lause $|\overline{F}||\overline{s}|\cos(\overline{F}, \overline{s})$ on itse asiassa voima- ja siirtymävektoreiden pistetulo.

Jos me emme tuntisi pistetulon määritelmää, niin pistetulon laskusäännön hallitsemisesta ei olisi meille mitään hyötyä, koska me emme tietäisi, mitä ilmiöitä pistetulon avulla voidaan laskea.

Esimerkki. Laskemme seuraavassa vektoreiden $\bar{a}=[3,4]$ ja $\bar{b}=[6,0]$ pistetulon $\bar{a}\bullet\bar{b}$ poikkeuksellisesti määritelmän ja kuvan avulla.



Nyt $|\bar{a}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$ ja $|\bar{b}|=6$.

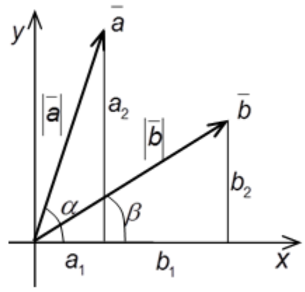
Koska $\cos(\bar{a},\bar{b})=\dfrac{\text{viereinen kateetti}}{\text{hypotenuusa}}=\dfrac{3}{5}$,

niin $\bar{a}\bullet\bar{b}=|\bar{a}||\bar{b}|\cos(\bar{a},\bar{b})=5\cdot 6\cdot\dfrac{3}{5}=18$.

Pistetulon laskusääntö. $\bar{a}\bullet\bar{b}=[a_1,a_2]\bullet[b_1,b_2]=a_1b_1+a_2b_2$

Esimerkki. $[3,4]\bullet[6,0]=3\cdot 6+4\cdot 0=18$ kuten edelläkin jo saatiin.
$(2\bar{i}+4\bar{j})\bullet(3\bar{i}-5\bar{j})=2\cdot 3+4\cdot(-5)=-14$

Tasovektoreiden pistetulon laskusäännön todistus



Muodostakoot vektorit $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ positiivisen *x*-akselin kanssa kulmat α ja β. Kuvan mukaisessa tapauksessa

$$\bar{a}\bullet\bar{b}=|\bar{a}||\bar{b}|\cos(\bar{a},\bar{b})=|\bar{a}||\bar{b}|\cos(\alpha-\beta)$$

$$=|\bar{a}||\bar{b}|\left(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\right)=|\bar{a}||\bar{b}|\left(\frac{a_1}{|\bar{a}|}\frac{b_1}{|\bar{b}|}+\frac{a_2}{|\bar{a}|}\frac{b_2}{|\bar{b}|}\right)=a_1b_1+a_2b_2$$

Esimerkki. Laske vektoreiden $\bar{a}=[1,2]$ ja $\bar{b}=[3,-4]$ välinen kulma.

Pistetulon määritelmästä $\bar{a}\bullet\bar{b}=|\bar{a}||\bar{b}|\cos(\bar{a},\bar{b})$ saadaan

$$\cos(\bar{a},\bar{b})=\frac{\bar{a}\bullet\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}=\frac{1\cdot 3+2\cdot(-4)}{\sqrt{1^2+2^2}\cdot\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{-5}{\sqrt{5}\cdot 5}=\frac{-1}{\sqrt{5}},\ \text{joten}\ \sphericalangle(\bar{a},\bar{b})=\underline{\underline{116.6^\circ}}$$

Pistetulon määritelmästä saadaan ehto vektoreiden kohtisuoruudelle:

Kohtisuoruusehto. Kaksi vektoria on kohtisuorassa toisiaan vastaan silloin ja vain silloin, kun niiden pistetulo on nolla:

$$\boxed{\bar{a}\perp\bar{b}\Leftrightarrow\bar{a}\bullet\bar{b}=0}\ .$$

Esimerkki. $[2,5] \perp [5,-2]$ **,** sillä $[2,5] \bullet [5,-2] = 2 \cdot 5 + 5 \cdot (-2) = 0$.

Esimerkin tulos voidaan välittömästi yleistää muotoon:

Vektorin $\bar{a} = [a_1, a_2]$ pituisia ja sitä vastaan kohtisuoria vektoreita ovat

$$[a_2, -a_1] \text{ ja } [-a_2, a_1].$$

Huomautus. Tasovektoria $\bar{a} = [a_1, a_2]$ vastaan kohtisuoran tasovektorin lauseke voidaan esittää myös determinanttina $\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}$.

Tämä kaksirivinen determinantti on analoginen lauseke sille myöhemmin esitettävälle kolmiriviselle determinantille, joka esittää sellaista kolmiulotteisen avaruuden vektoria, joka on kohtisuorassa ko. avaruuden kahta vektoria vastaan.

Esimerkki. Määritä jokin suoran $ax + by + c = 0$ suuntavektori ja normaalivektori ((eli suoran suuntainen ja suoraa vastaan kohtisuora vektori).

Valitaan suoralta kaksi "helppoa" pistettä $X = (-\frac{c}{a}, 0)$ ja $Y = (0, -\frac{c}{b})$. Tällöin vektori $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX} = [\frac{c}{a}, -\frac{c}{b}]$ on annetun suoran suuntainen. Kertomalla tämä vektori skalaarilla $\frac{ab}{c}$ tai $-\frac{ab}{c}$ saadaan yksinkertaisemmat suuntavektorien lausekkeet $[b, -a]$ tai $[-b, a]$. Kohtisuoraksi vektoriksi käy aikaisemmin esitetyn perusteella $[a, b]$. Saatu tulos voidaan esittää seuraavana lauseena.

Lause. Suoran $ax + by + c = 0$ eräs normaalivektori on $[a, b]$.
Saman suoran suuntavektoreita ovat esimerkiksi $[b, -a]$ ja $[-b, a]$.

Tehtäviä

16.8 Laske pistetulot **v)** $[3,3] \bullet [4,4]$ **a)** $[-2,2] \bullet [-3,0]$ **b)** $[2,6] \bullet [-1. -3]$ sekä laskusäännöllä että määritelmän avulla (katso kulmat kuvasta!).

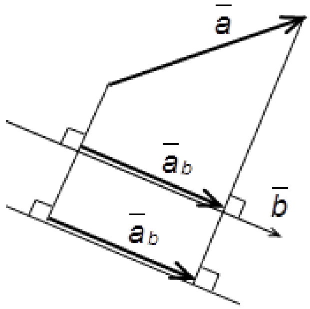
16.9 Määritä jokin suoran **v)** $y = 2x + 3$ **a)** $3x - 4y + 6 = 0$ **b)** $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = \frac{1}{4}$ normaalivektori $\bar{n}$ ja suuntavektori $\bar{s}$.

16.10 Määritä vektoreiden **v)** $[3,-4]$ ja $[12,5]$ **a)** $[3,5]$ ja $[-3,-2]$ välinen kulma laskemalla ja tarkista piirtämällä.

16.11 Määritä suorien A(1,3)B(7,5) ja C(3,6)D(4,2) välinen pienempi kulma.

16.3 Tasovektoreiden projektiovektori

Määritelmä. Tasovektorin $\bar{a}$ projektio saman tason vektorilla $\bar{b}$ tarkoittaa sitä vektoria $\bar{a}_b$, joka saadaan projisioimalla vektori $\bar{a}$ kohtisuoraa projektiota käyttäen vektorille $\bar{b}$ tai sen suuntaiselle suoralle.



Projektiona saatua vektoria sanotaan **projektiovektoriksi** .

Huomautus. Projektiovektoria määritettäessä vektorit voidaan tietenkin siirtää suuntansa ja suuruutensa säilyttäen mihin tahansa.

Huomautus. Projektiovektori $\bar{a}_b$ on riippumaton vektorin $\bar{b}$ pituudesta. Myöskään vektorin $\bar{b}$ muuttaminen vastakkaissuuntaiseksi ei millään lailla muuta projektiovektoria $\bar{a}_b$.

Sen sijaan vektorin $\bar{a}$ pituus vaikuttaa projektiovektoriin $\bar{a}_b$.

Vektorin $\bar{a}$ suunnan muuttaminen vastakkaissuuntaiseksi muuttaa myös projektiovektorin vastakkaissuuntaiseksi.

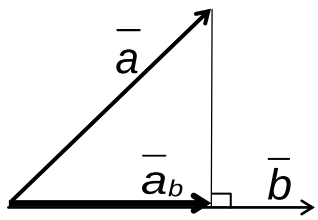
Lause. Projektiovektori voidaan laskea kaavasta

$$\boxed{\bar{a}_b = \left(\frac{\bar{a}\bullet\bar{b}}{\bar{b}\bullet\bar{b}}\right)\bar{b}}\ .$$

Huomautus. Edellisessä lauseessa vektorin $\bar{b}$ edessä oleva skalaarikerroin on selvyyden vuoksi merkitty sulkeisiin. Skalaarikertoimen laskemisen jälkeen on suoritettava skalaarilla kertominen, jota vastaavaa kertomerkkiä ei ole tapana merkitä näkyviin.

Seuraavan johdon mukaisesti projektiovektorin laskukaava esitetään monasti myös muodossa $\bar{a}_b = \dfrac{\bar{a}\bullet\bar{b}}{|\bar{b}|^2}\,\bar{b}$

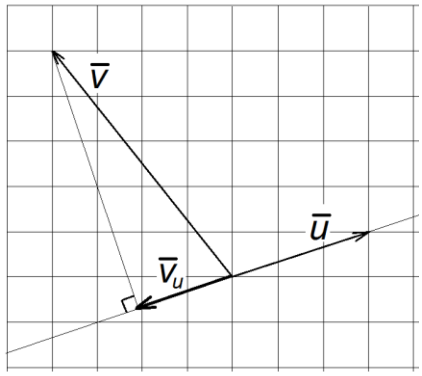
Todistetaan projektiovektorin laskukaava tapauksessa, jossa vektoreiden $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ välinen kulma on terävä.
Tällöin projektiovektori $\overline{a}_b$ saadaan kertomalla vektorin $\overline{b}$ suuntainen yksikkövektori projektiovektorin pituudella:



$$\overline{a}_b = |\overline{a}_b|\,\overline{b}^0 = |\overline{a}|\cos(\overline{a},\overline{b})\frac{\overline{b}}{|\overline{b}|} = \cancel{|\overline{a}|}\,\frac{\overline{a}\bullet\overline{b}}{\cancel{|\overline{a}|}\,|\overline{b}|}\,\frac{\overline{b}}{|\overline{b}|} = \left(\frac{\overline{a}\bullet\overline{b}}{|\overline{b}|^2}\right)\overline{b} = \left(\frac{\overline{a}\bullet\overline{b}}{\overline{b}\bullet\overline{b}}\right)\overline{b},$$

sillä pistetulon määritelmän mukaan $\overline{b}\bullet\overline{b} = |\overline{b}|\,|\overline{b}|\cos(\overline{b},\overline{b}) = |\overline{b}|^2 \cdot 1 = |\overline{b}|^2$

Esimerkki. Määritetään vektorin $\overline{v} = [-4, 5]$ projektio vektorilla $\overline{u} = [3, 1]$ sekä viereen piirtämällä että edellistä laskukaavaa käyttäen:

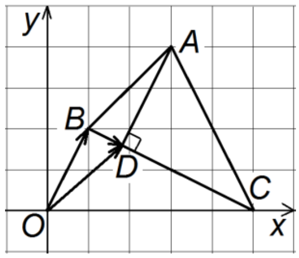


$$\overline{v}_u = \left(\frac{\overline{v}\bullet\overline{u}}{\overline{u}\bullet\overline{u}}\right)\overline{u} = \left(\frac{-4\cdot 3 + 5\cdot 1}{3\cdot 3 + 1\cdot 1}\right)[3, 1]$$

$$-0.7\ [3, 1] = \underline{\underline{[-2.1\ ,\ -0.7]}}$$

Vinkki. Jos on laskettava *vektori, jonka kärjessä on suorankulman merkki*, niin katso, voitko laskea tarvittavan vektorin jonkin tunnetun vektorin projektiona tarvittavan vektorin suuntaisella suoralla.

Esimerkki. Määritetään kolmion $A(3, 4)B(1, 2)C(5, 0)$ korkeusjanan AD kantapiste D.



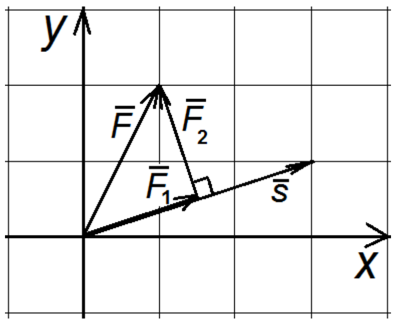
Koska $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD}$ ja *vektorin* $\overrightarrow{BD}$ *kärjessä on suorankulman merkki*, niin edellistä vinkkiä käyttäen saadaan

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA}_{BC} = \overrightarrow{OB} + \left(\frac{\overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{BC}\bullet\overrightarrow{BC}}\right)\overrightarrow{BC} \qquad \Bigg| \quad \begin{matrix}\overrightarrow{BA} = [2, 2]\\ \overrightarrow{BC} = [4, -2]\end{matrix}$$

$$= [1, 2] + \left(\frac{2\cdot 4 + 2\cdot(-2)}{4\cdot 4 + (-2)(-2)}\right)[4, -2] = [1, 2] + 0.2\,[4, -2] = [1.8,\ 1.6]$$

Näin ollen $D = \underline{\underline{(1.8,\ 1.6)}}$.

Esimerkki. Jaetaan sekä piirtämällä viereiseen kuvaan että laskemalla voima $\overline{F} = [1, 2]$ kahteen komponenttiin, joista toinen on siirtymän $\overline{s} = [3, 1]$ suuntainen ja toinen siirtymää vastaan kohtisuora.



Vinkin mukaan siirtymän suuntainen komponentti $\overline{F}_1$ saadaan projektiovektorina

$$\overline{F}_1 = \overline{F}_s = \left(\frac{\overline{F} \bullet \overline{s}}{\overline{s} \bullet \overline{s}}\right)\overline{s} = \left(\frac{[1, 2] \bullet [3, 1]}{[3, 1] \bullet [3, 1]}\right)[3, 1] = \left(\frac{3+2}{9+1}\right)[3, 1] = 0.5[3, 1] = \underline{\underline{[1.5\ ,\ 0.5]}}.$$

Koska komponenttien $\overline{F}_1$ ja $\overline{F}_2$ summa on $\overline{F}$, niin

$$\overline{F}_2 = \overline{F} - \overline{F}_1 = [1, 2] - [1.5, 0.5] = \underline{\underline{[-0.5, 1.5]}}.$$

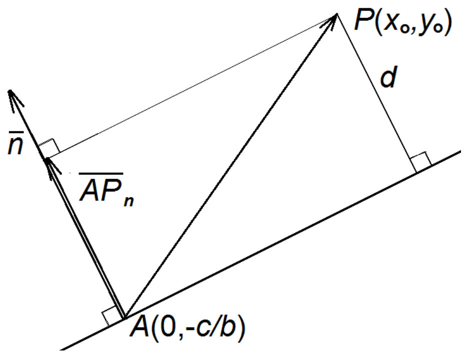
Lasketaan tarkistuksen vuoksi vielä $\overline{F}_2 \cdot \overline{s} = -1.5 + 1.5 = 0$, joten kohtisuoruusehdon mukaan $\overline{F}_2 \perp \overline{s}$, kuten vaadittiinkin.

Todistamme vielä esimerkkinä projektiovektorin käyttökelpoisuudesta algebran kurssista tutun lauseen, joka koskee annetun pisteen etäisyyttä annetusta suorasta:

Lause. Pisteen $P(x_0, y_0)$ etäisyys suorasta $ax + by + c = 0$ on

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Todistus. Valitaan suoralta jokin helppo piste, esimerkiksi $A(0, -c/b)$. (Pisteen A y-koordinaatti saadaan suoran yhtälöstä, kun ensin on valittu $x = 0$.)
Suoran normaalivektoriksi kelpaa $\overline{n} = [a, b]$.
Kuvan mukaan pisteen P etäisyys suorasta on



$$d = \left|\overline{AP}_n\right| = \left|\left(\frac{\overrightarrow{AP} \bullet \overline{n}}{|\overline{n}|^2}\right)\overline{n}\right| = \left|\frac{\overrightarrow{AP} \bullet \overline{n}}{|\overline{n}|^2}\right| \cdot |\overline{n}|$$

$$= \frac{\left|\overrightarrow{AP} \bullet \overline{n}\right|}{|\overline{n}|} = \frac{\left|[x_0 - 0, y_0 - (-\frac{c}{b})] \bullet [a, b]\right|}{|[a, b]|} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Tehtäviä

16.12 Määritä sekä piirtämällä että laskemalla **v)** $\bar{a}_b$ **a)** $\bar{b}_a$,
kun $\bar{a} = [2,6]$ ja $\bar{b} = [7,1]$.

