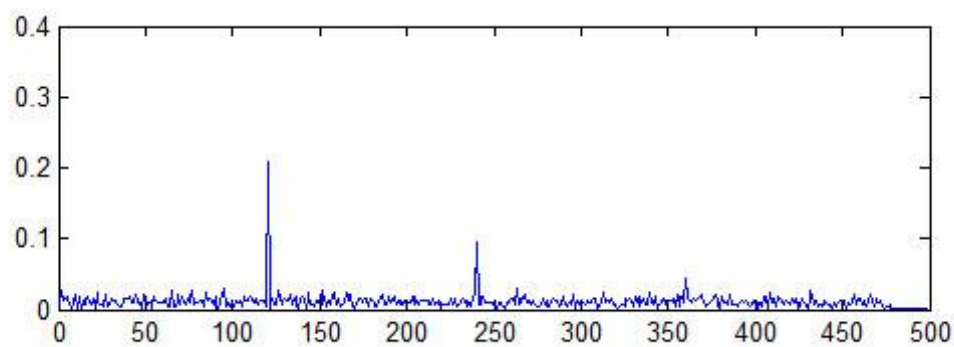


B

Diskreetti Fourier-muunnos ja sen hyödyntäminen signaalien spektrien muodostamisessa

Pentti Romppainen



Kajaanin ammattikorkeakoulu Oy

Kajaani University of Applied Sciences

Diskreetti Fourier-muunnos ja sen hyödyntäminen signaalien spektrien muodostamisessa

Pentti Romppainen

Kajaanin ammattikorkeakoulun julkaisusarja B

Raportteja ja selvityksiä 56

Yhteystiedot:

Kajaanin Ammattikorkeakoulun kirjasto

PL 240, 87101 KAJAANI

Puh. 044 7157042

Sähköposti: amkkirjasto@kamk.fi

<http://www.kamk.fi>

Kajaanin ammattikorkeakoulun julkaisusarja B 56 / 2016

ISBN 978-952-9853-92-2

ISSN 1458-915X

SISÄLLYS

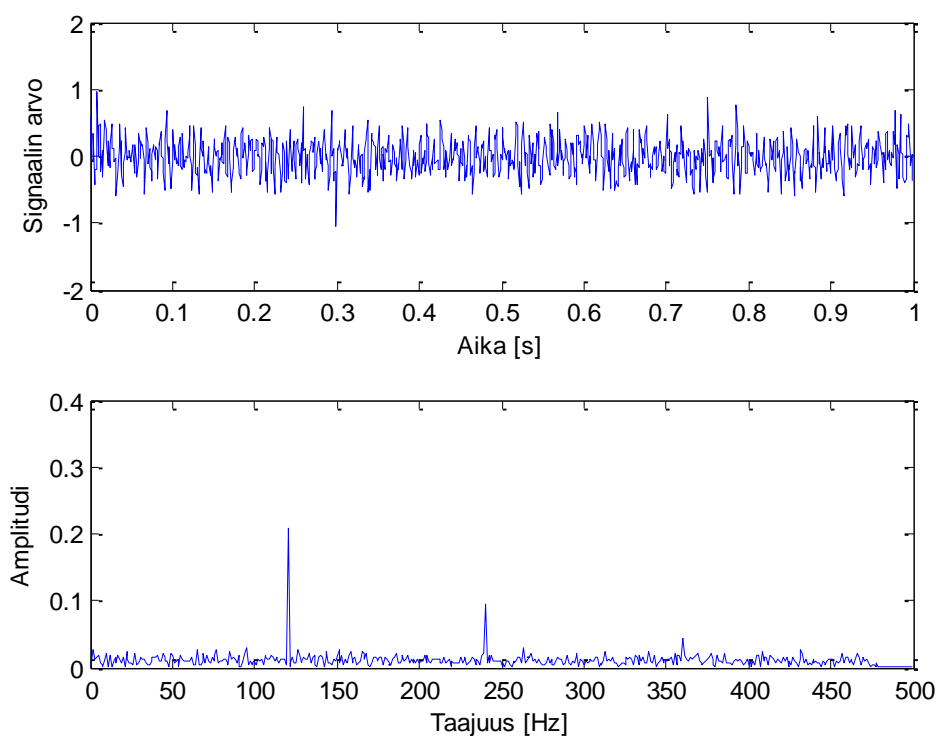
1 JOHDANTO	1
2 KOMPLEKSILUVUISTA.....	3
3 DISKREETTI FOURIER-MUUNNOS	7
4 SIGNAALIN SPEKTRIN MUODOSTAMINEN	18
5 YHTEENVETO.....	22
LÄHTEET	23

TIIVISTELMÄ

Diskreetin Fourier-muunnoksen (Discrete Fourier Transform, DFT) laskeminen on käynyt mahdolliseksi nopeiden algoritmien (Fast Fourier Transform, FFT) ja 1970-luvun jälkeisen tietojenkäsittelykapasiteetin kasvamisen myötä. Yksi merkittävä DFT:n sovellusalue liittyy signaalinkäsittelyyn ja erityisesti signaalien spektrien muodostamiseen. Tässä raportissa on esitelty DFT:n laskemiseen liittyvää matematiikkaa, muunnoksen ominaisuuksia ja kuinka DFT:n ja sen jälkeen suoritettavan käänteismuunnoksen avulla signaali voidaan jakaa vakio komponenttiin (DC-komponentti), perustaajuuteen ja sen harmonisiin taajuuksiin. Tältä pohjalta on tarkasteltu, kuinka DFT:n avulla voidaan muodostaa erilaisia signaalien spektrien esitystapoja.

1 JOHDANTO

Digitaalisen signaalinkäsittelyn hyödyntäminen eri tekniikan aloilla on mahdollistanut erittäin merkityksellisen muutoksen ympäristössämme viimeisien vuosikymmenien aikana. Esimerkkeinä tästä ovat monet tieto- ja viestintätekniikan laitteistot. Niiden kehittymisen taustalla on ollut tiedonkäsittelykapasiteetin nopea kasvaminen. Useissa yhteyksissä tarvitaan digitaalisten signaalien sisällön analysoimista. Kuvassa 1 (ylempi kuva) on esimerkki digitaalisesta signaalista, jossa se on esitetty aikatasossa, eli signaalin arvot on piirretty ajan funktiona.