16.13 Jaa vektori **v)** $\bar{v} = -6\bar{i} + 4\bar{j}$ **a)** $\bar{u} = 5\bar{i} + 5\bar{j}$ sekä piirtämällä että laskemalla vektorin $\bar{a} = 3\bar{i} + \bar{j}$ suuntaiseen ja vektoria $\bar{a}$ vastaan kohtisuoraan komponenttiin.

16.14 Tarkastellaan kolmiota $A(1,1)B(7,4)C$, missä C on **v)** $(1,6)$ **a)** $(4,5)$**.** Määritä kärjestä C alkavan korkeusjanan kantapiste.

16.15 Määritä pisteen **v)** $P = (2,7)$ **a)** $P = (5,6)$ peilikuvapiste suoran $K(2, 2)L(8, 5)$ suhteen.

16.16 Laske pisteen **v)** $P(5,7)$ **a)** $Q(7,5)$ etäisyys suorasta $5x + 4y = 3$ sekä algebrasta tutun etäisyyskaavan avulla että projektiovektoria käyttäen.

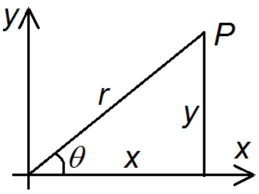
17. AVARUUSKOORDINAATISTOISTA

Palautamme ensin algebran kurssista johdannoksi mieleen kaksi eri koordinaattijärjestelmää tasossa olevan pisteen sijainnin ilmoittamiseksi.

Tasossa olevan pisteen *P* paikka voidaan ilmaista käyttäen joko
- **suorakulmaisia koordinaatteja** *x* ja *y* tai
- **napakoordinaatteja** *r* ja θ, joista *r* ilmoittaa pisteen *P* etäisyyden origosta *O* ja θ on se suunnattu kulma, joka tarvitaan positiivisen *x*-akselin kiertämiseksi origon ympäri pisteen *P* kautta kulkevaksi puolisuoraksi. Tavallisesti kulma θ rajoitetaan joko välille $0 \le \theta < 360°$ tai välille $-180° < \theta \le 180°$.

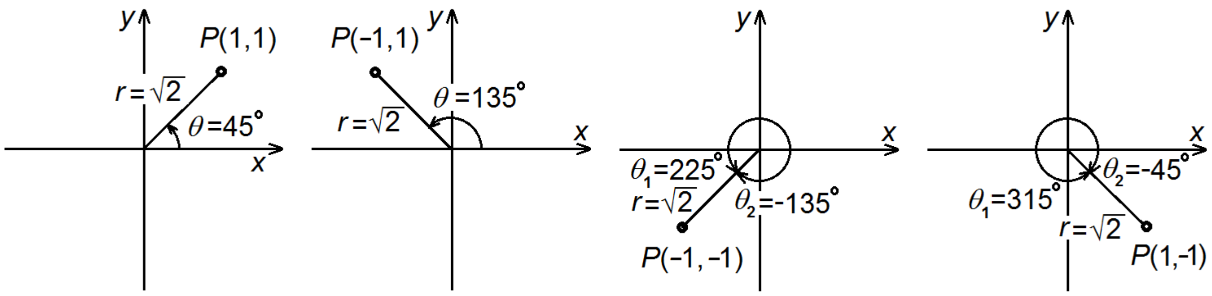
Suorakulmaisten koordinaattien ja napakoordinaattien välillä on yhteydet

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$



Ratkaistaessa kulmaa θ näistä yhtälöistä tavallisella funktiolaskimella on kulma θ valittava oikeasta neljänneksestä.

Esimerkki. Oheiseen kuvaan on merkitty tasopisteiden $(\pm 1,\ \pm 1)$ napakoordinaatit käyttäen kulmalle θ tavallisimpia mahdollisista arvoista.



Huomautus. TI-laskimella voi suorittaa tasopisteiden koordinaattimuunnokset esimerkiksi seuraavanlaisilla esitystapakomennoilla, joissa pisteiden koordinaattiesitysten asemasta käsitelläänkin itse asiassa pisteiden paikkavektoreita:

$$[-1,-1] \triangleright \text{Polar} \quad ↵ \quad [\sqrt{2} \quad -135]$$

$$[\sqrt{2}, \angle 225] \triangleright \text{Rect} \quad ↵ \quad [-1 \quad -1]$$

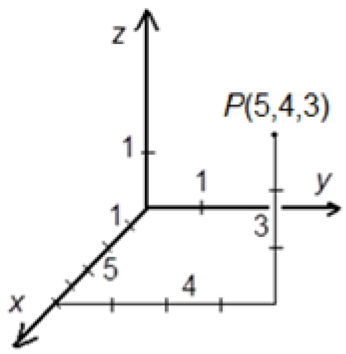
Lyhenne Rect viittaa sanaan rectangular.

Edellisiä komentoja suoritettaessa laskin oli astemoodissa.
Laskimen asetuksista riippuen komentosana ▹ Rect on useimmiten tarpeeton.

Avaruuden pisteitä tutkittaessa *xy*-koordinaatiston asemasta käytetään *xyz*-koordinaatistoa, joka saadaan asettamalla kolme saman mittakaavan omaavaa lukusuoraa toisiaan vastaan kohtisuoraan siten, että nollakohdat yhtyvät. Lukusuoria sanotaan *x*-, *y*- ja *z*-akseleiksi ja niiden leikkauspistettä origoksi. Jatkossa käytämme **oikeakätistä *xyz*-koordinaatistoa**, jossa oikeankäden peukalo, etusormi ja keskisormi voidaan vaivatta asettaa positiivisten *x*-, *y*- ja *z*-akseleiden suuntaisiksi mainitussa järjestyksessä.

Kun avaruuskoordinaatistoa ja avaruuden pisteistä muodostuvaa kappaletta havainnollistetaan tasokuvalla, niin apuna käytetään usein sopivaa **yhdensuuntaisprojektiota**, jossa koordinaatiston ja pisteiden kuvat syntyvät yhdensuuntaisten valonsäteiden synnyttäminä varjokuvina sopivasti valitulle kuvatasolle. Saatu kuva riippuu kuvasäteiden suunnan ja kuvatason valinnasta.

Tarkastelemme avaruuskoordinaatiston ja esimerkkipisteen $P(5,4,3)$ kuvaa ns. **kavaljeeriprojektiossa**, jossa kuvaus suoritetaan *yz*-tasossa olevalle kuvatasolle käyttäen sellaisia ylhäältä takaoikealta tulevia yhdensuuntaisia valonsäteitä, että *x*-akselin kuva puolittaa *y*- ja *z*-akseleiden välisen kulman ja *x*-akselilla olevat janat lyhenevät puoleen todellisesta pituudestaan. Tässä kuvauksessa *yz*-tasossa tai sen suuntaisessa tasossa olevat tasokuviot säilyttävät tietenkin sekä kokonsa että muotonsa, mutta kaikki muut kuviot näkyvät jollakin lailla muuttuneina.

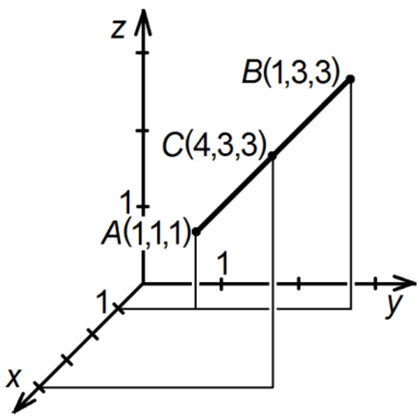


Piste $P(5,4,3)$ (tai oikeamminkin sen kuva) on sijoitettu oikealle paikalleen käyttäen apuna **koordinaattimurtoviivaa.**
Muissakin suuntaisprojektioissa pisteiden kuvat saadaan koordinaattimurtoviivojen avulla sijoitettua oikeille paikoilleen.

Esimerkki. Huolellakaan piirretty projektiokuva ei aina anna havainnollista mielikuvaa todellisesta kolmiulotteisesta kappaleesta, kuten viereisestä kavaljeeriprojektiota käyttäen piirretystä kuvasta ilmenee. Kuva esittää suorakulmaista kolmioita $A(1,1,1)B(1,3,3)C(4,3,3)$, jonka kärkipisteet on sijoitettu paikoilleen koordinaattimurtoviivojen avulla. Koska sivuvektorien pistetulo on nolla

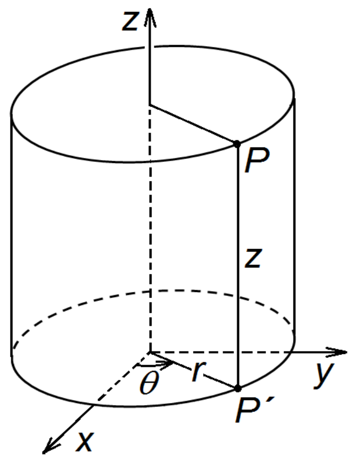
$$\overline{BA}\bullet\overline{BC} = [0,-2,-2]\bullet[3,0,0] = 0+0+0 = 0,$$

niin kolmion kärjessä *B* on todellisuudessa suorakulma, vaikka kuvasta ei siltä vaikuta.



Avaruudessa olevan pisteen P paikka ilmoitetaan suorakulmaisten koordinaattien asemasta usein myös lieriö- tai pallokoordinaattien avulla, jolloin koordinaatteina käytetään etäisyyksien lisäksi myös tiettyjä kulmia.

Tarkastellaan ensin suorakulmaisten koordinaattien x, y ja z sekä **lieriökoordinaattien** r, θ ja z välistä yhteyttä.



Olkoon P' pisteen P ortogonaaliprojektio xy-tasolla.

Pisteen P lieriökoordinaatit r ja θ ovat samat kuin tasopisteen P' napakoordinaatit ja lieriökoordinaatti z on sama kuin suorakulmainen z-koordinaatti, joten

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} \\ z = z \end{cases}.$$

Vanhoilla laskimilla laskettaessa kulma θ pitää tietenkin itse valita oikeasta neljänneksestä, mutta kehittyneillä laskimilla muunnokset on helppo suorittaa.

Esimerkki. Pisteen $(x,y,z)=(3,4,2)$ lieriökoordinaatit saadaan astetilassa TI-laskimen komennolla

[3,4,2] ▹Cylind

vektorina muodossa $[5 \ \angle 53.13 \ \ 2]$, missä yksi kulmamerkki ilmaisee, että kolmikko ei ole enää suorakulmaisen koordinaatiston vektori vaan lieriökoordinaatiston vektori. Lieriökoordinaatit ovat siis $r=5$, $\theta = 53.13°$ ja $z=2$.

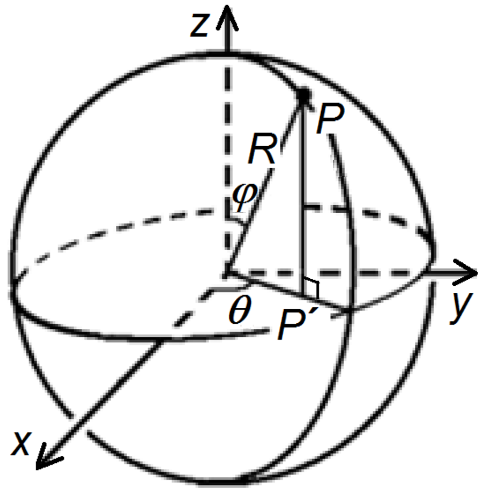
Esimerkki. Jos pisteen lieriökoordinaatit ovat $r=4$, $\theta=30°$ ja $z=5$, niin astemoodissa TI-laskin sieventää syötteen

[4, ∠30, 5]▹Rect

suorakulmaisen koordinaatiston vektoriksi $[3.46 \ \ 2 \ \ 5]$. Komentosana ▹Rect on tarpeeton, jos asetuksena on vektorin esitys suorakulmaisessa muodossa.

Pisteen P **pallokoordinaatit** R, θ ja φ ilmaisevat pisteen P paikan seuraavasti:

- R ilmoittaa pisteen P etäisyyden origosta.
- θ ilmoittaa pisteen P *xy*-tasolla olevan projektiopisteen P' vaihekulman positiiviseen *x*-akseliin nähden. Kulma θ on siis sama kuin tasopisteen P' toinen napakoordinaatti ja avaruuspisteen P toinen lieriökoordinaatti. Kulma θ rajoitetaan tavallisesti välille $0 \le \theta < 360°$ tai $-180 < \theta \le 180°$.
- φ ilmoittaa puolisuoran *OP* kulman positiivisen *z*-akselin suhteen, joten $0 \le \varphi \le 180°$.



Esimerkki. Pisteen $(x, y, z) = (3, 4, 2)$ pallokoordinaateiksi saadaan TI-laskimen komennolla

$$[3, 4, 2] \triangleright \text{Sphere} \hookleftarrow \; [5.39 \; \angle 53.13 \; \angle 68.20] \; .$$

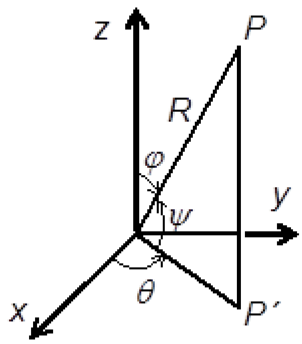
Kahden komponentin edessä olevat kulmamerkit ilmoittavat vastauksen olevan pallokoordinaatiston vektori, joten $R = 5.39$, $\theta = 53.13°$ ja $\varphi = 68.20°$..

Esimerkki. Pallokoordinaatit $R = 4$, $\theta = 30°$ ja $\varphi = 160°$ sievenevät syötteellä

$$[4, \angle 30°, \angle 160°] \triangleright \text{Rect}$$

suorakulmaisiksi koordinaateiksi muotoon [1.18 0.68 -3.76]. Jos asetukset ovat sopivat, niin asteen merkkiä ja esitystapakomentoa $\triangleright$ Rect ei tarvita.

Huomautus. Toiseksi pallokoordinaattikulmaksi valitaan usein kulman φ tilalle kulma $\psi = 90° - \varphi$, joka on välillä $-90° \le \psi \le 90°$ ja joka ilmoittaa, kuinka suuren kulman puolisäde *OP* muodostaa vaakasuoran *xy*-tason suhteen. Näin menetellään esimerkiksi ilmoitettaessa tietyn paikkakunnan sijaintia maapallolla.



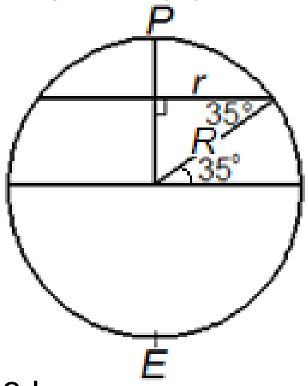
Maantieteessä kulman ψ positiiviset arvot ilmaisevat paikan sijaitsevan tietyllä pohjoisella **leveyspiirillä**, kun taas kulman ψ negatiiviset arvot ilmaisevat paikan sijaitsevan eteläisellä leveyspiirillä.

Paikkakunnan sijainti tietyllä **pituuspiirillä** vastaa puolestaan pallokoordinaattia θ rajoitettuna välille $-180° < \theta \le 180°$. Kulman θ negatiiviset arvot liittyvät läntisiin pituuspiireihin, positiiviset arvot itäisiin. Pituuspiiri $0°$ on valittu kulkemaan Greenwichin kautta.

Huomautus. Maapallo sijoitetaan koordinaatistoon yleensä siten, että maapallon keskipiste on origossa, pohjoisnapa positiivisella z-akselilla ja x-akseli kulkee päiväntasaajan (eli 0-leveyspiirin) ja 0-pituuspiirin leikkauspisteen kautta. Näin meneteltäessä

- pituuspiirillä $i°$ itäistä pituutta pallokoordinaatiston kulma $\theta = i°$
- pituuspiirillä $l°$ läntistä pituutta pallokoordinaatiston kulma $\theta = -l°$
- leveyspiirillä $p°$ pohjoista leveyttä pallokoordinaatiston kulma $\varphi = 90° - p°$
- leveyspiirillä $e°$ eteläistä leveyttä pallokoordinaatiston kulma $\varphi = 90° + e°$

Esimerkki. a) Laske leveyspiirin 35° pohjoista leveyttä pituus olettaen, että maapallo on pallo, jonka säde $R = 6370$ km. Laske myös tällä leveyspiirillä olevien paikkakuntien A (90° läntistä pituutta) ja B (90° itäistä pituutta) lyhin etäisyys b) maan läpi c) maapallon pintaa pitkin.



a) Tarkasteltava leveyspiiri on ympyrä, jonka säde r saadaan kuvan suorakulmaisesta kolmiosta:

$$\cos 35° = \frac{r}{R} \quad \Leftrightarrow \quad r = R \cdot \cos 35° = 5218 \text{ km}.$$

Leveyspiirin pituus on näin ollen $2\pi r \approx 32800$ km .

b) Pisteet A ja B ovat leveyspiirin määräämän ”ympyrälevyn vastakkaisilla puolilla, joten niiden välinen lyhin etäisyys maan läpi saadaan levyn halkaisijasta: $d_b = 2r \approx 10400$ km.

c) Lyhintä matkaa pallon pintaa pitkin pisteestä A leveyspiirin vastakkaiseen pisteeseen B **ei** saada kulkemalla leveyspiiriä pitkin eli vastaukseksi ei kelpaa $0.5 \cdot 2\pi r \approx 16400$ km. Voidaan osoittaa, että pallon pinnalla olevien pisteiden välinen lyhin etäisyys pallon pintaa pitkin mitattuna saadaan pitkin sellaista ns. **isoympyrä**ä, jonka määräämässä tasossa pallon keskipiste on. Lyhin reitti kulkeekin nyt pohjoisnavan yli ja sen pituus on $\frac{180 - 2 \cdot 35}{360} \cdot 2\pi r \approx 12200$ km.

Vastaavat ja vaikeammatkin laskut voidaan jatkossa laskea helpommin.

Tehtäviä

17.1 Määritä pisteen **v)** $(x, y, z) = (2, -2, 2\sqrt{2})$ **a)** $(x, y, z) = (-1, 1, \sqrt{2})$ lieriö- ja pallokoordinaatit sekä ilman laskinta että käyttäen laskinta tehokkaasti.

17.2 Määritä lieriökoordinaatiston pisteen **v)** $r = 6$, $\theta = 45°$, $z = 2$ **a)** $r = 6$, $\theta = 90°$, $z = 2$ suorakulmaiset ja pallokoordinaatit sekä ilman laskinta että käyttäen laskinta mahdollisimman tehokkaasti.

17.3 Määritä pallokoordinaatiston pisteen **v)** $R = 6$, $\theta = 45°$, $\varphi = 0°$ **a)** $R = 4$, $\theta = 90°$, $\varphi = 90°$ suorakulmaiset ja lieriökoordinaatit sekä ilman laskinta että käyttäen laskinta mahdollisimman tehokkaasti.

18. AVARUUSVEKTOREISTA

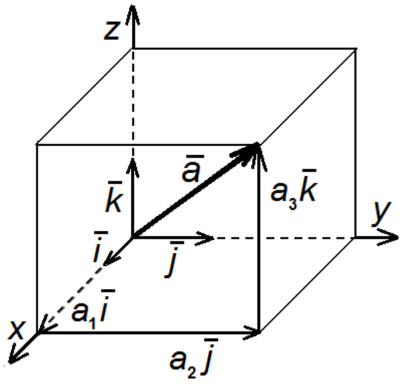
18.1 Avaruusvektoreiden komponenttiesitys

Olkoot $\overline{i}$, $\overline{j}$ ja $\overline{k}$ positiivisten *x*-, *y*- ja *z*-akselien suuntaiset yksikkövektorit.

Ajattelemalla avaruuden mielivaltainen vektori suorakulmaisen särmiön avaruuslävistäjäksi todetaan, että jokainen 3-ulotteisen avaruuden vektori $\overline{a}$ voidaan esittää yksikäsitteisesti muodoissa

$$\boxed{\overline{a} = a_1\overline{i} + a_2\overline{j} + a_3\overline{k} \overset{\text{lyhennetään}}{=} [a_1, a_2, a_3]}$$

missä a_1 , a_2 ja a_3 ovat sopivat reaaliluvut.



Molempia edellä olleita vektorin esityksiä sanotaan **komponenttimuodoiksi**, koska niissä vektori on jaettu kolmen komponentin summaksi, vaikka jälkimmäisessä esityksessä yhteenlaskua ei kirjoitetakaan selvästi näkyviin.

Huomautus. Koska vektoreiden yhteen- ja vähennyslasku sekä skalaarilla kertominen noudattavat algebrasta tuttuja laskulakeja, niin luonnollisin merkinnöin on voimassa 2-ulotteisiakin vektoreita vastaavat tulokset:

$$\overline{a} + \overline{b} = (a_1\overline{i} + a_2\overline{j} + a_3\overline{k}) + (b_1\overline{i} + b_2\overline{j} + b_3\overline{k}) = (a_1 + b_1)\overline{i} + (a_2 + b_2)\overline{j} + (a_3 + b_3)\overline{k}$$
$$\overline{a} - \overline{b} = (a_1\overline{i} + a_2\overline{j} + a_3\overline{k}) - (b_1\overline{i} + b_2\overline{j} + b_3\overline{k}) = (a_1 - b_1)\overline{i} + (a_2 - b_2)\overline{j} + (a_3 - b_3)\overline{k}\ ,$$
$$t\overline{a} = t(a_1\overline{i} + a_2\overline{j} + a_3\overline{k}) = ta_1\overline{i} + ta_2\overline{j} + ta_3\overline{k}$$

jotka voidaan esittää myös lyhennetyssä muodossa seuraavasti:

$$[a_1, a_2, a_3] + [b_1, b_2, b_3] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3]$$
$$[a_1, a_2, a_3] - [b_1, b_2, b_3] = [a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3]$$
$$t[a_1, a_2, a_3] = [ta_1, ta_2, ta_3]$$

Komponenttimuodossa olevien vektoreiden peruslaskutoimitukset suoritetaan siis komponenteittain.

Esimerkki. $2[1,2,3] + 3[1,2,1] - [2,2,2]$

$$= [2\cdot 1, 2\cdot 2, 2\cdot 3] + [3\cdot 1, 3\cdot 2, 3\cdot 1] - [2,2,2]$$
$$= [2,4,6] + [3,6,3] - [2,2,2]$$
$$= [2+3-2, 4+6-2, 6+3-2] = [3,8,7]$$

Huomautuksia. Edellisen esimerkin voi kirjoittaa moniin laskimiin tarkalleen ensimmäisen lausekkeen mukaisessa muodossa lyhennettyä komponenttiesitystä käyttäen.

Myös tasovektorit voidaan kirjoittaa laskimeen kaksikomponenttisina hakasulkuesityksinä (tai kolmikomponenttisina laittamalla viimeiseksi komponentiksi aina nollan).

TI-laskimessa on myös valmiit pohjat 2- ja 3-komponenttisille vektoreille, jolloin pilkkuja ei tarvitse kirjoittaa erottimiksi.

On huomattava, että esimerkiksi samaan summalausekkeeseen ei saa kirjoittaa 2- ja 3- komponenttisia hakasulkuesityksiä sekaisin.

Esimerkki. Vaikka kirjoitetaan $(3\bar{i}+2\bar{j}+\bar{k})+(2\bar{i}+\bar{j})=5\bar{i}+3\bar{j}+\bar{k}$, niin käsinkään laskettaessa ei saisi kirjoittaa $[3, 2, 1]+[2, 1]=[5, 3, 1]$.
Apuvälineet eivät edes hyväksyisi vasemmanpuoleista kirjoitelmaa, vaan syötteen tulee ehdottomasti olla $[3, 2, 2]+[2, 1, 0]$, missä pilkkujen tilalla voi olla valmiiden vektoripohjien välit.

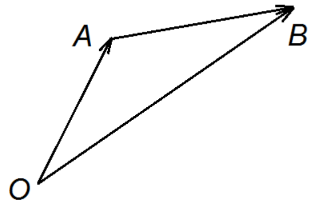
Avaruusvektoreillekin on voimassa tasovektoreita vastaavat tulokset:

Pisteen $P(x,y,z)$ paikkavektori saadaan korvaamalla pisteen koordinaattiesityksessä kaarisulut vektorin komponenttiesityksen hakasuluilla: $\overrightarrow{OP}=[x,y,z]$.

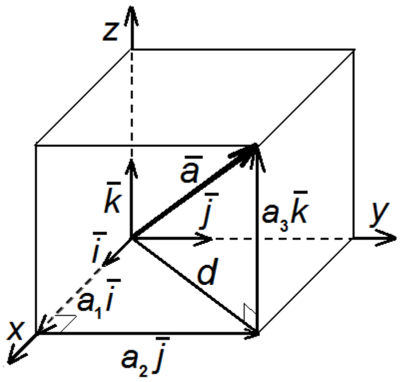
Kahden pisteen välinen vektori saadaan vähentämällä loppupisteen paikkavektorista alkupisteen paikkavektori.

Huomautus. Koska huolellakaan piirretty projektiokuva ei yleensä anna oikeaa mielikuvaa todellisesta avaruuskuviosta, niin jatkossa piirrämmekin vain tilannetta havainnollistavia kuvia, joissa pyrimme tarkoituksella tuomaan esille kuvion tärkeimmät ominaispiirteet.

Esimerkki. Lasketaan pisteiden $A(2,1,3)$ ja $B(5,2,-4)$ välinen vektori $\overrightarrow{AB}$.
Koska $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$, niin
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=[5,2,-4]-[2,1,3]=\underline{\underline{[3,1,-7]}}$.



Avaruusvektorin $\bar{a} = a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k}$ pituus saadaan kuvan suorakulmaisen särmiön lävistäjän pituutena. Pythagoraan lauseen mukaan pohjan lävistäjä $d = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.



Vektorin $\bar{a}$ pituus saadaan lopuksi pohjatasolta nousevan suorakulmaisen kolmion hypotenuusana kateettien ollessa pohjan lävistäjä ja särmiön oikea etusärmä, joten

$$|\bar{a}| = \sqrt{d^2 + a_3^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\ .$$

Lause. Vektorin $\bar{a} = a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k} = [a_1, a_2, a_3]$ pituus on

$$\boxed{|\bar{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

Esimerkki. Olkoon $\bar{a} = [2, -1, -2]$. Koska annetun vektorin suuntainen yksikkövektori saadaan jakamalla vektori pituudellaan ja $|\bar{a}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = 3$, niin vektorin $\bar{a}$ suuntainen yksikkövektori on

$$\bar{a}^0 = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|} = \frac{[2, -1, -2]}{3} = [\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}].$$

Huomautus. Vektorin pituus saadaan TI-laskimen funktiolla norm. Esimerkiksi edellä lasketun vektorin pituus saadaan syötteellä

norm([2,-1,-2]) ↲ 3 .

Joissakin apuvälineissä vektorin pituus lasketaan kuitenkin funktiolla abs .

Esimerkki. Määritä vektorille $\bar{v} = [-4, 2, 4]$ vastakkaissuuntainen vektori $\bar{u}$, jonka pituus on 3.

Etsitty vektori on

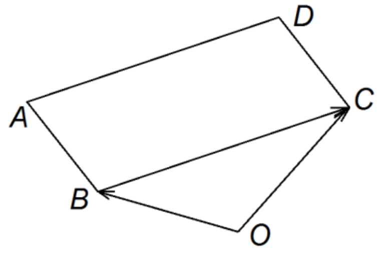
$$\bar{u} = -3\,\bar{v}^0 = -3\frac{\bar{v}}{|\bar{v}|} = -3\frac{(-4,2,4]}{\sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 4^2}} = -3\ \frac{[-4,2,4]}{6} = \underline{\underline{[2, -1, -2]}}.$$

Vektorin $\bar{u}$ voi laskea myös TI-laskimen with-operaattoria käyttäen syötteistä

$$-3\frac{v}{\text{norm}(v)}\Big|\, v = [-4, 2, 4] \qquad \text{ja} \qquad -3\,\text{unit}v(v)\,|\, v = [-4, 2, 4]\ ,$$

missä unit(v) tarkoittaa vektorin v suuntaista yksikkövektoria.

Esimerkki. Määritä suunnikkaan $A(-1,-1,4)B(3,0,3)CD(2,1,2)$ tuntematon kärkipiste C.

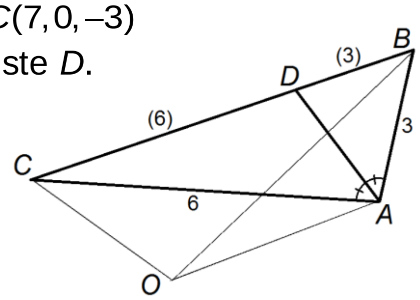


Koska suunnikaan vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkät ja yhdensuuntaiset, niin

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AD}$$
$$=[3,0,3]+[2-(-1),1-(-1),2-4]=[6,2,1],$$

josta $C=(6,2,1)$.

Esimerkki. Määritä kolmion $A(3,-2,1)B(1,-1,3)C(7,0,-3)$ A-kulman puolittajan ja vastaisen sivun leikkauspiste D.



Lasketaan kolmion sivuvektorit

$$\overrightarrow{AB}=[1-3,-1-(-2),3-1]=[-2,1,2],$$
$$\overrightarrow{AC}=[7-3,0-(-2),-3-1]=[4,2,-4]$$

ja niiden pituudet $\left|\overrightarrow{AB}\right|=3$ ja $\left|\overrightarrow{AC}\right|=6$.

Koska kolmion kulman puolittaja AD jakaa vastaisen sivun BC viereisten sivujen suhteessa eli suhteessa 3:6, niin kysytyn leikkauspisteen D paikkavektori saadaan pisteiden B ja C paikkavektoreiden painotettuna keskiarvona painoina jakosuhdetta ilmoittavat luvut 3 ja 6 ”käänteisessä” järjestyksessä:

$$\overrightarrow{OD}=\frac{6\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}}{6+3}=\frac{6\,[1,-1,3]+3\,[7,0,-3]}{9}=\frac{[27,-6,9]}{9}=[3,-\frac{2}{3},1].$$

Näin ollen piste $\underline{\underline{D=\left(3,-2/3,1\right)}}$.

Huomautus. TI-laskimella voidaan laskea myös napa-, lieriö- ja pallokoordinaatein annetuilla vektoreilla.

Syöttövaiheessa laskin tunnistaa eri koordinaattiesitykset koordinaattien tyypeistä ja lukumääristä. Jos koordinaattina on kulma, niin koordinaatin eteen kirjoitetaan kulmasymboli $\angle$. Vektorin esitykset ovat siis seuraavanlaiset

- 2-ulotteisessa suorakulmaisessa koordinaatistossa $[x,y]$
- napakoordinaatistossa $[r,\angle\theta]$
- 3-ulotteisessa suorakulmaisessa koordinaatistossa $[x,y,z]$
- lieriökoordinaatistossa $[r,\angle\theta,z]$
- pallokoordinaatistossa $[R,\angle\theta,\angle\varphi]$.

Komponenttien väliin ei merkitä pilkkuja, jos käytetään valmista vektoripohjaa.

Tulostuksen haluttu koordinaattiesitys valitaan joko moodiasetuksin tai laittamalla tulostettavan vektorilausekkeen perään sopiva esitystapakomento

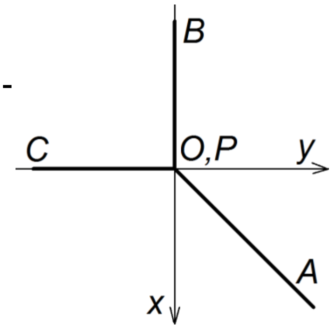
▹Rect , ▹Polar , ▹Cylind tai ▹Sphere.

Esimerkki. Lieriökoordinaatiston vektorin $[4,\angle 90°,3]$ pituus 5 saadaan astemoodia käytettäessä lausekkeesta

$$\text{norm}([4,\angle 90,3])\quad ,$$

johon voi halutessaan tietenkin kirjoittaa mukaan asteen tunnuksen.
Radiaanimoodissa on käytettävä lauseketta $\text{norm}([4,\angle 90°,3])$ tai kulma muutetaan radiaaneiksi, jolloin syöte on $\text{norm}([4\,,\angle \pi/2\,,3])$.

Esimerkki. Pisteessä $P(0,0,2)$ oleva kappale halutaan ripustaa korkeudella $z=3$ olevaan vaakasuoraan kattoon kolmella köydellä, joiden nousukulmat ovat $20°$, $30°$ ja $40°$. Mihin katon pisteisiin A, B ja C köydet on kiinnitettävä, kun köysien ortogonaaliprojektioiden xy-tasolla pitäisi muodostaa positiivisen x-akselin kanssa em. järjestyksessä suunnatut kulmat $45°$, $180°$ ja $270°$?