Kuva 1. Kohinainen signaali ja sen spektri

Tämän kuvaustavan perusteella on vaikea tehdä päätelmiä signaalin sisällöstä. Alemmassa kuvassa on signaalin amplitudispektri, jossa signaalin sisältämien sinimuotoisten komponenttien amplitudi on esitetty taajuuden funktiona. Siitä havaitaan, että kohinan lisäksi signaali sisältää ainakin taajuuksia 120 Hz ja 240 Hz olevat sinimuotoiset komponentit.

Signaalien spektrin muodostamisessa tarvitaan Fourier-analyysiä, joka on saanut nimensä 1800-luvun alkupuolella vaikuttaneen matemaatikon ja fyysikon Joseph Fourierin mukaan. Fourierin sarjana tunnetun tuloksen mukaan jaksollinen funktio voidaan esittää vakion ja sinimuotoisten funktioiden avulla, joiden taajuudet ovat funktion jaksonpituutta vastaava taajuus ja sen kokonaiset monikerrat. Menetelmät ovat laajentuneet kattamaan niin ei-jaksolliset signaalit kuin digitaaliset signaalitkin. Diskreetti Fourier-muunnos (Discrete Fourier Transform, DFT) soveltuu luonteensa puolesta digitaalisten signaalien käsittelyyn, sillä sekä muunnettava signaali että muunnoksen tulos ovat esitettävissä digitaalisessa muodossa ja siten käsiteltävissä tietokoneen avulla. Tässä raportissa on tarkasteltu DFT:n muodostamista, sen ominaisuuksia ja kuinka muunnoksen avulla voidaan muodostaa signaalien spektrejä.

2 KOMPLEKSILUVUISTA

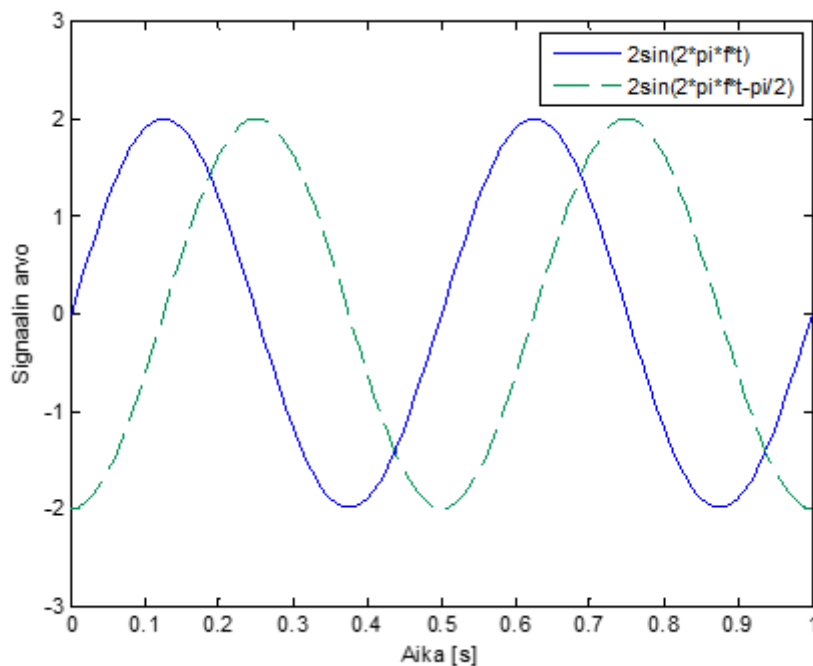
Ajan t suhteen jatkuvia arvoja saavalle signaalille käytetään nimitystä jatkuva-ai-
kainen signaali. Sinimuotoisena se on esitettävissä yhtälöllä

$$x(t) = A \sin(2\pi f t - \varphi) = A \sin(\omega t - \varphi), \quad (1)$$

missä A on amplitudi, f taajuus ja $\omega = 2\pi f$ kulmataajuus. Vaihe(kulma) φ määrää
signaalin arvon ajanhetkellä $t = 0$. Vaihekulman vaikutusta signaaliin voidaan
myös kuvata aikaviiveen τ avulla muodossa

$$x(t) = A \sin(2\pi f (t - \tau)), \quad (2)$$

missä $\tau = \varphi / (2\pi f)$. Kuvassa 2 on esitetty, kuinka vaihekulma $\pi/2$ siirtää signaalia
neljännesjakson oikealle. Itse asiassa signaalista tulee kosinista kerrottuna -
1:llä.



Kuva 2. Sinisignaali ja se viivästettynä vaihekulmalla $\pi/2$

Yhtälöiden (1) ja (2) mukaisille signaaleille käytetään nimitystä analoginen signaali, koska myös niiden arvo on jatkuvasti muuttuva.

Yhtälön (1) mukaisesta signaalista voidaan muodostaa diskreettiaikainen signaali ottamalla siitä näytteitä taajuudella f_s , jolloin siitä muodostuu lukujono $x(T_s), x(2T_s), \dots, x(NT_s)$, missä näytteiden väli $T_s = 1/f_s$ ja N näytteiden lukumäärä. Kun signaalin arvot vielä kvantisoidaan, voidaan ne esittää digitaalisesti, jolloin signaalista käytetään nimitystä digitaalinen signaali. Kvantisoinnilla tarkoitetaan analogisesta signaalista otettujen näytteiden muuttamista digitaalisiksi arvoiksi esimerkiksi 16 bitin avulla. On huomattava, että digitaalisen signaalin arvot ovat vain lukujono ja vasta näytteistystaajuuden tunteminen tekee niistä digitaalisen signaalin. Esimerkiksi 1 Hz sinisignaalin näytteistäminen 1 s ajan taajuudella 1 kHz tuottaa saman lukujonon kuin 100 Hz signaalin näytteistäminen 0,01 s ajan taajuudella 100 kHz.

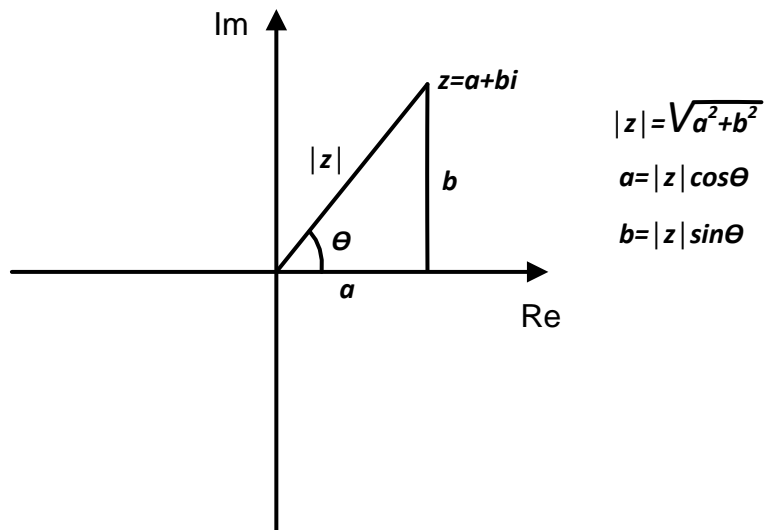
Yhtälön (1) mukaisesti taajuuden ohella kaksi muuta merkittävää parametria signaalien kuvaamisessa ovat amplitudi ja vaihe. Niiden huomioimiseen käytetään yleisesti kompleksilukuja. Kuvassa 3 on esitetty kompleksitaso, joka kattaa kaikki lukupareista koostuvat kompleksiluvut.

Kompleksiluvuille käytetään karteesisista esitystapaa

$$z = a + bi, \quad (3)$$

missä a on kompleksiluvun z reaali-osa ja b sen imaginääriosa sekä $i = \sqrt{-1}$ imaginääriyksikkö. Kertomalla kompleksiluku z sen (kompleksi)konjugaatilla $z^* = a - bi$ saadaan kuvan 3 mukainen kompleksiluvun itseisarvon neliö

$$|z|^2 = a^2 + b^2. \quad (4)$$



Kuva 3. Kompleksiluvun karteesisen esitystavan ja napakoordinaattiesitystavan välin yhteys

Kuvan 3 mukaisesti kompleksiluvun z reaali- ja imaginääriosalle on voimassa

$$\operatorname{Re}(z) = |z|\cos\theta \quad (5) \quad \text{ja}$$

$$\operatorname{Im}(z) = |z|\sin\theta. \quad (6)$$

Niiden avulla kompleksiluku z voidaan esittää napakoordinaattimuodossa

$$z = |z|\cos\theta + i|z|\sin\theta. \quad (7)$$

Eulerin kaavojen

$$e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i\sin\theta \quad (8)$$

avulla voidaan johtaa yhtäpitävyydet

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \quad (9) \quad \text{ja}$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}). \quad (10)$$

Yhtälöiden (7) ja (8) avulla päästään kompleksiluvun z esitykseen

$$z = |z|e^{i\theta}. \quad (11)$$

Sähkötekniikassa tälle käytetään yleisesti merkintää $|z|\angle\theta$ ja nimitystä osoitinesitys, jossa $|z|$ on osoittimen pituus ja θ sen kulma. On huomattava, että yhtälön (8) mukaisesti kompleksiluvun $e^{i\theta}$ arvot ovat kompleksitasossa olevan yksikköympyrän kehällä ja että konjugaatissa θ saa vastakkaismerkkisen arvon.

Tarkastellaan vielä tilannetta, jossa kaksi kompleksista eksponenttifunktiota (eksponentit toistensa konjugaatteja) kerrotaan kompleksiluvuilla, jotka ovat toistensa konjugaatteja. Olkoot funktiot

$$x_1(t) = e^{i\omega t} \quad (12) \quad \text{ja}$$

$$x_2(t) = e^{-i\omega t}. \quad (13)$$

Olkoot kompleksiluvut

$$z_1 = |z|e^{i\alpha} \quad (14) \quad \text{ja}$$

$$z_2 = |z|e^{-i\alpha}. \quad (15)$$

Muodostetaan

$$\begin{aligned} z_1 x_1(t) + z_2 x_2(t) &= |z|e^{i\alpha} e^{i\omega t} + |z|e^{-i\alpha} e^{-i\omega t} = |z|(e^{i(\omega t + \alpha)} + e^{-i(\omega t + \alpha)}) \\ &= 2|z| \cos(\omega t + \alpha). \quad (16) \end{aligned}$$

Tulos on siis reaalin kosinifunktio, jonka amplitudi on kaksi kertaa kertoimien itseisarvo ja vaihe kertoimien kulma.

3 DISKREETTI FOURIER-MUUNNOS

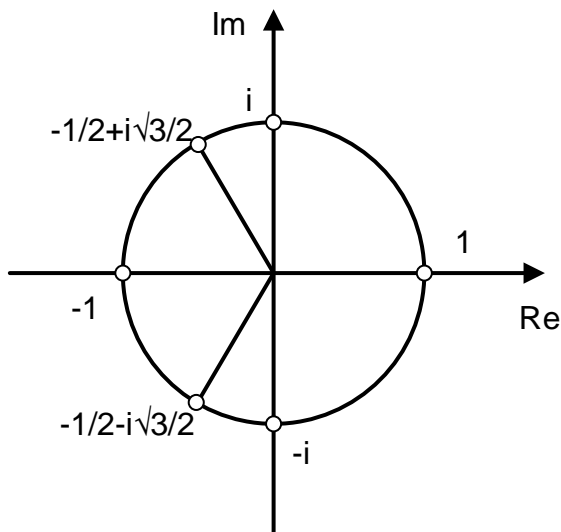
N näytettä pitkän signaalin $x[n]$ diskreetti Fourier-muunnos (DFT) on muodostettavissa yhtälön