Viereinen kuva esittää ripustusta ylhäältä katsottuna. Tarkastellaan pisteen P ja ensimmäisen köyden kiinnityspisteen A välistä vektoria pallokoordinaattimuodossa

$$\overrightarrow{PA}=[R,\angle 45°,\angle(90-20)°].$$

Laskin sieventää tämän lausekkeen suorakulmaisen koordinaatiston vektoriksi $[0.664R\,,\,0.664R\,,\,0.342R]$. Koska tämän vektorin pystykomponentin tulee olla suuruudeltaan $3-2=1$, niin $0.342R=1$, josta saamme köyden pituudeksi $R=2.92$. Ensimmäisen kiinnityspisteen paikkavektori on siis

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PA}=[0,0,2]+[0.664R,\ 0.664R\ ,0.342R]=[1.94,\ 1.94,\ 3],$$

kun pituudelle R on sijoitettu edellä laskettu arvo 2.92 esimerkiksi laskimen with-operaattoria | käyttäen. Kiinnityspiste on siis $A(1.94\ ,\ 1.94\ ,\ 3)$.

Muut kiinnityspisteet $B(-1.73,\ 0,\ 3)$ ja $C(0,\ -1.19,\ 3)$ voi etsiä vastaavasti.

Esimerkki. Määritä ne voimat, joilla huoneen katon pisteisiin $A(3,0,3)$, $B(-2,1,3)$ ja $C(-1,-2,3)$ kiinnitetyt köydet kannattavat pisteessä $K(0,0,1)$ olevaa kuormaa, johon kohdistuva painovoima on 1000 N.

Koska köydet kannattavat kappaletta köysien suuntaisilla voimilla, niin voimat ovat muotoa $p\overrightarrow{KA}=p[3,0,2]$, $q\overrightarrow{KB}=q[-2,1,2]$ ja $r\overrightarrow{KC}=r[-1,-2,2]$.
Koska köysien kannatusvoimat lisäksi yhdessä kumoavat alaspäin suuntautuvan painovoiman $[0,0,-1000]$, niin

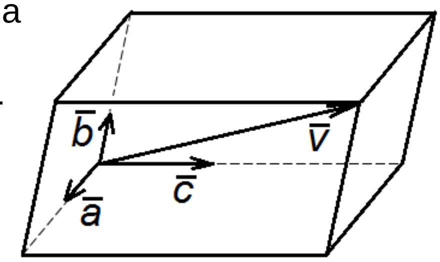
$$p\cdot[3,0,2]+q\cdot[-2,1,2]+r\cdot[-1,-2,2]=-[0,0,-1000]\qquad \text{(kertomerkit tarpeen laskimessa!)}$$

Tästä vektoriyhtälöstä saadaan TI-laskimella $p=1250/7, q=1500/7, r=750/7$.

Köydet kannattavat siis kuormaa voimilla $\begin{cases} p\,[3,0,2]\approx[536,0,357]\ \text{N} \\ q\,[-2,1,2]\approx[-428,214,429]\ \text{N} \\ r\,[-1,-2,2]\approx[-107,-214,214]\ \text{N}\end{cases}$,

joiden suuruudet 644 N, 643 N ja 321 N saadaan laskimen norm-funktiolla.

Esimerkki. Jaetaan vektori $\overline{v} = [-1,-1,4]$ kolmeen komponenttiin, jotka ovat vektoreiden $\overline{a} = [2,1,1]$, $\overline{b} = [1,2,3]$ ja $\overline{c} = [-1,0,3]$ suuntaisia.



Graafisessa ratkaisussa meidän olisi periaatteessa konstruoitava suuntaissärmiö, jonka särmät ovat vektoreiden $\overline{a}$, $\overline{b}$ ja $\overline{c}$ suuntaisia ja jonka avaruuslävistäjänä on vektori $\overline{v}$. Tämän suuntaissärmiön särmävektorit olisivat etsityt komponentit. Suuntaissärmiön graafinen konstruoiminen on kuitenkin käytännössä ylivoimaista.

Ratkaisemmekin tehtävän vain laskennollisesti. Etsitään sellaiset kertoimet p, q ja r, että $\overline{v} = p\overline{a} + q\overline{b} + r\overline{c}$.

Auki kerrotusta yhtälöstä $[-1,-1,4] = [2p+q-r, p+2q, p+3q+3r]$

saadaan yhtälöryhmä
$$\begin{cases} 2p+q-r = -1 \\ p+2q = -1 \\ p+3q+3r = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 1 \\ q = -1 \\ r = 2 \end{cases}.$$

Etsityt komponentit ovat siis
$$p\overline{a} = 1\overline{a} = \underline{\underline{[2,1,1]}}\ ,\ q\overline{b} = -1[1,2,3] = \underline{\underline{[-1,-2,-3]}}\ ,\ r\overline{c} = 2[-1,0,3] = \underline{\underline{[-2,0,6]}}$$

Huomautus. Edellinen vektoriyhtälö kannattaa tietenkin ratkaista TI-laskimella vektorimuodossa komennolla
$$\text{solve}(\,[-1,-1,4] = p\cdot[2,1,1] + q\cdot[1,2,3] + r\cdot[-1,0,3]\ ,\ p,q,r\,)$$

Harjoituksia

18.1 Määritä homogeenisen kolmiolevyn **v)** $A(1,1,1)B(2,3,4)C(6,2,1)$ **a)** $A(2,0,1)B(5,-2,3)C(4,5,5)$ painopiste.

18.2 Tarkastellaan pisteitä A(1,1,1,), B(1,2,3) ja C(2,-2,5). Määritä suunnikkaan **v)** $ABCX$ **a)** $ABYC$ tuntematon kärkipiste.

18.3 Määritä kolmion $A(3,2,3)B(1,1,1)C$ (6,2,7) kulman **v)** A **a)** C puolittajan ja vastaisen sivun leikkauspiste.

18.4 Jaa vektori **v)** $\overline{v} = [8,5,5]$ **a)** $\overline{u} = [6,5,4]$ vektoreiden $\overline{a} = [1,2,3]$, $\overline{b} = [2,0,1]$ ja $\overline{c} = [3,1,1]$ suuntaisiin komponentteihin.

18.5 Määritä ne voimat, joilla huoneen katon pisteisiin $P(4,1,4)$, $Q(3,0,4)$ ja $R(0,-1,4)$ kiinnitetyt köydet kannattavat pisteessä **v)** $S(1,1,2)$ **a)** $T(2,0,3)$ olevaa kuormaa, johon kohdistuva painovoima on 2000 N.

18.2 Avaruusvektoreiden pistetulo

Avaruusvektoreilla pistetulon määritelmä on aivan sama kuin tasovektoreillakin, mutta laskusääntöön tulee mukaan 3D-vektoreiden kolmannet komponentit, jotka käyttäytyvät samoin kuin edellisetkin komponentit.

Määritelmä. Vektoreiden $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ **pistetulo eli skalaaritulo** on

$$\bar{a} \bullet \bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\cos(\bar{a}, \bar{b}) \quad .$$

Laskusääntö. $\bar{a} \bullet \bar{b} = [a_1, a_2, a_3] \bullet [b_1, b_2, b_3] = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

Esimerkki. $[3,4,1] \bullet [6,0,-3] = 3 \cdot 6 + 4 \cdot 0 + 1 \cdot (-3) = 15$

$(2\bar{i} + 4\bar{j} + \bar{k}) \bullet (3\bar{i} + 5\bar{j}) = 2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 1 \cdot 0 = 26$

Huomautus. Vektoreiden pistetulo (engl. dotproduct) lasketaan TI-laskimella käyttäen funktiota dotP .

Tällä TI-laskimen dotP-funktiolla voit laskea myös pallo- ja lieriökoordinaatistoissa annettujen vektoreiden pistetulot, vaikka me itse joutuisimme

- joko käyttämään pistetulon määritelmää
- tai ensin muuntamaan kyseiset vektorit suorakulmaiseen koordinaatistoon ja sitten laskemaan pistetulon yllä olevalla laskusäännöllä.

Esimerkki. Edellisen esimerkin jälkimmäinen pistetulo kirjoitetaan laskimeen muodossa $\text{dotP}([2,4,1],[3,5,0])$.

Huomaa, että laskimen äskeistä syötettä ei saa lyhentää muotoon $\text{dotP}([2,4,1],[3,5])$, jossa on *samanaikaisesti* 2D- ja 3D-vektori, vaikkakin pistetulon $(2\bar{i} + 4\bar{j}) \bullet (3\bar{i} + 5\bar{j})$ voi kirjoittaa muodossa dotP([2,4],[3,5]).

Esimerkki. Lasketaan malliksi TI-laskimella helpon pallokoordinaatistovektorin ja helpon lieriökoordinaatistovektorin pistetulo

$$\text{dotP}([5, \angle 0, \angle 90°], [3, \angle 0, 0]) \ \hookleftarrow 15$$

Joko laskimella tai mielessäsi voit todeta, että pistetulon tekijävektorit ovat suorakulmaisessa muodossa $[5,0,0]$ ja [3,0,0] eli laskin laski pistetulon oikein.

Esimerkki. Laske vektoreiden $\bar{a} = [1,-2,2]$ ja $\bar{b} = [3,0,-4]$ välinen kulma.

Pistetulon määritelmästä $\bar{a} \bullet \bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\cos(\bar{a},\bar{b})$ voidaan ratkaista

$$\cos(\bar{a},\bar{b}) = \frac{\bar{a} \bullet \bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|} = \frac{1 \cdot 3 + (-2) \cdot 0 + 2 \cdot (-4)}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{-1}{3},$$

joten

$$\sphericalangle(\bar{a},\bar{b}) = \cos^{-1}(-\frac{1}{3}) = \underline{\underline{109.5^\circ}}$$

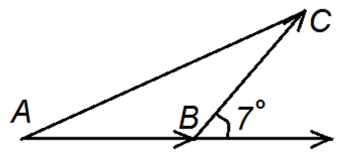
Huomautus. TI-laskimeen voi määritellä kaikissa koordinaattijärjestelmissä käyttökelpoisen funktion ”kulma”, joka laskee argumentteina annettavien vektoreiden välisen kulman suuruuden:

$$\text{Define kulma}(a,b) = \cos^{-1}\left(\text{dotP}(a,b) / \left(\text{norm}(a)\text{norm}(b)\right)\right)$$

Testi: Astemoodissa pitää edellisen esimerkin mukaisesti saada

$$\text{kulma}\left([1,-2,2],[3,0,-4]\right) \boxed{\leftarrow\!\!\lrcorner} \; 109.5$$

Esimerkki. Laske kolmion *ABC* kulma *B*, kun $\overrightarrow{AB} = [1,2,3]$ ja $\overrightarrow{BC} = [2,3,4]$.



Laskin antaa vektoreiden $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{BC}$ väliseksi kulmaksi 7.0° . Laskemamme kulma tarkoittaa kuitenkin sitä kulmaa, joka jää vektoreiden väliin, kun ne on siirretty alkamaan samasta pisteestä. Laskettu kulma onkin siis kolmion kulman *B* vieruskulma eli $\underline{\underline{\sphericalangle B = 173^\circ}}$.

Esimerkki. Koska pallokoordinaatistovektori $[5,\angle 0,\angle 90^\circ]$ ja lieriökoordinaatistovektori $[3,\angle 0,0])$ ovat positiivisen *x*-akselin suuntaisia, niin niiden välinen kulma on tietenkin 0. Sama todetaan määrittelemällämme kulmafunktiolla:

$$\text{kulma}([5,\angle 0,\angle 90^\circ],[3,\angle 0,0]) \leftarrow\!\!\lrcorner \; 0$$

Aiemmin todettu kohtisuoruusehto on voimassa myös 3D-vektoreille:

Kohtisuoruusehto. Kaksi vektoria on kohtisuorassa toisiaan vastaan silloin ja vain silloin, kun niiden pistetulo on nolla:

$$\bar{a} \perp \bar{b} \iff \bar{a} \bullet \bar{b} = 0$$

Esimerkki. $[2,5,1] \perp [5,2,\text{-}20]$, sillä $[2,5,1] \bullet [5,2,\text{-}20] = 10 + 10 - 20 = 0$.

Esimerkki. Haetaan vektori [*x,y,z*] , joka on kohtisuorassa vektoreita [1,2,3] ja [3,-2,1] vastaan.

Kohtisuoruusehdon mukaan vektorin [*x,y,z*] pistetulo annettujen vektoreiden kanssa on nolla, joten saamme yhtälöparin $\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 3x-2y+z=0 \end{cases}$,

jonka laskinratkaisusta $x=-n1$ and $y=-n1$ and $z=n1$ nähdään, että kohtisuoria vektoreita on äärettömän monta ja ne ovat muotoa

$[-z,-z,z]$, missä z on mielivaltainen reaaliluku.

Pistetulot voi jättää myös laskimen laskettavaksi seuraavasti

$$\text{solve}\left(\text{dotP}\left([x,y,z],[1,2,3]\right)=0 \text{ and } \text{dotP}\left([x,y,z],[3,-2,1]\right)=0,\{x,y,z\}\right)$$

Tehtävän voi ratkaista vähäisemmilläkin omilla tiedoilla käyttäen aikaisemmin määriteltyä kulmafunktiota seuraavasti:

$$\text{solve(kulma}\left([x,y,z],[1,2,3]\right)=90^\circ \text{ and kulma}\left([x,y,z],[3,-2,1]\right)=90^\circ,x,y,z)$$

Jos laskut on suoritettava käsin, niin tämä esimerkki kannattaa myöhemmin ratkaista ristitulon avulla, koska silloin ei tarvitse ratkaista mitään yhtälöparia.

Vektoreiden pistetulolausekkeille on voimassa seuraavan lauseen mukaiset vaihdantalaki (i) , osittelulaki (ii) ja skalaaritekijän siirtosääntö (iii).

Lause. (i) $\overline{a}\bullet\overline{b}=\overline{b}\bullet\overline{a}$

(ii) $(\overline{a}+\overline{b})\bullet(\overline{c}+\overline{d})=\overline{a}\bullet\overline{c}+\overline{a}\bullet\overline{d}+\overline{b}\bullet\overline{c}+\overline{b}\bullet\overline{d}$

(iii) $(t\overline{a})\bullet\overline{b}=t(\overline{a}\bullet\overline{b})=\overline{a}\bullet(t\overline{b})$

Todistus. Pistetulon vaihdantalaki perustuu kertolaskun vaihdantalakiin:

$$\overline{a}\bullet\overline{b}=[a_1,a_2,a_3]\bullet[b_1,b_2,b_3]=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=b_1a_1+b_2a_2+b_3a_3=\overline{b}\bullet\overline{a}$$

Osittelulain todistus on pidempi, vaikkakin perustuu perusalgebran lakeihin:

$$\begin{aligned}
&(\overline{a}+\overline{b})\bullet(\overline{c}+\overline{d})=([a_1,a_2,a_3]+[b_1,b_2,b_3])\bullet([c_1,c_2,c_3]+[d_1,d_2,d_3])\\
&=[a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3]\bullet[c_1+d_1,c_2+d_2,c_3+d_3]\\
&=(a_1+b_1)(c_1+d_1)+(a_2+b_2)(c_2+d_2)+(a_3+b_3)(c_3+d_3)\\
&=(a_1c_1+a_1d_1+b_1c_1+b_1d_1)+(a_2c_2+a_2d_2+b_2c_2+b_2d_2)+(a_3c_3+a_3d_3+b_3c_3+b_3d_3)\\
&=(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)+(a_1d_1+a_2d_2+a_3d_3)+(b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3)+(b_1d_1+b_2d_2+b_3d_3)\\
&=\overline{a}\bullet\overline{c}+\overline{a}\bullet\overline{d}+\overline{b}\bullet\overline{c}+\overline{b}\bullet\overline{d}
\end{aligned}$$

Skalaaritekijän siirtosääntö todistetaan osoittamalla, että kaikki siinä esiintyvät lausekkeet voidaan laskea auki muotoon $ta_1b_1+ta_2b_2+ta_3b_3$.

Huomautus. Kaikki tähän mennessä oppimamme vektorien laskutoimitukset

- yhteen- ja vähennyslasku
- skalaarilla kertominen
- pistetulo

noudattavat (lähes poikkeuksetta) lukujen yhteen-, vähennys- ja kertolaskua koskevia algebran laskulakeja.

Huomautus. Pistetulolausekkeilla laskeminen poikkeaa luvuilla laskemisesta seuraavasti:

- kolmen vektorin pistetulolauseke $\bar{a}\bullet(\bar{b}\bullet\bar{c})$ tai $(\bar{a}\bullet\bar{b})\bullet\bar{c}$ ei ole määritelty, koska pistetuloa ei määritellä luvun ja vektorin välillä
- luvuilla voimassa olevaa tulon nollasääntöä
$$a\ b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a = 0 \text{ tai } b = 0)$$
vastaa vektoreiden kohtisuoruusehto
$$\bar{a}\bullet\bar{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{a} \perp \bar{b}\ .$$
Vektoreiden pistetulo voi siis olla nolla, vaikka kumpikaan tekijöistä ei ole nollavektori, riittää, että vektorit ovat kohtisuorassa.
- Lukujen osamäärälauseke $\dfrac{a\cdot c}{b\cdot c}$ voidaan supistaa muotoon $\dfrac{a}{b}$, mutta vektorien vastaavaa lauseketta $\dfrac{\bar{a}\bullet\bar{c}}{\bar{b}\bullet\bar{c}}$ ei voi supistaa, koska supistamisen jälkeen jäljelle jäävän kahden vektorin osamäärää ei olisi edes määritelty.