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{i2\pi}{N}kn}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (17)$$

mukaisesti, missä n on signaaliin liittyvä indeksi ja k sen muunnokseen liittyvä indeksi. On huomattava, että yhden $X[k]$:n arvon laskemiseksi on käytävä läpi kaikki signaalin arvot ja että muunnos on yhtä pitkä kuin alkuperäinen signaali. Yhtälössä (17) esiintyvä tekijä

$$e^{-\frac{i2\pi}{N}kn}$$

saa arvoja, jotka ovat kompleksitasossa olevan yksikköympyrän kehällä. Tulo kn on aina kokonaisluku, joten em. tekijän mahdolliset arvot ovat kulman $2\pi/N$ välein yksikköympyrän kehällä, kun sitä kierretään myötäpäivään kulmaa nolla vastaavasta, reaaliakselilla olevasta arvosta 1 alkaen. Tulon kn välein yksikköympyrän kehällä sijaitsevat arvot N :n arvoille 1, 2, 3 ja 4 on esitetty kuvassa 4. Kun $N = 1$ ovat kulmat 2π :n välein, joten tekijä saa aina arvon 1. Kun $N = 2$ ovat kulmat π :n välein, joten tekijä saa arvon 1 tai -1 . Vastaavalla tavalla muodostuvat N :n arvoon 3 ja 4 liittyvät tekijän arvot.



Kuva 4. Mahdolliset $e^{-\frac{i2\pi}{N}kn}$:n arvot, kun $N = 1, 2, 3, 4$

Tarkastellaan esimerkkinä signaalin $x[n] = [0, 1, 2, 3]$ diskreettiä Fourier-muunnosta, ja lasketaan se määritelmän perusteella. Eri komponenteille saadaan seuraavat tulokset:

$$X[0] = \sum_{n=0}^3 x[n] e^{-\frac{i2\pi}{4} \cdot 0 \cdot n} = x[0] + x[1] + x[2] + x[3] = 6,$$

$$\begin{aligned} X[1] &= x[0] e^{-\frac{i2\pi}{4} \cdot 1 \cdot 0} + x[1] e^{-\frac{i2\pi}{4} \cdot 1 \cdot 1} + x[2] e^{-\frac{i2\pi}{4} \cdot 1 \cdot 2} + x[3] e^{-\frac{i2\pi}{4} \cdot 1 \cdot 3} = \\ &= 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-i) + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot i = -2 + 2i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X[2] &= x[0] e^{-\frac{i2\pi}{4} \cdot 2 \cdot 0} + x[1] e^{-\frac{i2\pi}{4} \cdot 2 \cdot 1} + x[2] e^{-\frac{i2\pi}{4} \cdot 2 \cdot 2} + x[3] e^{-\frac{i2\pi}{4} \cdot 2 \cdot 3} = \\ &= 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) = -1 \end{aligned}$$

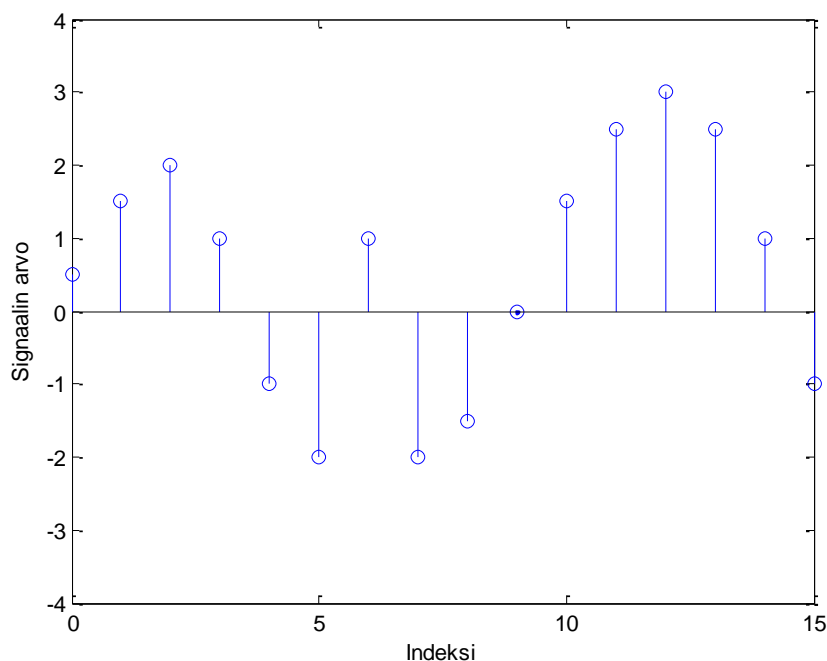
$$\begin{aligned} X[3] &= x[0] e^{-\frac{i2\pi}{4} \cdot 3 \cdot 0} + x[1] e^{-\frac{i2\pi}{4} \cdot 3 \cdot 1} + x[2] e^{-\frac{i2\pi}{4} \cdot 3 \cdot 2} + x[3] e^{-\frac{i2\pi}{4} \cdot 3 \cdot 3} = \\ &= 0 \cdot 1 + 1 \cdot i + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-i) = -2 - 2i. \end{aligned}$$

Kaikki $e^{-\frac{i2\pi}{N}kn}$:n arvot, joissa joko k tai n on nolla, saavat arvon 1. Muiden $e^{-\frac{i2\pi}{N}kn}$:n arvojen kohdalla tulo kn määrää, kuinka monta $2\pi/4$:n suuruista väliä

yksikköympyrää kierretään myötäpäivään. Esim. kun $kn = 1 \cdot 3 = 3$, saa $e^{-\frac{i2\pi}{4}3}$ arvon i .