Huomautus. Pistetulon laskusääntö
$$(a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k})\bullet(b_1\bar{i} + b_2\bar{j} + b_3\bar{k}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$
saattaa vaikuttaa ristiriitaiselta pistetulon osittelulain kanssa, jonka mukaan kyseinen pistetulo pitäisi laskea yhdeksänä pikkutulona muodossa
$$(a_1\bar{i}+a_2\bar{j}+a_3\bar{k})\bullet(b_1\bar{i}+b_2\bar{j}+b_3\bar{k})$$
$$=a_1b_1\bar{i}\bullet\bar{i}+a_1b_2\bar{i}\bullet\bar{j}+a_1b_3\bar{i}\bullet\bar{k}+a_2b_1\bar{j}\bullet\bar{i}+a_2b_2\bar{j}\bullet\bar{j}+a_2b_3\bar{j}\bullet\bar{k}+a_3b_1\bar{k}\bullet\bar{i}+a_3b_2\bar{k}\bullet\bar{j}+a_3b_3\bar{k}\bullet\bar{k}$$
Kohtisuoruusehdon vuoksi kuitenkin kuusi pistetulolauseketta häviää. Kolmea jäljelle jäävää lauseketta voidaan edelleen sieventää, koska esimerkiksi $\bar{i}\bullet\bar{i} = |\bar{i}||\bar{i}|\cos(\bar{i},\bar{i}) = 1$. Osittelulain mukainen lauseke sievenee siis jo tutuksi tulleeksi pistetulon laskusäännöksi.

Huomautus. Koska $\bar{a}\bullet\bar{a} = |\bar{a}||\bar{a}|\cos(\bar{a},\bar{a}) = |\bar{a}|^2$, niin
$$\bar{a}\bullet\bar{a} = |\bar{a}|^2$$
$$|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a}\bullet\bar{a}}$$

Tehtäviä

18.6 Laske vektoreiden **v)** $\bar{a} = [1,2,1]$ ja $\bar{b} = [2,4,2]$

a) $\bar{c} = [1,2,2]$ ja $\bar{d} = [-1,-2,-2]$ pistetulo käsin sekä määritelmän että laskusäännön avulla. Tarvittavan kulman voit päätellä. Tarkista tuloksesi vielä laskimellakin.

18.7 Tarkastellaan kolmioita **v)** $A(1,2,3)B(3,1,5)C(8,13,5)$
a) $A(1,1,1)B(3,4,3)C(3,5,7)$. Laske sekä laskintasi funktiolaskimena käyttäen että sitä tehokkaasti hyödyntäen vektoreiden $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{BC}$ välinen kulma. Kuinka suuri on kolmion kulma B?

18.8 Laske voiman **v)** $\bar{F} = [3,2,5]$ N **a)** $\bar{F} = [3,2,1]$ N tekemä työ siirtymässä $\bar{s} = [2,-1,4]$ m.

18.9 Määritä vektoreiden **v)** $[2,2,1]$ ja $[3,2,t]$ **a)** $[1,2,3]$ ja $[3,-2,t]$ välinen kulma, kun $t = 2$. Millä t:n arvolla vektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan?

18.10

18.11 Olkoon $\bar{a} = [2,-3,1]$ ja $\bar{b} = [1,1,4]$. Laske usein esiintyvät lausekkeet $|\bar{a}||\bar{b}|\cos(\bar{a},\bar{b})$ ja $|2\bar{a}||5\bar{b}|\cos(5\bar{a},2\bar{b})$ päässälaskuina. Tulokset voit tarkistaa laskimella, mutta vielä nopeammin sinun pitäisi selvitä tehtävästä päässä laskien!

18.11 Laske sekä käsin (kuvasta voit katsoa tarvittavat kulmat) että laskimella pallokoordinaatistovektorin $\bar{b} = [6,\angle 90°,\angle 90°]$ ja lieriökoordinaatistovektorin **v)** $\bar{v} = [3,\angle 90°,0]$ **a)** $\bar{a} = [4,\angle -90°,5]$ pistetulo.

18.12 Määritä vektoreiden $[5, 0, 0]$, $[5, \angle 90°, 0]$, $[5, \angle 90°, \angle 30°]$ ja $[5, \angle 90°, 5]$ väliset kulmat sekä havainnollistavan kuvan avulla että laskimeen määrittelemääsi kulmafunktiota käyttäen. Huomaa, että tässäkin tehtävässä vektorit on annettu eri koordinaatistoissa siten, että vektorin koordinaattiesityksessä olevien kulmamerkkien määrä ilmaisee, mistä koordinaatistosta on kyse.

18.13 Määritä maapallon pinnalla olevien paikkojen
v) A: $60°$ pohjoista leveyttä ja $55°$ itäistä pituutta sekä B: $20°$ eteläistä leveyttä ja $90°$ läntistä pituutta
a) A: $40°$ eteläistä leveyttä ja $20°$ itäistä pituutta sekä B: $60°$ pohjoista leveyttä ja $50°$ läntistä pituutta
välinen lyhin etäisyys sekä i) maan läpi mitattuna että
ii) maan pintaa pitkin. Maapallon ympärysmitta on 40000 km.

18.2 Avaruusvektoreiden pistetulo

Tutkittaessa 3-ulotteisen avaruuden vektorin projektiota toisella saman avaruuden vektorilla, kannattaa vektorit siirtää alkamaan samasta pisteestä. Silloin vektorit ovat saman tason vektoreita ja vektorin projektio määritellään kuten tasovektorinkin projektio. Projektiovektorin laskukaavakin on sama, vaikka kaavassa olevat pistetulot on laskettava avaruusvektoreiden pistetuloina.

Lause. Vektorin $\bar{a}$ projektio vektorilla $\bar{b}$ voidaan laskea kaavasta

$$\bar{a}_b = \left(\frac{\bar{a}\bullet\bar{b}}{\bar{b}\bullet\bar{b}}\right)\bar{b} \quad .$$

Esimerkki. Laske vektorin $\bar{v} = [3,0,6]$ projektio vektorilla $\bar{u} = [2,1,-2]$.

$$\bar{v}_u = \left(\frac{\bar{v}\bullet\bar{u}}{\bar{u}\bullet\bar{u}}\right)\bar{u} = \left(\frac{3\cdot 2+0\cdot 1+6\cdot(-2)}{2\cdot 2+1\cdot 1+(-2)\cdot(-2)}\right)[2,1,-2]$$

$$= \frac{-6}{9}\ [2,1,-2] = \underline{\underline{[-\frac{4}{3},-\frac{2}{3},\frac{4}{3}]}}$$

Saman projektiovektorin voi laskea myös TI-laskimen komennoilla

(dotP([3,0,6],[2,1,-2]) / dotP([2,1,-2],[2,1,-2])) [2,1,-2]

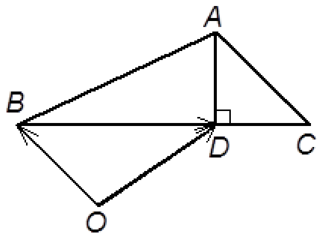
(dotP(*v*,*u*)/dotP(*u*,*u*)) *u* | *v* = [3,0,6] and *u* = [2,1,-2]

Huomautus. Laskimeen kannattaa määritellä funktio vp, joka laskee ensimmäisenä argumenttina annettavan **v**ektorin **p**rojektion toisen argumentin mukaiselle vektorille:

Define vp(*a*,*b*) = (dotP(*a*,*b*)/dotP(*b*,*b*))*b*

Testi: vp([3,0,6],[2,1,-2]) ↵ $[-\frac{4}{3},-\frac{2}{3},\frac{4}{3}]$

Esimerkki. Laske kolmion $A(3,4,1)B(1,4,2)C(5,2,0)$ korkeusjanan AD kantapiste D.

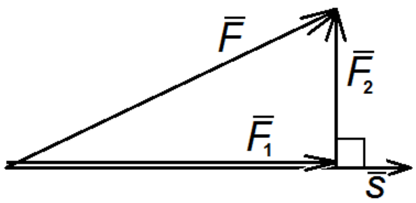


Koska $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA}_{BC}$, niin syötteellä

$[1,4,2] + \text{vp}([3,4,1]-[1,4,2],[5,2,0]-[1,4,2])$

saadusta paikkavektorista [8/3, 19/6, 7/6] saadaan kantapiste $\underline{\underline{D=(8/3,19/6,7/6)}}$

Esimerkki. Jaa voima $\overline{F} = [1,2,3]$ siirtymän $\overline{s} = [3,1,0]$ suuntaiseen ja siirtymää vastaan kohtisuoraan komponenttiin.



Siirtymän suuntainen komponentti saadaan lausekkeesta

$$\overline{F}_1 = \overline{F}_s = \text{vp}([1,2,3],[3,1,0]) = [1.5,\ 0.5,\ 0].$$

Koska komponenttien summa on $\overline{F}$, niin

$$\overline{F}_2 = \overline{F} - \overline{F}_1 = [1,2,3] - [1.5, 0.5, 0] = [-0.5, 1.5, 3].$$

Lasketaan tarkistuksen vuoksi vielä $\overline{F}_2 \cdot \overline{s} = -1.5 + 1.5 + 0 = 0$, joten kohtisuoruusehdon mukaan $\overline{F}_2 \perp \overline{s}$, kuten vaadittiinkin.

Tehtäviä

18.14 Jaa vektori **v)** $\overline{v} = [7,7,7]$ **a)** $\overline{v} = [6,5,4]$ vektorin $\overline{a} = [1,2,3]$ suuntaiseen ja vektoria $\overline{a}$ vastaan kohtisuoraan komponenttiin.

18.15 Määritä pisteen **v1)** P(3,0,1) **a)** Q(4,1,2) peilikuvapiste suoran K(0,0,1)L(3,3,4) suhteen. **(Vanha 18.5)**

18.5 Ristitulo eli vektoritulo

Määritelmä. Kolme vektoria $\overline{a}$, $\overline{b}$ ja $\overline{c}$, jotka eivät ole saman tason suuntaisia, muodostavat tässä järjestyksessä **oikeakätisen kolmikon**, mikäli voimme asettaa oikean käden peukalon, etusormen ja keskisormen näiden vektoreiden suuntaisiksi mainitussa järjestyksessä siten, että keskisormi osoittaa kämmenen sisäpuolelle.

Vasenkätinen kolmikko määritellään vastaavalla tavalla.

Jos vektorit ovat saman tason suuntaisia, niin kolmikon kätisyyttä ei määritellä.

Esimerkki. Kolmikko $\overline{i}$, $\overline{j}$ ja $\overline{k}$ ja siitä kiertovaihtelulla saatavat kolmikot $\overline{j}$, $\overline{k}$ ja $\overline{i}$ sekä $\overline{k}$, $\overline{i}$ ja $\overline{j}$ ovat oikeakätisiä.

Määritelmä. Vektoreiden $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ **ristitulo** eli **vektoritulo** $\overline{a}\times\overline{b}$ on vektori, joka toteuttaa seuraavat kolme ehtoa

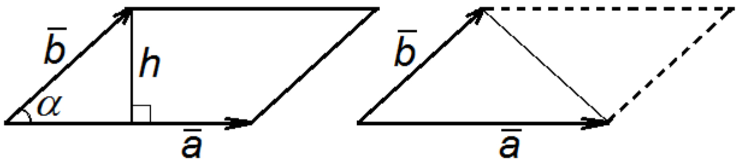
(i) $\overline{a}\times\overline{b}$ on kohtisuorassa vektoreita $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ vastaan,

(ii) kolmikko $\overline{a}$, $\overline{b}$ ja $\overline{a}\times\overline{b}$ on oikeankätinen,

(iii) vektorin $\overline{a}\times\overline{b}$ pituus on $|\overline{a}\times\overline{b}| = |\overline{a}||\overline{b}|\sin(\overline{a},\overline{b})$.

Huomautus. Ristituloa ei yleensä lasketa määritelmän perusteella vaan käyttäen kohta esitettävää ristitulon laskusääntöä tai laskinta tms.
Luonnossa on kuitenkin monia tilanteita, joissa esiintyy yo määritelmän mukainen vektori tai pituusehdon (iii) mukainen skalaarilauseke. Meidän onkin hallittava ristitulon määritelmä, jotta käytännössä vastaantulevista lausekkeista näkisimme, onko kyseessä ristitulo tai ristitulon pituus. Tämän todettuamme ristitulo lasketaankin sitten yleensä apuvälineillä.

Huomautus. Jos suunnikkaan sivuvektorit ovat $\overline{a}$ ja $\overline{b}$, niin suunnikkaan ala on $A_{\text{suunnikas}} = |\overline{a}|h = |\overline{a}||\overline{b}|\sin\alpha = |\overline{a}||\overline{b}|\sin(\overline{a},\overline{b}) = |\overline{a}\times\overline{b}|$.



Koska lisäksi kolmion ala on puolet vastaavan suunnikkaan alasta, niin saamme seuraavat tulokset.

Lause. Suunnikkaan ja kolmion alat saadaan kahden sivuvektorin ristitulon avulla

$$\boxed{A_{\text{suunnikas}} = |\overline{a}\times\overline{b}|}$$

$$\boxed{A_{\text{kolmio}} = \frac{1}{2}|\overline{a}\times\overline{b}|}$$

Esimerkki. Jos hiukkanen, jonka varaus on q, liikkuu nopeudella $\overline{v}$ magneettikentässä, jonka kenttävoimakkuus on $\overline{B}$, niin hiukkaseen vaikuttaa voima $\overline{F}$, jonka suuruus on $|\overline{F}| = |q||\overline{v}||\overline{B}|\sin(\overline{v},\overline{B})$ ja joka on kohtisuorassa sekä nopeutta $\overline{v}$ että kenttävoimakkuutta $\overline{B}$ vastaan. Itse asiassa

$$\overline{F} = q(\overline{v}\times\overline{B}).$$

Ristitulon laskusääntö. Vektorien $\bar{a} = [a_1, a_2, a_3]$ ja $\bar{b} = [b_1, b_2, b_3]$ ristitulo on

$$\bar{a} \times \bar{b} = [a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1] \ .$$

Ristitulon laskusäännön perustelu.

Osoitamme ensin kohtisuoruusehtoa käyttäen, että laskusäännön mukainen vektori on kohtisuorassa esimerkiksi vektoria $\bar{a}$ vastaan, sillä

$$\begin{aligned} &[a_1, a_2, a_3] \cdot [a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1] \\ &= a_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) + a_2(a_3 b_1 - a_1 b_3) + a_3(a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0 \end{aligned}$$

Samoin osoitetaan, että ko. vektori on kohtisuorassa vektoria $\bar{b}$ vastaan ja toteuttaa siis määritelmän kohdan (i) ehdot.

Seuraavassa lasketaan säännössä esitetyn vektorin pituuden neliö

$$\begin{aligned} &\left|[a_2 b_3 - a_3 b_2\ ,\ a_3 b_1 - a_1 b_3\ ,\ a_1 b_2 - a_2 b_1]\right|^2 \\ &= \sqrt{(a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}^{\,2} \\ &= (a_2^2 b_3^2 - 2a_2 a_3 b_2 b_3 + a_3^2 b_2^2) + (a_3^2 b_1^2 - 2a_1 a_3 b_1 b_3 + a_1^2 b_3^2) \\ &\qquad + (a_1^2 b_2^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 + a_2^2 b_1^2) \end{aligned}$$

Tässä on kaikki samat termit kuin määritelmän mukaan pitää ristitulon $\bar{a} \times \bar{b}$ pituuden neliössä ollakin:

$$\left|\bar{a}\right|^2 \left|\bar{b}\right|^2 \sin^2(\bar{a}, \bar{b}) = \left|\bar{a}\right|^2 \left|\bar{b}\right|^2 \left(1 - \cos^2(\bar{a}, \bar{b})\right) = \left|\bar{a}\right|^2 \left|\bar{b}\right|^2 \left(1 - \left(\frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{\left|\bar{a}\right|\left|\bar{b}\right|}\right)^2\right) = \left|\bar{a}\right|^2 \left|\bar{b}\right|^2 - (\bar{a} \cdot \bar{b})^2$$

$$\begin{aligned} &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \\ &= (\cancel{a_1^2 b_1^2} + a_1^2 b_2^2 + a_1^2 b_3^2 + a_2^2 b_1^2 + \cancel{a_2^2 b_2^2} + a_2^2 b_3^2 + a_3^2 b_1^2 + a_3^2 b_2^2 + \cancel{a_3^2 b_3^2}) \\ &\qquad - (\cancel{a_1^2 b_1^2} + \cancel{a_2^2 b_2^2} + \cancel{a_3^2 b_3^2} + 2a_1 a_2 b_1 b_2 + 2a_1 a_3 b_1 b_3 + 2a_2 a_3 b_2 b_3) \\ &= a_1^2 b_2^2 + a_1^2 b_3^2 + a_2^2 b_1^2 + a_2^2 b_3^2 + a_3^2 b_1^2 + a_3^2 b_2^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 - 2a_1 a_3 b_1 b_3 - 2a_2 a_3 b_2 b_3 \end{aligned}$$

Vertaamalla edellä laskettuja kahta neliölauseketta havaitaan, että ristitulon laskusäännön mukainen vektori toteuttaa määritelmän ehdon (iii).

Sivuutamme kolmikon $\bar{a}$, $\bar{b}$ ja $\bar{a} \times \bar{b}$ kätisyyttä koskevan ehdon (ii).

Ristitulon laskusääntö on helppo muistaa muodossa:

$$\boxed{\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}} \ .$$

Esimerkki. $[1,2,3]\times[3,-1,2]=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \underbrace{\left|\begin{array}{ccc|cc} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} & \bar{i} & \bar{j} \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right. = 4\bar{i}+9\bar{j}-\bar{k}-6\bar{k}+3\bar{i}-2\bar{j}}_{\text{Kolme laskevaa tuloa miinus kolme nousevaa tuloa}} = \underline{\underline{[7,\ 7,\ -7]}}$

Huomautus. Ristitulon (eli kahta annettua avaruusvektoria vastaan kohtisuoran vektorin) laskeminen 3-rivisenä determinanttina on yleistys aikaisemmin todetulle tulokselle, jonka mukaan eräs tasovektoria $[a_1, a_2]$ vastaan kohtisuora tasovektori saatiin kaksirivisenä determinanttina $\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}$.

Huomautus. Ristitulon voi laskea käyttäen TI-laskimen funktiota crossP .
Edellisen esimerkin tulos saadaan siis kätevämmin seuraavasti

crossP([1, 2, 3], [3, −1, 2]) ↵ [7,7,−7]

Esimerkki. Koska kolmion $A(0,1,2)B(2,4,2)C(5,1,6)$ ala on $A=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|$, niin syötteestä 1/2 norm(crossP([2, 3, 0], [5, 0, 4])) saamme kolmion alalle arvon $\underline{\underline{10.4}}$.

Lause. Vektoreiden ristitulolle on voimassa seuraavat yleiset lait:

(i) $\bar{a}\times\bar{a}=\bar{0}$

(ii) $\bar{a}\times\bar{b}=-\bar{b}\times\bar{a}$ (antisymmetria)

(iii) $(\bar{a}+\bar{b})\times(\bar{c}+\bar{d})=\bar{a}\times\bar{c}+\bar{a}\times\bar{d}+\bar{b}\times\bar{c}+\bar{b}\times\bar{d}$ (osittelulaki)

(iv) $(t\bar{a})\times\bar{b}=t(\bar{a}\times\bar{b})=\bar{a}\times(t\bar{b})$ (skalaaritekijän siirtosääntö)

Lauseen kohdat (i) ja (ii) ovat seurauksia ristitulon määritelmästä.

Kohdan (iii) voi todistaa oikeaksi toteamalla väitteen vasemman ja oikean puolen erotuksen nollaksi käsin laskien tai laskimen lausekkeella

crossP(*a*+*b*,*c*+*d*)-crossP(*a*,*c*)-crossP(*a*,*d*)-crossP(*b*,*c*)-crossP(*b*,*d*) |
a=[*a*1,*a*2,*a*3] and *b*=[*b*1,*b*2,*b*3] and *c*=[*c*1,*c*2,*c*3] and *d*=[*d*1,*d*2,*d*3]

Myös kohdan (iv) voi todeta oikeaksi käsin laskien tai laskimella.

Huomautus. Koska ristitulo ei noudata liitäntälakia, niin lausekkeet
$\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})$ ja $(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c}$ ovat yleensä erisuuret.

Tehtäviä

18.16 Määritä jokin vektoreita **v)** $\bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}$ ja $\bar{b} = 2\bar{i} + 3\bar{j} + \bar{k}$
a) $\bar{a} = [2,4,1]$ ja $\bar{b} = [-2,3,4]$ vastaan kohtisuora vektori.

18.17 Määritä kolmion **v)** A(2,1,0) B(3,1,1) C(4,0,-2)
a) A(3,2,1)B(4,2,2)C(5,1,-1) pinta-ala.

18.18 Määritä jokin piste, joka on 9 yksikön etäisyydellä kolmion
v) A(1,1,1)B(3,1,2)C(1,2,2) **a)** A(1,2,3)B(3,2,4)C(1,3,4)
määrittämästä tasosta.

18.19 Jaa vektori **v)** $\bar{v} = [6,9,3]$ **a)** $\bar{v} = [5,16,0]$ vektoreiden $\bar{a} = [1,2,3]$ ja $\bar{b} = [2,0,1]$ suuntaisiin ja niitä vastaan kohtisuoraan komponenttiin. Aikaimpi 18.12

18.20 Olkoon $\bar{a} = [2,-3,1]$ ja $\bar{b} = [1,1,4]$. Laske ilman laskinta
a) $|\bar{a}||\bar{b}|\sin(\bar{a},\bar{b})$, $|\bar{a}||\bar{b}|\cos(\bar{a},\bar{b})$, $|5\bar{a}||4\bar{b}|\sin(2\bar{a},3\bar{b}$
v) $|\bar{a}|^2 |\bar{b}|^2 \sin\left(2 \cdot \sphericalangle(\bar{a},\bar{b})\right)$.

Tulokset voit tietenkin helposti tarkistaa kunnollisella laskimella, joskaan laskin ei ehkä anna kohdan v) alkuperäisestä lausekkeesta yhtä kaunista vastausta kuin sinun pitäisi saada jopa nopeammin ilman laskinta kynällä paperille laskien, kunhan vain huomaat sieventää lauseketta!

18.6 Kolmituloista

Piste- ja ristituloa käyttäen voi kolmen vektorin välille yrittää muodostaa seuraavat tulot, joita tekijöiden lukumäärän perusteella sanotaan **kolmituloiksi**, mikäli tulot ovat määritellyt:

1) $\bar{a}\bullet(\bar{b}\bullet\bar{c})$ ei ole määritelty vektorin ja skalaarin pistetulona
2) $(\bar{a}\bullet\bar{b})\bullet\bar{c}$ ei ole määritelty skalaarin ja vektorin pistetulona
3) $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})$ on tietty **vektori** kahden vektorin ristitulona
4) $(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c}$ on tietty **vektori** kahden vektorin ristitulona
5) $\bar{a}\bullet(\bar{b}\times\bar{c})$ on tietty **skalaari** kahden vektorin pistetulona
6) $(\bar{a}\times\bar{b})\bullet\bar{c}$ on tietty **skalaari** kahden vektorin pistetulona
7) $\bar{a}\times(\bar{b}\bullet\bar{c})$ ei ole määritelty vektorin ja skalaarin ristitulona
8) $(\bar{a}\bullet\bar{b})\times\bar{c}$ ei ole määritelty skalaarin ja vektorin ristitulona

Kohtien 3) ja 4) tuloja sanotaan **vektorikolmituloiksi**, koska näiden kolmitulojen arvot ovat vektoreita. Koska ristitulo ei noudata liitäntälakia, niin kohtien 3) ja 4) vektorikolmitulot ovat yleensä erisuuret.

Kohtien 5) ja 6) tuloja sanotaan **skalaarikolmituloiksi**, koska näiden kolmitulojen arvot ovat skalaareita. Voidaan osoittaa, että kohtien 5) ja 6) skalaarikolmitulot ovat aina yhtä suuret.

Jos kolmitulossa on yksi risti ja yksi piste, niin kohtien 5-8) mukaan ristitulo on laskettava ennen pistetuloa, jotta lauseke olisi määritelty. Tähän perustuen skalaarikolmituloista käytetään toisinaan merkintöjä $\bar{a}\bullet\bar{b}\times\bar{c}$ ja $\bar{a}\times\bar{b}\bullet\bar{c}$ ilman sulkeita, koska oletetaan, että lukija laittaa sulut siten, että lausekkeet on määritelty.

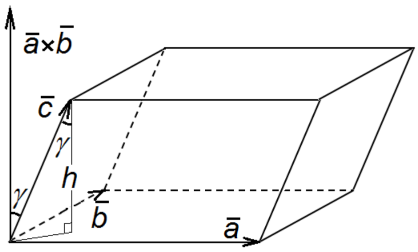
Esimerkki. Olkoon $\bar{a}=[1,2,3]$, $\bar{b}=[4,3,2]$ ja $\bar{c}=[5,2,3]$. Lasketaan edellä mainitut kolmitulot laskimella seuraavista syötteistä

[1,2,3] $\boxed{\text{STO}\rightarrow}$ *a* : [4,3,2] $\boxed{\text{STO}\rightarrow}$ *b* : [5,2,3] $\boxed{\text{STO}\rightarrow}$ *c*

3) crossP(*a*,crossP(*b*,*c*)) Tulos: [-8, 22, -12]
4) crossP(crossP(*a*,*b*),*c*) Tulos: [40, -10, -60]
5) dotP(*a*,crossP(*b*,*c*)) Tulos: -20
6) dotP(crossP(*a*,*b*),*c*) Tulos: -20

Lause. Jos suuntaissärmiön erisuuntaiset särmävektorit ovat $\bar{a}$, $\bar{b}$ ja $\bar{c}$ (missä järjestyksessä ja kumpaan suuntaan tahansa), niin suuntaissärmiön tilavuus on

$$\boxed{V_{\text{suuntaissärmiö}} = \left|(\bar{a}\times\bar{b})\bullet\bar{c}\right|}.$$

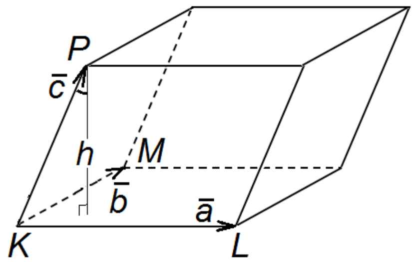


Perustelu. Jos samasta kärjestä lähtevät särmävektorit muodostavat kuvan mukaisesti oikeakätisen kolmikon, niin

$$V_{\text{suuntaissärmiö}} = A_{\text{pohja}}\cdot h = \left|\bar{a}\times\bar{b}\right|\cdot h = \left|\bar{a}\times\bar{b}\right|\cdot\left|\bar{c}\right|\cos\gamma = \bar{a}\times\bar{b}\bullet\bar{c}$$

Kaavan itseisarvomerkit tarvitaan, jos särmävektorikolmikko on vasenkätinen tai jokin särmävektoreista on laskettu ”väärään” suuntaan.

Esimerkki. Laske pisteen $P(4,5,6)$ etäisyys pisteiden $K(0,0,1)$, $L(3,5,2)$ ja $M(3,2,1)$ määräämästä tasosta.



Annetuista pisteistä voidaan täydentää suuntaissärmiö, jonka tilavuus voidaan laskea kahdella eri tavalla:

$$A_{\text{pohjasuunnikas}}\cdot h = \left|(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}\right| \Leftrightarrow h = \frac{\left|(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}\right|}{\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|}$$

Etäisyys saadaan laskinsyötteestä

$$\frac{\text{abs(dotP(crossP}(a,b),c))}{\text{norm(crossP}(a,b))}\ \Big|\ a=[3,5,1] \text{ and } b=[3,2,0] \text{ and } c=[4,5,5] \quad ↵ \quad \underline{\underline{3.92}}$$

Huomautus. Lausekkeiden $\left|\bar{a}\bullet\bar{b}\right|$ ja $\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|$ pystyviivat esittävät eri operaatioita.

Pistetulon ympärillä pystyviivat tarkoittavat sisällä olevan lukuarvoisen lausekkeen itseisarvoa, joka yleisesti lasketaan apuvälineiden abs-funktiolla. Vektoritulon ympärillä pystyviivat tarkoittavat sisällä olevan vektoriarvoisen lausekkeen pituutta, jonka jotkin laskimet laskevat abs-funktiolla ja jotkin toiset (kuten TI-laskin) laskevat norm-funktiolla.

Tehtävä

18.21 Tarkastellaan suuntaissärmiötä, jonka kärjestä **v)** $A(4, 2{,}0)$
a) $A(1,1,1)$ lähtevät särmät päättyvät pisteisiin $B(2,3,4)$, $C(5,4,3)$ ja $D(7,3,0)$. Määritä suuntaissärmiön tilavuus ja kärjen D etäisyys pisteiden A, B ja C kautta kulkevasta tasosta.

19. KOMPLEKSILUVUISTA

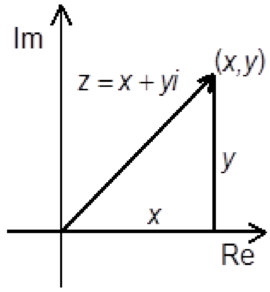
19.1 Suorakulmainen muoto

Kompleksiluvut ovat muotoa $x + yi$ olevia kirjoitelmia, missä x ja y ovat mielivaltaisia reaalilukuja sekä i on ns. **imaginaariyksikkö**, joka toteuttaa ehdon

$$i^2 = -1.$$

Kompleksilukujen peruslaskutoimitukset (yhteen-, vähennys- ja kertolasku sekä kokonaispotenssiin korotus) suoritetaan kuten vastaavat laskut tavallisilla kirjainlausekkeilla ottaen tarvittaessa huomioon, että $i^2 = -1$.

Koska reaaliakselilta ei löydy em. ehdon toteuttavaa lukua i, niin kompleksilukuja ei voi havainnollistaa reaaliakselin pisteillä, vaan havainnollistamisessa käytetään apuna kaksiulotteista xy-tasoa, jota sanotaan nyt **kompleksitasoksi**.



Kompleksilukua $z = x + yi$ kuvataan kompleksitason pisteellä (x,y) tai tämän pisteen paikkavektorilla.
Kompleksitason akseleita sanotaan **reaali- ja imaginaariakseliksi**.

Kompleksiluvun $z = x + yi$ kertoimia x ja y sanotaan kompleksiluvun **reaali- ja imaginaariosiksi** ja niitä merkitään $x = \mathrm{Re}(z)$ ja $y = \mathrm{Im}(z)$

Kompleksiluvun imaginaariosa on pelkkä imaginaariyksikön kerroin ilman imaginaariyksikköä, joten imaginaariosa on reaalinen!

TI-laskimessa reaali- ja imaginaariosien tunnukset ovat Real(z) ja Imag(z).

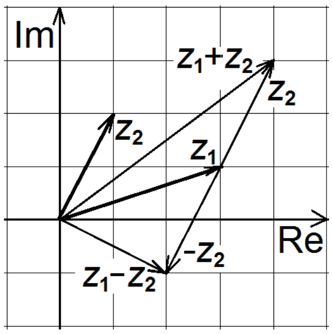
Kompleksiluvun esitysmuotoa $z = x + yi$ voidaan sanoa esimerkiksi

- **summamuodoksi**, koska kompleksiluku on esitetty summana
- **suorakulmaiseksi muodoksi**, koska esityksessä käytetään apuna kompleksitason pisteen suorakulmaisia koordinaatteja eikä napakoordinaatteja, mikä olisi myös mahdollista
- **algebralliseksi muodoksi**, koska esityksessä ei tarvita trigonometrisiä funktioita eikä eksponenttifunktiota

Kompleksiluvun summamuoto soveltuu hyvin yhteen- ja vähennyslaskun suorittamiseen seuraavan esimerkin mukaisesti.

Esimerkki. $(3+i)+(1+2i)=4+3i$

$(3+i)-(1+2i)=2-i$



Kompleksilukujen yhteen- ja vähennyslaskua on helppo havainnollistaa käyttäen kompleksitason vektoreita, joiden graafinen yhteen- ja vähennyslasku suoritetaan kuten muillakin vektoreilla.
Viereisessä kuvassa $z_1=3+i$ ja $z_2=1+2i$.

Määritelmä. Kompleksiluvun $z=x+yi$ **itseisarvo** $|z|$ tarkoittaa kompleksilukua esittävän vektorin pituutta ts.

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2} \quad .$$

Määritelmä. Kompleksiluvun $z=x+yi$ **liittoluku** $\bar{z}$ saadaan vaihtamalla imaginaariosan merkki ts. $\bar{z}=x-yi$.