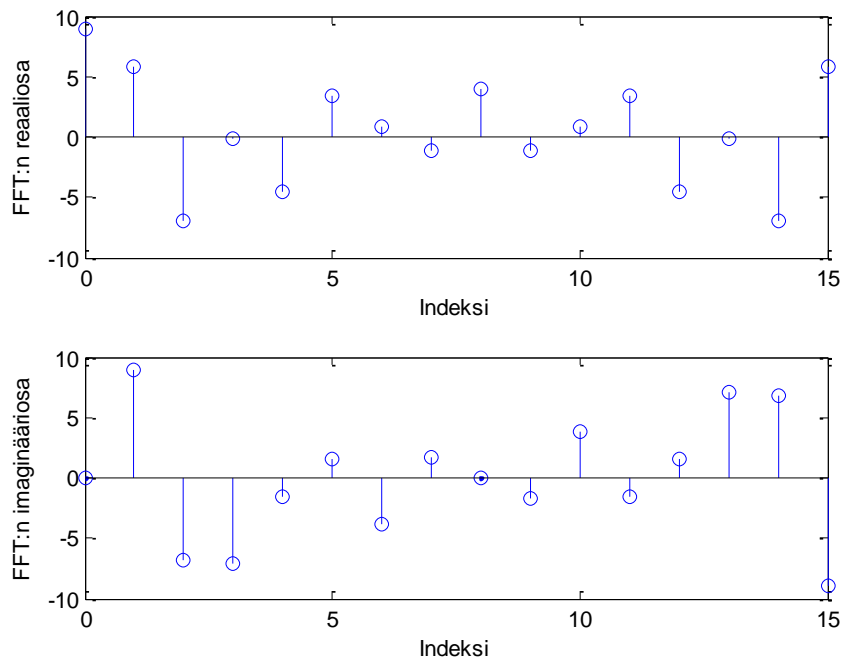
DFT:n muodostaminen edellä kuvatulla tavalla on tietokoneellakin suoritettuna erittäin paljon aikaa vievä prosessi. Siinä tarvitaan N potenssin 2 kertolaskua ja $N(N - 1)$ yhteenlaskua. Lisäksi on huomioitava, että e :n korottaminen kompleksiseen potenssiin vaatii oman kapasiteettinsa. Diskreetin Fourier-muunnoksen laskemiseksi on kehitetty nopeampia tapoja, joiden kompleksisuus on luokkaa $N \cdot \log N$. Algoritmien avulla saatavia diskreettejä Fourier-muunnoksia kutsutaan nimellä FFT (Fast Fourier Transform). Tunnetuin näistä on Cooley ja Tukeyn 1965 esittämä algoritmi. Siinä muunnettava signaali jaetaan useassa vaiheessa aina kahteen osaan. Jaosta aiheutuen signaalin pituus täytyy olla esitettävissä kahden kokonaislukupotenssin avulla.

DFT:n ominaisuuksien läpikäymiseksi otetaan tarkasteltavaksi kuvan 5 mukainen, ohjelmallisesti luotu esimerkkisignaali.



Kuva 5. Ohjelmallisesti muodostettu keinotekoinen signaali indeksin funktiona

Signaali sisältää tasa- eli DC-komponentin, koska sen keskiarvo on positiivinen, ja signaalin epäsäännöllisyydestä päätellen se sisältää ilmeisesti useita taajuuskomponentteja. Kuvassa 6 on esitetty signaalin DFT muodostettuna MATLABin FFT-algoritmin avulla.



Kuva 6. Kuvan 5 signaalin FFT:n reaali- ja imaginääriosa indeksin funktiona

Aiemman esimerkin yhteydessä havaittiin jo, että indeksille nolla muodostuva DFT:n komponentti on reaalinen. Lisäksi kuvasta 6 havaitaan, että reaali-osa on indeksin 8 suhteen symmetrinen lukuun ottamatta indeksillä nolla olevaa DFT:n komponenttia. Vastaavasti imaginääriosa on indeksin 8 suhteen antisymmetrinen lukuun ottamatta indeksillä nolla olevaa DFT:n komponenttia. Lisäksi tässä tapauksessa, kun N on parillinen, indeksillä kahdeksan oleva DFT-komponentin imaginääriosa on nolla.

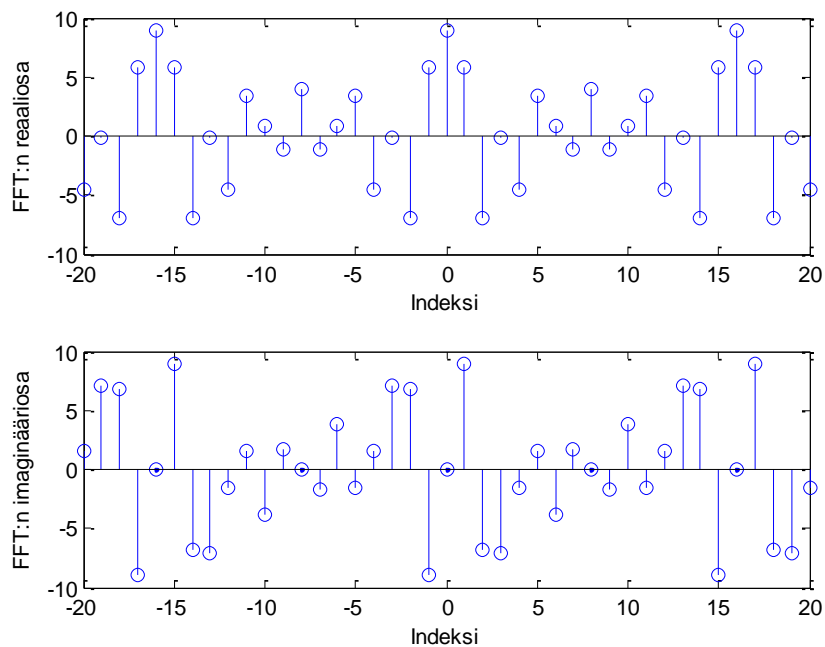
Yhtälön (17) mukaisessa DFT:n laskennassa ei tarvitse rajoittua k :n arvoihin $0 \dots N - 1$, vaan se voidaan suorittaa millä tahansa k :n kokonaislukuarvolla. Näin saatavalle DFT:lle on ominaista jaksollisuus jakson pituuden ollessa N , mikä nähdään yksinkertaisesti muodostamalla DFT kokonaislukuarvolla $k + N$.

$$\begin{aligned}
 X[k + N] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{i2\pi}{N}(k+N)n} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{i2\pi}{N}k \cdot n} e^{-2i\pi n} \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{i2\pi}{N}k \cdot n} = X[k], \quad (18)
 \end{aligned}$$

sillä

$e^{-2i\pi n} = 1$ kaikilla n :n arvoilla.

Kuvassa 7 on esitetty kuvan 5 signaalin DFT:n jaksollisuus.



Kuva 7. Kuvan 5 signaalin DFT esitettynä kun k saa arvot $-20 \dots +20$

Digitaalisessa signaalinkäsittelyssä signaalit ovat yleensä reaalisia. Niiden DFT:lle on voimassa seuraavat ominaisuudet:

1. $X[k] = X[-k]^*$,
2. $ReX[k] = ReX[-k]$,
3. $ImX[k] = -ImX[-k]$

4. $|X[k]| = |X[-k]|$
5. $\arg X[k] = -\arg X[-k]$.

Ominaisuus 1 sisältää sen, että $X[k]$ ja $X[-k]$ ovat toistensa kompleksikonjugaatteja, joilla on ominaisuuden 2 mukaisesti sama reaali-osa ja ominaisuuden 3 mukaisesti vastakkaismerkkinen imaginääriosa. Tällöin niiden itseisarvo on yhtä suuri (ominaisuus 4), ja kulma on vastakkaismerkkinen osoitinesityksessä (ominaisuus 5).

Diskreetin Fourier-muunnoksen käänteismuunnos määritellään yhtälöllä

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{\frac{i2\pi}{N} k \cdot n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (19)$$

Käytetyt symbolit ovat merkitykseltään samat kuin DFT:n määritelmässä.

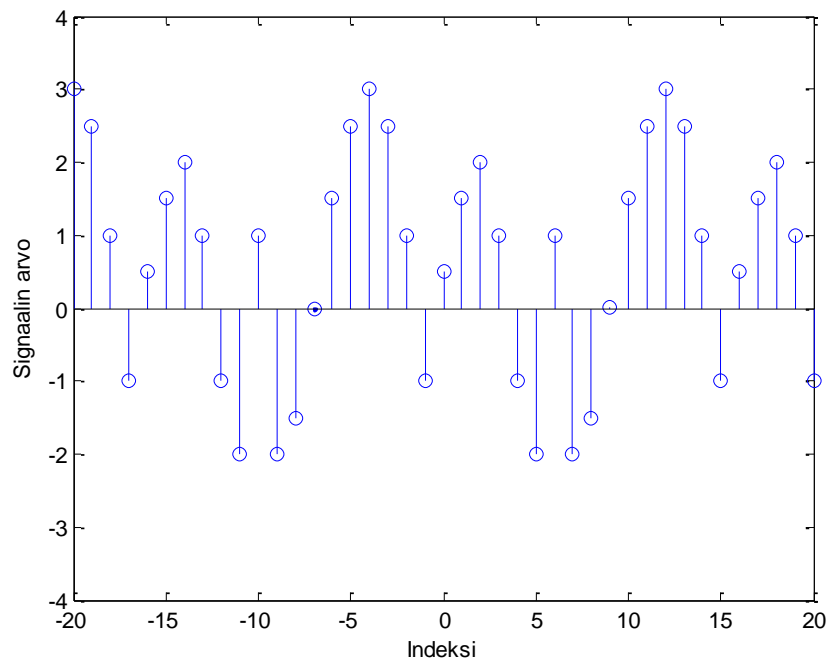
Yhtälön (19) mukaisessa käänteisen DFT:n laskennassa ei tarvitse rajoittua n :n arvoihin $0 \dots N-1$, vaan laskenta voidaan suorittaa millä tahansa n :n kokonaislukuarvolla. Näin saatavalle käänteiselle DFT:lle on ominaista jaksollisuus jakson pituuden ollessa N , mikä on yksinkertaisesti osoitettavissa muodostamalla käänteinen DFT kokonaislukuarvolla $n + N$.

$$\begin{aligned} x[n + N] &= \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{\frac{i2\pi}{N} k(n+N)} = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{\frac{i2\pi}{N} k \cdot n} e^{i2\pi k} = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{\frac{i2\pi}{N} k \cdot n} \\ &= x[n], \quad (20) \end{aligned}$$

sillä

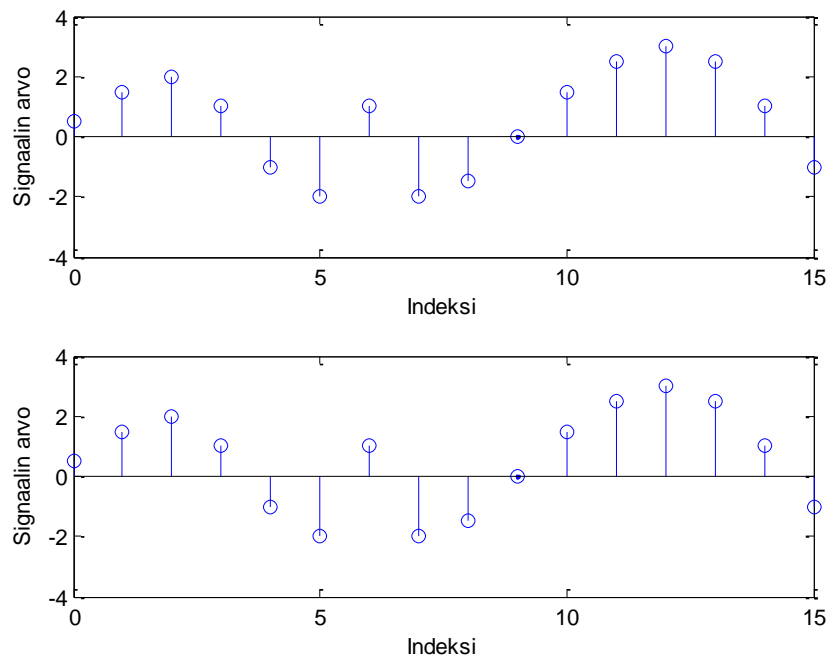
$$e^{i2\pi k} = 1 \text{ kaikilla } k\text{:n arvoilla.}$$

Kuvassa 8 on esitetty, kuinka kuvan 5 signaalin DFT:n käänteismuunnos johtaa jaksolliseen signaaliin.



Kuva 8. Kuvan 5 signaalin DFT:n käänteismuunnos esitettynä indekseillä $-20 \dots 20$

On huomattava, että alkuperäisen signaalin muodostamiseen käänteismuunnoksen avulla voidaan käyttää yhtä mitä tahansa jaksoa jaksollisesta DFT:stä. Kuvassa 9 on esitetty tulokset, jotka on saatu muodostamalla käänteismuunnos kuvan 7 DFT:n indeksiarvoilla $3 \dots 18$ (ylempi kuva) ja $-8 \dots 7$ (alempi kuva).