Esimerkki. $|3-4i|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$, $\overline{3-4i}=3+4i$

Huomautus. Joissakin kirjoissa kompleksiluvun tunnuksena käytetään vektoriopista tuttua merkintää, jossa kirjaimen päällä on viiva. Tällaisessa esityksessä esimerkiksi $\bar{z}$ tarkoittaa jotakin kompleksilukua sinänsä eikä kompleksiluvun z liittolukua. Jos viiva ilmoittaa luvun kompleksisuutta, niin liittoluvun tunnuksena voidaan käyttää esimerkiksi tähteä, jolloin $\bar{z}^*$ on kompleksiluvun $\bar{z}$ liittoluku. Koska merkinnät vaihtelevat eri kirjoissa, niin uutta kirjaa käytettäessä on merkinnät aina ensin tarkistettava.

Lause. $z\cdot\bar{z}=|z|^2$

Todistus. Edellä käytetyin merkinnöin

$$z\cdot\bar{z}=(x+yi)(x-yi)=x^2-(yi)^2=x^2+y^2=|z|^2 .$$

Huomautus. Kompleksiluvun itseisarvolle on voimassa reaalialueelta tutut tulokset, jotka esitetään seuraavassa lauseessa.

Lause. $|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$ (kolmioepäyhtälö)

$|z_1 \cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

Lause. Liittoluvuilla on mm. seuraavat ominaisuudet

$$\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1}+\overline{z_2} \quad , \quad \overline{z_1-z_2} = \overline{z_1}-\overline{z_2} \quad , \quad \overline{z_1\cdot z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2} \quad , \quad \overline{z_1/\ z_2} = \overline{z_1}/\ \overline{z_2}$$

Huomautus. Imaginaariyksikön tunnuksena TI-laskimessa on symbolivalikoista löytyvä ”kaunokirjoitus i” , eikä alpha-i . Jatkossa tässä monisteessa ei tehdä eroa näiden symbolien välillä.

Huomautus. Itseisarvon ja liittoluvun tunnuksina TI-laskimessa käytetään funktioita abs() ja conj() .

Esimerkki. Liittoluvuille esitetyt tulokset voi todeta oikeiksi olettamalla luvuille z_1 ja z_2 esitykset x_1+y_1i ja x_2+y_2i ja laskemalla yhtälöiden molemmat puolet joko käsin tai laskimella. Yhtälön puolten vertaaminen tapahtuu laskimella parhaiten laskemalla eri puolten erotus, josta tulee nolla, jos eri puolet ovat yhtä suuret. Esimerkiksi viimeinen ominaisuus todetaan oikeaksi, koska laskin sieventää seuraavan erotuksen nollaksi

$$\mathrm{conj}(z1/\,z2)-\mathrm{conj}(z1)/\,\mathrm{conj}(z2)\,\Big|\, z1{=}x1{+}y1\ i \text{ and } z2{=}x2{+}y2\ i$$

Huomautus. TI-laskin tulkitsee määrittelemättömän muuttujan reaaliseksi, joten laskin sieventää esimerkiksi lausekkeen conj(z) lausekkeeksi z ja lausekkeen imag(z) nollaksi.

Samoin määrittelemättömiä muuttujia käytettäessä laskin sieventää lausekkeen $z-\mathrm{real}(z)$ nollaksi. Vaikka tulos pitääkin paikkansa reaaliluvuilla, niin me emme saa tulkita, että tulos olisi voimassa kaikilla kompleksiluvuilla. Mikäli z:lla on laskimessa arvo $x+yi$, niin lauseke $z-\mathrm{real}(z)$ sievenee oikein muotoon yi.

Muuttujan kompleksisuuden voi ilmaista laskimelle TI-89 käyttäen muuttujan nimen perässä alleviivausviivaa, joka vastaa joidenkin oppikirjojen tapaa merkitä kompleksiluvun tunnukseksi aina viiva. **Koska alleviivausviivan käyttö ei kuitenkaan määrittele muuttujaa tarkemmin, niin laskin ei pysty sieventämään tällaista lauseketta.** Niinpä esimerkiksi lauseke $z\_-\mathrm{real}(z\_)-\mathrm{imag}(z\_)i$ säilyy laskimella sievennettäessä samanlaisena, vaikka sen arvo on 0 olipa $z\_$ mikä tahansa kompleksiluku.

Koska kompleksiluvun summamuoto on alla olevienkin esimerkkien mukaisesti varsin hankala suoritettaessa käsin kompleksilukujen kerto- ja jakolaskuja, niin seuraavassa pykälässä perehdytään polaarisiin muotoihin, joissa käytetään apuna napakoordinaatteja. Tulotyyppisten lausekkeiden laskeminen käsin on tällöin helppoa, mutta käsin suoritettavat yhteenlaskut muodostuvat hankaliksi.

Esimerkki. $(1+2i)(3+4i)=3+4i+6i+8\underbrace{i^2}_{=-1}=-5+10i$

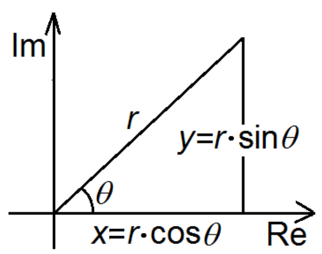
Huomautus. Koska kompleksiluvun ja sen liittoluvun tulo on reaalinen, niin **kahden kompleksiluvun osamäärä voidaan sieventää laventamalla se nimittäjän liittoluvulla,** jolloin nimittäjäksi tulee yksiterminen monomi, jolla on helppo jakaa:

$$\frac{1+2i}{3-4i}=\frac{(1+2i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}=\frac{3+4i+6i+\overbrace{8i^2}^{=-8}}{3^2-\underbrace{(4i)^2}_{=-16}}=\frac{-5+10i}{25}=\underline{\underline{-0.2+0.4i}}$$

19.2 Kompleksiluvun polaarisia esityksiä

Lausumalla kompleksiluvun suorakulmaiset koordinaatit x ja y napakoordinaattien r ja θ avulla saadaan kompleksiluvun **trigonometrinen esitys**:

$$\begin{aligned} z = x+yi &= r\cos\theta+(r\sin\theta)i \\ &= r(\cos\theta+i\sin\theta) \end{aligned}$$



Kompleksiluvun trigonometrinen esitys on usein pitkä ja hankala, joudutaanhan siinä vaihekulmakin ilmoittamaan kaksi kertaa, esimerkiksi

$$-6.54-3.21i=7.29\big(\cos(-153.9°)+i\sin(-153.9°)\big)\ .$$

Kompleksiluvun trigonometristä esitystä onkin tapana lyhentää ja selkiyttää korvaamalla se **osoitinesityksellä**, joka luetaan "r kulmassa θ"

$$\boxed{r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\underline{|\theta}}$$

Esimerkki. $-6.54 - 3.21i = 7.29(\cos(-153.9^\circ) + i\sin(-153.9^\circ)) = 7.29\underline{|-153.9^\circ}$

Osoitinesitys soveltuu käsin laskettaessa erittäin hyvin tulolausekkeiden käsittelyyn, kuten seuraavasta lauseesta ilmenee.

Lause.

$$r_1\underline{|\theta_1} \cdot r_2\underline{|\theta_2} = r_1r_2\underline{|\theta_1 + \theta_2}$$

$$\frac{r_1\underline{|\theta_1}}{r_2\underline{|\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2}\underline{|\theta_1 - \theta_2}$$

$$(r\underline{|\theta})^n = r^n\underline{|n\theta} \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

Osoittimet kerrotaan keskenään siten, että pituudet kerrotaan keskenään ja vaihekulmat lasketaan yhteen.

Osoittimet jaetaan keskenään siten, että pituudet jaetaan ja vaihekulmat vähennetään.

Osoitin korotetaan potenssiin siten, että pituus korotetaan potenssiin ja vaihekulma kerrotaan eksponentilla.

Lauseen todistus. Todistetaan lauseen ensimmäinen kohta palautumalla trigonometriseen esitykseen:

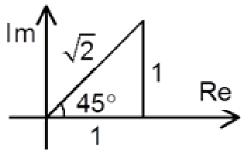
$$\begin{aligned}
\text{VP} &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\
&= r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + i\cos\theta_1\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 + i^2\sin\theta_1\sin\theta_2) \\
&= r_1r_2((\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)) \\
&= r_1r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)) = \text{OP}
\end{aligned}$$

Lauseen toinen kohta voidaan todistaa aivan samoin ja viimeinen kohta on seuraus kahdesta edellisestä kohdasta.

Esimerkki. $\dfrac{9\underline{|120^\circ} \cdot (2\underline{|240^\circ})^4}{(3\underline{|20^\circ})^2} = \dfrac{9\underline{|120^\circ} \cdot 2^4\underline{|4\cdot 240^\circ}}{3^2\underline{|2\cdot 20^\circ}}$

$$= \frac{9\cdot 2^4}{3^2}\underline{|120^\circ + 4\cdot 240^\circ - 2\cdot 20^\circ} = 16\underline{|\overbrace{1040^\circ}^{\text{vähennä } 2\cdot 360^\circ}} = 16\underline{|320^\circ}$$

Esimerkki. Käsin on varsin työlästä sieventää lauseketta $(1+i)^{1000}$ summamuotoa käyttäen.



Siirtymällä osoitinmuotoon saadaan

$$(1+i)^{1000} = (\sqrt{2}\,\underline{|\pi/4})^{1000} = \sqrt{2}^{1000}\,\underline{|1000\cdot\pi/4} = 2^{500}\,\underline{|250\pi - 125\cdot 2\pi} = 2^{500}\,\underline{|0} = \underline{\underline{2^{500}}}$$

Huomautus. Mikäli osoittimia joudutaan laskemaan yhteen tavallisen funktiolaskimen avulla, niin kompleksiluvut on ensin muutettava summamuotoon joko trigonometrisen muodon kautta tai käyttäen laskimen muunnosta napakoordinaateista suorakulmaisiksi koordinaateiksi. Summamuotoiset kompleksiluvut on sitten helppo laskea yhteen ja lopuksi suorakulmaisesta muodosta palataan polaariseen muotoon laskimen napakoordinaattimuunnoksen avulla.

TI-laskimella voi osoittimia kuitenkin laskea suoraan yhteen laskimen huolehtiessa tarvittavista muunnoksista kuten kohta näemme.

Kompleksiluvun trigonometrisen ja osoitinmuotoisen esityksen lisäksi tarkastelemme kolmattakin polaarista esitysmuotoa, **eksponenttimuotoa**, johon päädytään laajentamalla e-kantaisen eksponenttifunktion määritelmä tapaukseen, jossa eksponentti on imaginaariluku:

Määritelmä. $$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$ (ns. **Eulerin kaava**)

Kompleksiluvun edellä olleet polaariset esitykset voidaan korvata nyt ulkonaisesti erilaisella **eksponenttiesityksellä**:

$$\boxed{r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\,\underline{|\theta} = re^{i\theta}}$$

Eksponenttiesitys on erityisesti matemaatikoiden suosima muoto, sillä se on trigonometristä muotoa lyhyempi ja osoitinmuodon kaavat

$$r_1\underline{|\theta_1}\cdot r_2\underline{|\theta_2} = r_1r_2\,\underline{|\theta_1+\theta_2} \quad , \quad \frac{r_1\underline{|\theta_1}}{r_2\underline{|\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2}\,\underline{|\theta_1-\theta_2} \quad , \quad (r\,\underline{|\theta})^n = r^n\,\underline{|n\theta} \quad (n\in\mathbb{Z})$$

ovat eksponenttiesitykseen sovellettuna tuttujen algebran kaavojen yleistyksiä

$$r_1e^{i\theta_1}\cdot r_2e^{i\theta_2} = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)} \quad , \quad \frac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)} \quad , \quad (re^{i\theta})^n = r^ne^{in\theta}$$

Esimerkki. $$\frac{3e^{i\frac{\pi}{4}}\cdot\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2}{6e^{i\frac{5\pi}{12}}} = \frac{3\cdot 2^2}{6}e^{i(\frac{\pi}{4}+2\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi}{12})} = \underline{\underline{2e^{i\frac{\pi}{2}}}} = \underline{\underline{2i}}$$

19.3 Luvun kompleksinen juuri

Määritelmä. Luvun z kompleksisella n. juurella $\sqrt[n]{z}$ tarkoitetaan kaikkia niitä kompleksilukuja, joiden n:s potenssi on z.

Tehtävä. Etsi luvun $r\underline{|\theta}$ n:nnen juuren kaikki mahdolliset arvot muodossa $\rho\underline{|\varphi}$.

Etsittävä luku toteuttaa silloin ehdon

$$\begin{aligned}
&\left(\rho\underline{|\varphi}\right)^n = r\underline{|\theta}\\
\Leftrightarrow\ &\rho^n\underline{|n\varphi} = r\underline{|\theta}\\
\Leftrightarrow\ &\rho^n = r \text{ ja } n\varphi = \theta + k\cdot 2\pi \text{, missä } k\in\mathbb{Z}\\
\Leftrightarrow\ &\rho = \sqrt[n]{r} \text{ ja } \varphi = \frac{\theta}{n} + k\cdot\frac{2\pi}{n} \text{, missä } k\in\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Koska vain arvoilla $k = 0,1,\dots,n-1$ saadaan erisuuria n:nnen juuren arvoja, niin luvun $r\underline{|\theta}$ n:nnen juuren kaikki erisuuret arvot ovat

$$\boxed{\sqrt[n]{r\underline{|\theta}} = \sqrt[n]{r}\,\underline{\left|\frac{\theta}{n} + k\cdot\frac{2\pi}{n}\right.} \text{, missä } k = 0, 1, 2, \dots, n-1}\ .$$

Esimerkki. $\sqrt[4]{16i} = \sqrt[4]{16\underline{|\pi/2}} = \sqrt[4]{16}\,\underline{\left|\frac{\pi/2}{4} + k\frac{2\pi}{4}\right.} = \begin{cases} 2\underline{|\pi/8} \\ 2\underline{|5\pi/8} \\ 2\underline{|9\pi/8} \\ 2\underline{|13\pi/8} \end{cases}$

Huomautus. Kompleksisella n:nnellä juurella on yleisestikin n eri suurta arvoa ja ne sijaitsevat kompleksitasossa tasavälein origokeskisen ympyrän kehällä. Näistä arvoista sanotaan juuren **pääarvoksi** sitä, jonka vaihekulma saadaan jakamalla juurrettavan pienin mahdollinen ei-negatiivinen vaihekulma juuren indeksillä.

Edellisessä esimerkissä luvun $16i$ mahdollisia vaihekulmia ovat $\pi/2 + k\cdot 2\pi$. Näistä pienin ei-negatiivinen vaihekulma on $\pi/2$, joten juuren pääarvon vaihekulma on $\pi/8$.

Esimerkki. Tarkastellaan kompleksista kuutiojuurta

$$\sqrt[3]{-64}=\sqrt[3]{64\underline{|\pi}}=\sqrt[3]{64}\underline{\left|\frac{\pi}{3}+k\cdot\frac{2\pi}{3}\right.}=\begin{cases}4\underline{|\pi/3}\\4\underline{|\pi}=-4\\4\underline{|5\pi/3}\end{cases}.$$

Vaikka juurella on reaalinenkin arvo, niin pääarvo on ylimpänä mainittu imaginaarinen arvo, jonka vaihekulma on saatu jakamalla juurrettavan pienin mahdollinen ei-negatiivinen vaihekulma π juuren indeksillä 3.

Huomautus. TI-laskin laskee vain yhden arvon kompleksiselle juurelle ja se on pääarvo, vaikka juurella olisi reaalinenkin arvo, jos asetusten kohdasta ”Reaali- tai kompleksiluku” on valittu ”Suorakulma” tai ”Polaarinen”. Juuren mahdollisen reaalisen arvon tulostamiseksi TI-laskimen asetusten kohdassa ”Reaali- tai kompleksiluku” on valittava vaihtoehto ”Reaali”.

Huomautus. Luvun 4 kompleksisella neliöjuurella on kaksi arvoa

$$\sqrt{4}=\sqrt[2]{4\underline{|0}}=\sqrt[2]{4}\underline{\left|\frac{0}{2}+k\cdot\frac{2\pi}{2}\right.}=\begin{cases}2\underline{|0}=2\\2\underline{|\pi}=-2\end{cases},$$

jotka molemmat ovat reaalisia. Luvun 4 reaalisella neliöjuurella on määritelmän mukaan kuitenkin vain yksi arvo, joka on ei-negatiivinen luku 2. Tästä saattaa joskus aiheutua sekaannuksia, koska sekä reaalista että kompleksista juurta merkitään samalla tavoin. Selvyyden vuoksi pyrimmekin reaalisen luvun kompleksista juurta tarkoittaessamme korostamaan sitä, että kyseessä on kompleksisen juuren käsite.