Kuva 9. Kuvan 7 DFT:n käänteismuunnos esitettyä indekseillä 3 ... 18 (ylempi kuva) ja $-8 \dots 7$ (alempi kuva)

Tarkastellaan seuraavaksi, miten käänteismuunnos muodostuu, kun siihen käytetään DFT:n komponentit valitaan symmetrisesti indeksin 0 suhteen

$$\begin{aligned}
 x[n] &= \frac{1}{N} \sum_{k=-\frac{N}{2}-1}^{\frac{N}{2}-1} X[k] e^{\frac{i2\pi}{N}k \cdot n} \\
 &= \dots \frac{1}{N} X[-3] e^{\frac{i2\pi}{N}(-3) \cdot n} + \frac{1}{N} X[-2] e^{\frac{i2\pi}{N}(-2) \cdot n} + \frac{1}{N} X[-1] e^{\frac{i2\pi}{N}(-1) \cdot n} \\
 &\quad + \frac{1}{N} X[0] e^{\frac{i2\pi}{N}0 \cdot n} \\
 &\quad + \frac{1}{N} X[1] e^{\frac{i2\pi}{N}1 \cdot n} + \frac{1}{N} X[2] e^{\frac{i2\pi}{N}2 \cdot n} + \frac{1}{N} X[3] e^{\frac{i2\pi}{N}3 \cdot n} \dots \quad (21).
 \end{aligned}$$

Tekijän $X[0]$ kerroin on $1/N$, joten

$$\frac{1}{N} X[0] e^{\frac{i2\pi}{N}0 \cdot n} = \frac{1}{N} X[0] \quad (22).$$

Kuvan 4 yhteydessä esitettyssä esimerkissä, että $X[0]$ on signaalin saamien arvojen summa, joten $\frac{1}{N}X[0]$ antaa signaalin keskiarvon eli sen DC-komponentin. Muodostetaan seuraavaksi summa

$$\frac{1}{N}X[-1]e^{\frac{i2\pi}{N}(-1)\cdot n} + \frac{1}{N}X[1]e^{\frac{i2\pi}{N}1\cdot n}.$$

Reaalille signaalille $X[-1]$ ja $X[1]$ ovat toistensa kompleksikonjugaatteja, joten ne voidaan esittää muodossa

$$X[-1] = |X[1]|e^{-i\theta_1} \quad (23) \quad \text{ja}$$

$$X[1] = |X[1]|e^{i\theta_1}, \quad (24)$$

missä θ_1 on $X[1]$:n kulma osoitinesityksessä. Soveltamalla yhtälöä (16) ja tuloksia (23) - (24) voidaan eo. summa esittää muodossa

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N}X[-1]e^{\frac{i2\pi}{N}(-1)\cdot n} + \frac{1}{N}X[1]e^{\frac{i2\pi}{N}1\cdot n} \\ &= \frac{1}{N}|X[1]|e^{-i\theta_1}e^{\frac{i2\pi}{N}(-1)\cdot n} + \frac{1}{N}|X[1]|e^{i\theta_1}e^{\frac{i2\pi}{N}1\cdot n} \\ &= \frac{1}{N} \cdot 2|X[1]| \cos\left(\frac{2\pi}{N} \cdot 1 \cdot n + \theta_1\right). \quad (25) \end{aligned}$$

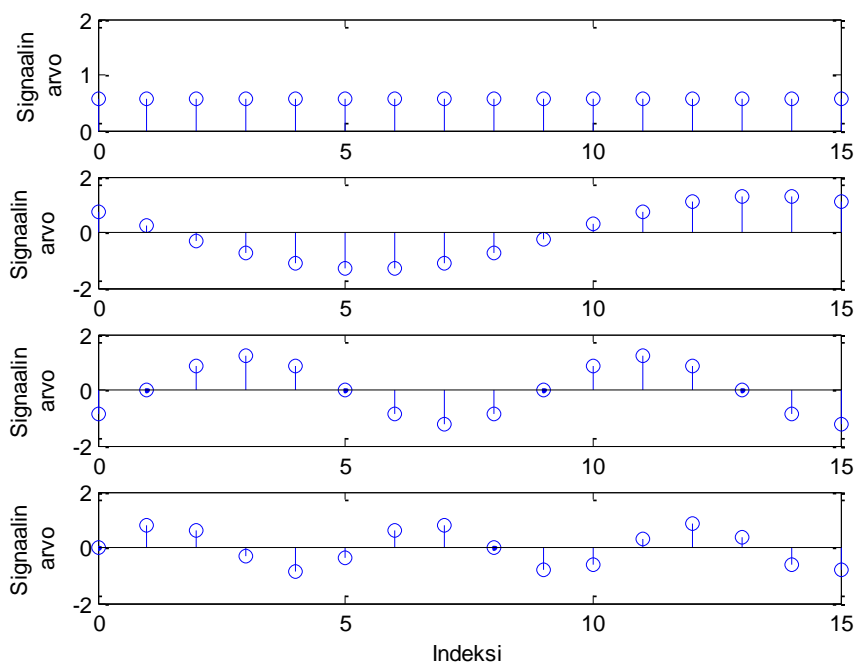
Tulokseksi saadaan siis yksi jakso kosinimuotoista signaalia, kun n :n annetaan saada N kpl peräkkäisiä kokonaislukuarvoja. Signaalin amplitudi on $2|X[1]|$ ja vaihe $X[1]$:n kulma osoitinesityksessä. Vastaavalla tavalla voidaan muodostaa summa

$$\frac{1}{N}X[-2]e^{\frac{i2\pi}{N}(-2)\cdot n} + \frac{1}{N}X[2]e^{\frac{i2\pi}{N}2\cdot n} = \frac{1}{N} \cdot 2|X[2]| \cos\left(\frac{2\pi}{N} \cdot 2 \cdot n + \theta_2\right). \quad (26)$$