Huomautus. Reaalialueelta tutut funktiot logaritmi, sini, … määritellään myös kompleksialueella. Esimerkiksi luvun $z=re^{i\theta}$ kompleksisen (luonnollisen) logaritmin $\log z$ kaikki arvot saadaan reaalisen luonnollisen logaritmin ln avulla seuraavalla muodollisella päättelyllä

$$\log(z)=\log(re^{i\theta})=\log(re^{i\theta}\cdot\underbrace{e^{k\cdot 2\pi i}}_{=1})=\log r+\log(e^{i\theta})+\log(e^{k\cdot 2\pi i})$$
$$=\ln r+i\theta+k\cdot 2\pi i$$

missä k on mielivaltainen kokonaisluku. Kompleksisella logaritmilla on siis äärettömän monta arvoa, jotka sijaitsevat kompleksitason pystysuoralla suoralla $2\pi i$:n välein.

19.4 Kompleksiluvut TI-laskimessa

Kompleksiluku voidaan syöttää TI-laskimeen eri muodoissa:

- Summamuotoa käytettäessä imaginaariyksikön tunnus on valikoista löytyvä lihavoitu kaunokirjoitus-i.
- Osoitinmuoto on kirjoitettava suluissa muodossa $(r\angle\theta)$. Kulman moodiasetuksena voi olla asteet tai radiaanit. Moodiasetuksesta voidaan syötettäessä poiketa käyttämällä kulmayksikköä $^\circ$ tai ^{r}.
- Trigonometrinen muoto on tietysti mahdollinen, mutta niin pitkä kirjoitettava, että se kannattaa korvata lyhyellä osoitinmuodolla.
- Eksponenttimuotoa käytettäessä on kulmamoodina ehdottomasti oltava radiaani. Vaihekulma voi olla asteinakin, jos vaihekulmaan liitetään yksikkö $^\circ$. Eksponenttimuotoa suositaan matematiikan teoreettisissa tarkasteluissa, mutta ei esimerkiksi sähkötekniikassa.

Kompleksiarvoisen vastauksen tulostumista voidaan muokata

1) syötteen perään tulevilla esitystapakomennoilla ►Rect tai ►Polar
2) moodiasetuksilla kohdassa Reaali- tai kompleksiluku
   - Reaali: Tässä moodissa laskin tulostaa luvun n:nnen juuren mahdollisen reaaliarvon pääarvon asemasta. Tämä moodiasetus on käytännön laskuissa kaikkein suositeltavin. Tarvittaessa muihin esitystapoihin päästään kohdan 1) esitystapakomennoilla.
   - Suorakulma: Vastaus tulostuu summamuodossa $x + yi$
   - Polaarinen: Vastaus tulostuu joko osoitin- tai eksponenttimuodossa sen mukaan onko kulmamoodina aste tai radiaani.

Esimerkki. Ratkaise yhtälöpari $\begin{cases} (2+i)\cdot z_1 + 4\underline{|45^\circ}\cdot z_2 = 7+i \\ 4\underline{|21^\circ}\cdot z_1 + (6+3i)\cdot z_2 = 2+i \end{cases}$

Pari kirjoitetaan laskimeen muodossa

$$\text{csolve}\left(\begin{cases} (2+i)z1 + (4\angle 45^\circ)z2 = 7+i \\ (4\angle 21^\circ)z1 + (6+3i)z2 = 2+i \end{cases}, z1, z2\right),$$

mistä saadaan ratkaisu $\begin{cases} z_1 = 3.19 + 10.8i = 11.1\,\underline{|73.5^\circ} \\ z_2 = -2.19 - 6.21i = 6.59\,\underline{|-109.4^\circ} \end{cases}$. Tulostukseen voi vaikuttaa moodiasetuksilla tai syötteen perään tulevilla esitystapakomennoilla.

Tehtäviä

19.1 Havainnollista seuraavia kompleksilukuja piirtämällä. Esitä luvut sekä kuvaa apuna käyttäen että laskimella kaikissa mahdollisissa muodoissa (summa-, trigonometrinen-, osoitin- ja eksponenttimuoto, kulmayksikkönä polaarisissa muodoissa sekä aste että radiaani). Huomaa, että kohdan k) lauseke ei ole mikään kompleksiluvun vakiintunut sievennetty muoto.

v1) $2+2i$	**v2)** $2e^{i\pi}$	**v3)** $5\underline{\vert -90^\circ}$
a) $2\underline{\vert -90^\circ}$	**b)** $2i$	**c)** $1\underline{\vert 180^\circ}$
d) $-5-5i$	**e)** $3e^{i\pi/2}$	**f)** $2\underline{\vert \pi/4}$
g) 4	**h)** $3(\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ)$	**i)** $4\underline{\vert \pi/2}$
j) $e^{-\pi/2}$	**k)** $3(\cos 90^\circ - i\sin 90^\circ)$	

19.2 Laske seuraavat laskut ensin ilman laskinta. Huomaa, että tämän tehtävän summalausekkeiden osoittimet on helppo päätellä tarkasti kuvan avulla. Tarkista tuloksesi lopuksi laskimella. Anna kunkin kohdan vastaus samassa muodossa kuin lähtötiedotkin.

v1) $1\underline{\vert 30^\circ}\cdot 2\underline{\vert 60^\circ}$	**v2)** $(3e^{i\pi/12})^2$	**v3)** $4\underline{\vert 20^\circ} - 1\underline{\vert 20^\circ}$
a) $2\underline{\vert 20^\circ}\cdot 3\underline{\vert 40^\circ}$	**b)** $(2\underline{\vert 170^\circ})^{10}$	**c)** $(2e^{i\pi/6})^3$
d) $\dfrac{12\underline{\vert 2\pi/3}}{3\underline{\vert \pi/6}}$	**e)** $\dfrac{(6\underline{\vert 70^\circ})^2}{(3\underline{\vert 40^\circ})^3}$	**f)** $\dfrac{2e^{i\pi}\cdot 6e^{i\pi}}{(2e^{i3\pi/8})^2}$
g) $5\underline{\vert 40^\circ} + 3\underline{\vert 220^\circ}$	**h)** $4\underline{\vert 45^\circ} + 4\underline{\vert 135^\circ}$	**i)** $5\underline{\vert 20^\circ} - 5\underline{\vert 110^\circ}$

19.3 Esitä osoittimena $2+2i$, $-5i$, -4, 6, $3i$, $1-i$, $-3-3i$, $-3-4i$, $-12+5i$ ensin ilman laskinta. Osoittimen kulman voi päätellä tai arvioida kuvasta. Tarkista tuloksesi laskimella.

19.4 Esitä summamuodossa $3\underline{\vert 90^\circ}$, $2\underline{\vert 180^\circ}$, $5\underline{\vert 45^\circ}$, $2\underline{\vert -45^\circ}$, $5\underline{\vert -90^\circ}$ ensin ilman laskinta. Tarkista sitten tuloksesi laskimella.

19.5 **Sievennä laskimella samaan muotoon kuin lähtoarvotkin. T**arkista tulos likimäärin myös kuvan avulla:

a) $2\underline{\vert 30^\circ} + 3\underline{\vert 70^\circ}$ **b)** $3e^{i\pi/2} + 2e^{i\pi}$ **c)** $7\underline{\vert 20^\circ} - 2\underline{\vert 70^\circ}$

19.6 Ratkaise sekä käsin että laskimella seuraavat yhtälöt. Anna vastaus samassa muodossa kuin yhtälön kertoimetkin ovat.

v1) $(2+i)z = 5-2i$	**v2)** $3e^{i\pi/2}z + 12e^{i2\pi/3} = 0$.
a) $(3+2i)z + 2(3-i) = i$	**b)** $6\underline{\vert 30^\circ}\cdot z = 18\underline{\vert 70^\circ}$

19.7 Ratkaise laskimella $z^3 = 8\underline{\vert 60^\circ}$. Kokeile laskimen erilaisia asetuksia!

19.8 Totea oikeaksi sekä käsin että laskimella laskien $\overline{z\cdot u} = \overline{z}\cdot\overline{u}$.

19.9 Etsi yhtälön $z^2 = -5 + 12i$ ratkaisu muodossa $z = x + yi$ sijoittamalla z:n lauseke yhtälöön ja vaatimalla, että reaaliosat ovat yhtä suuret yhtälön molemmilla puolilla ja imaginaariosat ovat myös yhtä suuret yhtälön molemmilla puolilla. Näin saat reaalisen yhtälöparin, josta voit (käsin tai laskimella) ratkaista tuntemattomat kertoimet *x* ja *y*. Ratkaise alkuperäinen kompleksinen yhtälö myös suoraan laskimella.

19.10 Ratkaise käsin laskien seuraavat poikkeuksellisen helpot osoitinkertoimiset yhtälöparit. Ratkaise yhtälöparit myös laskimella.

v) $\begin{cases} 3\angle 30^\circ\, z_1 + 2\angle 20^\circ\, z_2 = 7\angle 40^\circ \\ 4\angle 50^\circ\, z_1 - 1\angle 40^\circ\, z_2 = 2\angle 60^\circ \end{cases}$ **a)** $\begin{cases} 4\angle 20^\circ\, z_1 + 1\angle 10^\circ\, z_2 = 9\angle 30^\circ \\ 3\angle 50^\circ\, z_1 - 4\angle 40^\circ\, z_2 = 2\angle 60^\circ \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3\angle 50^\circ\, z_1 - 2\angle 60^\circ\, z_2 = 4\angle 80^\circ \\ 2\angle 30^\circ\, z_1 + 1\angle 40^\circ\, z_2 = 5\angle 60^\circ \end{cases}$

19.11 Laske laskimella yhtälön $\left|\frac{z}{u}\right| = \frac{|z|}{|u|}$ vasen ja oikea puoli sekä niiden erotus, kun $z = x + yi$ ja $u = c + di$. Pitääkö annettu yhtälö paikkansa kaikilla kompleksiluvuilla?

19.12 Tutki sekä käsin että laskimella, mitkä seuraavista yhtälöistä pitävät aina paikkansa.

v1) $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}\,z$ **v2)** $z - \bar{z} = 0$

a) $z - \bar{z} = 2\,\mathrm{Im}\,z$ **b)** $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

Vastauksia osan 2 tehtävien v-osioihin

13.1 $52.5°$

13.3 2010 mm

13.4 572 mm

13.5 i) $57.59°$ ii) $60.45°$

13.6 i) 115400 ii) 235.5 iii) 287.4 iv) 374.9

15.1 2.92 , 12.3

15.2 $102°$

15.3 i) $x = 2.5$ ii) $x = 7.5$

15.4 $\dfrac{\bar{a}}{2}$, $\dfrac{5\bar{a}+2\bar{b}}{7}$, $3\bar{c}-2\bar{b}$, $\dfrac{3\bar{a}+4\bar{b}}{14}$, $-\dfrac{\bar{a}}{2}-2\bar{b}+3\bar{c}$, $\dfrac{5\bar{a}+16\bar{b}-21\bar{c}}{7}$

15.5 $(2\bar{a}+9\bar{b})/2$

15.6 $\bar{x} = \bar{a}-\bar{b}/5$, $\bar{y} = -2\bar{a}+13\bar{b}/5$

15.9 $2\bar{e}-\bar{a}$

15.10 $(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})/3$, $(-2\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})/3$, $\bar{0}$

15.11 $(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})/3$

15.12 $\bar{b}-\bar{a}$, $(\bar{a}-\bar{b})/4$, $\bar{a}+2\bar{b}$, $(\bar{a}+3\bar{b})/4$, $\bar{a}+3\bar{b}$, pisteet ovat samalla suoralla siten, että piste C jakaa janan OD sisäpuolisesti suhteessa 1:3 .

15.13 3:1

16.1 $[-3, 4]$, $[-0.6, 0.8]$

16.2 $(-1.4, 5.2)$

16.3 $[8, 6]$ ja $[-2, 1]$

16.4 $(7, 8)$

16.5 $(1, 3)$

16.6 $[2, 3]$ ja $[-6, 4]$

16.7 3950 N ja 3820 N

16.8 24

16.9 $\bar{n} = [2, -1]$ ja $\bar{s} = [1, 2]$

16.10 $75.75°$

16.12 $[2.8, 0.4]$

16.13 $[-4.2, -1.4]$ ja $[-1.8, 5.4]$

16.14 $(3, 2)$

16.15 $(6, -1)$

16.16 7.8087

17.1 $r = 2\sqrt{2}$, $\theta = -45°$, $z = 2\sqrt{2}$; $R = 4$, $\theta = -45°$, $\varphi = 45°$

17.2 $x = y = 3\sqrt{2}$, $z = 2$; $R = 2\sqrt{10}$, $\theta = 45°$, $\varphi = 71.565°$

17.3 $x = y = 0$, $z = 6$; $r = 0$, θ mielivaltainen (koska r oli 0), $z = 6$ (Laskimen ”epämääräinen” vastaus kulmaksi θ on itse tulkittava!)

18.1 $(3, 2, 2)$

18.2 $(2, -3, 3)$

18.3 $(2.875, 1.375, 3.25)$

18.4 $[2, 4, 6]$, $[2, 0, 1]$ ja $[2, 5, -4]$

18.5 Tilanne on mahdoton, koska yksi laskemalla saatavista kannatusvoimista $[7500, 0, 5000]$, $[-6000, 3000, -6000]$, $[-1500, -3000, 3000]$ työntäisi kappaletta! Tilanne selviää myös *xy*-tasolle projisioidusta kuvasta.

18.6 12

18.7 $92.94°$, $87.06°$

18.8 24 J

18.9 $14.04°$, -10

18.10 3, 30

18.11 18

18.13 i) 11673 km ii) 14770 km

18.14 [3,6,9] ja [4,1,-2]

18.15 $(-1, 2, 3)$

8.16 $[-7, 5, -1]$

18.17 $3\sqrt{2}/2$

18.18 Esimerkiksi $\overrightarrow{OX} = \underbrace{[1,1,1]}_{\text{Tason jonkin pisteen paikkav.}} \underset{(-)}{+} 3[-1, -2, 2] = [-2, -5, 7] \ \therefore X = (-2, -5, 7)$

18.19 $[2, 4, 6]$, $[2, 0, 1]$ ja $[2, 5, -4]$

18.20 Fiksulla tavalla käsin sieventäen saadaan $54\sqrt{3}$. Laskin ei ”näe” annetussa lausekkeessa tuttuja osia ja siksi se saa toisenlaisen mutta kuitenkin aivan oikean vastauksen $252\sin(2\cdot\cos^{-1}(\sqrt{7}/14))$

18.21 5, $1/\sqrt{6}$

19.1 $2+2i = 2\sqrt{2}\underline{|45°} = 2\sqrt{2}\underline{|\pi/4} = 2\sqrt{2}e^{i\pi/4} = 2\sqrt{2}(\cos 45° + i\sin 45°)$

$2e^{i\pi} = 2\underline{|180°} = 2\underline{|\pi} = 2(\cos 180° + i\sin 180°) = -2$

$5\underline{|-90°} = 5\underline{|-\pi/2} = 5e^{-i\pi/2} = 5\big(\cos(-90°) + i\sin(-90°)\big) = -5i$

19.2 $2\underline{|90°}$, $9e^{i\pi/6}$, $3\underline{|20°}$

19.6 $1.6-1.8i$, $-4e^{i\pi/6} = 4e^{-i5\pi/6}$

19.10 $z_1 = 1\underline{|10°}$, $z_2 = 2\underline{|20°}$

19.12 **v1)** oikein **v2)** väärin

Ojalain laskuopit -oppimateriaalisarjaan kuuluvassa teoksessa Geometria on huomioitu insinööriopetuksessa tapahtunut lähiopetuksen voimakas vähentyminen. Matematiikassakin on keskityttävä kaikkein oleellisimpaan: käsitteiden hallitsemiseen, apuvälineiden tehokkaaseen hyödyntämiseen mekaanisen käsinlaskennan asemasta sekä suoritettujen laskujen ja saatujen tulosten selkeään esittämiseen.

Yhden kirjoittajan omat opiskelijat ovat viime vuodet käyttäneet TI-Nspire CX CAS -laskimia. Siksi teoksessa on hyödyllisiä ohjeita kyseisen laskimen käytöstä. Monet opiskelijat ovatkin tyytyväisinä todenneet ”oppineensa näkemään metsän puilta”. Myös muiden symbolisten laskimien ja matematiikkaohjelmien käyttäjät saavat kirjasta ideoita oman apuvälineensä hyödyntämiseen.

Teosten Algebra ja Geometria lisäksi tekijöiltä on ilmestymässä muitakin insinöörikoulutukseen laadittuja osia. Kaikki sarjan osat ovat vapaasti tulostettavissa ja jaettavissa koko sivun kopioina opetuskäyttöön.

Satakunnan ammattikorkeakoulu
Sarja C, Oppimateriaalit 2/2016
ISSN 2323-8364
ISBN 978-951-633-208-9

Julkaisija
Satakunnan ammattikorkeakoulu
Tiedepuisto 3, 28600 Pori
www.samk.fi

samk