Tuloksen mukaisesti saadaan kaksi jaksoa kosinimuotoista signaalia, kun n :n annetaan saada vastaavat arvot kuin edellä. Signaalin taajuus on siten yhtälön (25) mukaisen perustaajuuden 2. harmoninen taajuus. Seuraava eli 3. harmoninen taajuus muodostuu vastaavasti summana

$$\frac{1}{N}X[-3]e^{\frac{i2\pi}{N}(-3)n} + \frac{1}{N}X[3]e^{\frac{i2\pi}{N}3n} = \frac{1}{N} \cdot 2|X[3]| \cos\left(\frac{2\pi}{N} \cdot 3 \cdot n + \theta_3\right). \quad (27)$$

Samalla tavalla voidaan muodostaa myös muut harmoniset taajuuks. Edellä esitettyjen tulosten perusteella signaali voidaan esittää summana, joka koostuu vakio arvosta sekä signaalin pituuden määräämää perustaajuutta ja sen harmonisia taajuuksia olevista kosinimuotoisista signaaleista, joiden amplitudi ja vaihe saadaan DFT:n arvoista. Kuvassa 10 on esitetty kuvan 5 mukaisen signaalin vakio komponentti, perustaajuus sekä 2. ja 3. harmoninen taajuus.



Kuva 10. Kuvan 5 mukaisen signaalin vakio komponentti, perustaajuus sekä 2. ja 3. harmoninen taajuus indeksin funktiona

Edellä tuli esille, että digitaaliseen signaaliin liittyy olennaisesti sen näytteistystaajuus f_s , joka kertoo jatkuva-aikaisesta signaalista sekunnissa otettujen näytteiden lukumäärän. Näytteiden väli on $T_s = 1/f_s$, joten koko näytejoukko edustaa aikaa $T = NT_s$. Edellä esitetyn perusteella tämä vastaa perustaajuuteen liittyvää jaksonaikaa. Näin ollen perustaajuudeksi saadaan

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{NT_s} = \frac{f_s}{N}. \quad (28)$$

Tuloksen (26) nojalla 2. harmoninen taajuus on em. taajuuteen verrattuna kaksinkertainen ja n. harmoninen puolestaan n-kertainen. Tämän perusteella DFT:n tuottamat amplitudi- ja vaihetiedot liittyvät taajuuksiin, jotka poikkeavat toisistaan taajuusresoluution

$$\Delta f = \frac{f_s}{N} \quad (29)$$

verran. Ainoa tapa kasvattaa tätä on kasvattaa mittausaikaa suhteessa näytetystaajuuteen.

4 SIGNAALIN SPEKTRIN MUODOSTAMINEN

Signaalin spektrin muodostamisen lähtökohta on, että siitä tunnetaan N kappaletta pitkä näytejono ja niihin liittyvä näytteistystaajuus f_s . Ensimmäinen askel kohti spektrien muodostamista on tehdä näytejonolle diskreetti Fourier-muunnos, johon tyypillisesti käytetään nopeita FFT-algoritmeja. Yhtälön (22) mukaisesti DFT:n komponentti $X[0]$ jaettuna näytteiden määrällä N antaa suoraan signaalin taajuutta nolla vastaavan DC-komponentin.

Edellä esitetyistä yhtälöistä (25 – 27) kävi ilmi, että signaalin perustaajuuden amplitudi on $\frac{1}{N} \cdot 2|X[1]|$ ja harmonisten taajuuksien amplitudi on $\frac{1}{N} \cdot 2|X[k]|$, $k = 2, 3, \dots$, eli

$$|X[k]| = N \frac{A_k}{2}, k = 1, 2, \dots \quad (30)$$

missä A_k viittaa taajuuskomponentin k amplitudiin. Sinimuotoiselle signaalille tehollisarvon $X_{eff,k}$ ja amplitudin A_k välillä on riippuvuus

$$A_k = \sqrt{2}X_{eff,k}. \quad (31)$$

Yhdistämällä yhtälöiden (30) ja (31) tulokset saadaan

$$|X[k]| = N \frac{\sqrt{2}X_{eff,k}}{2} = N \frac{X_{eff,k}}{\sqrt{2}}, k = 1, 2, \dots \quad (32)$$

Korotetaan eo. riippuvuus puolittain toiseen potenssiin, jolloin saadaan

$$|X[k]|^2 = N^2 \frac{X_{eff,k}^2}{2}, k = 1, 2, \dots \quad (33)$$

Esitetään vielä tulos toisessa muodossa

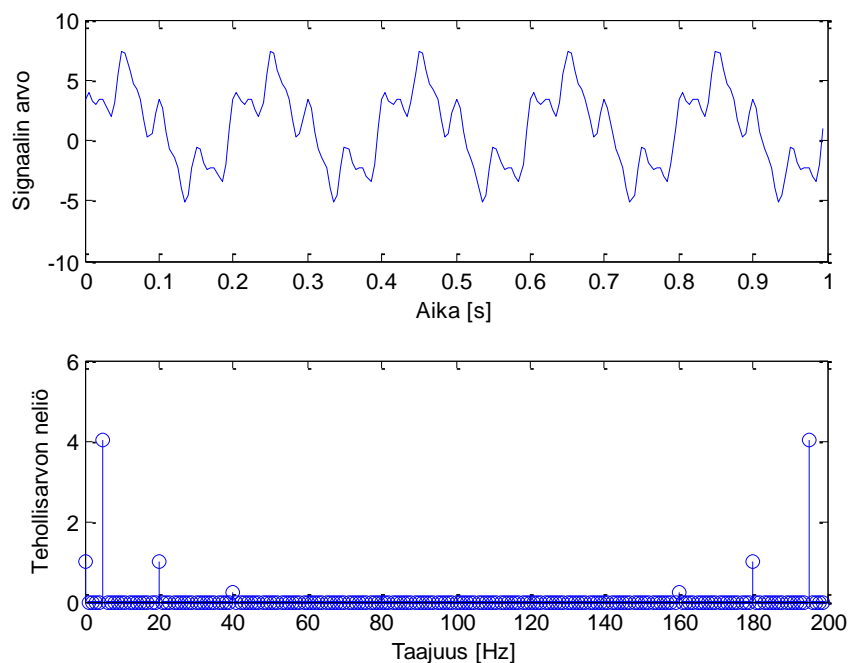
$$\frac{1}{N^2} |X[k]|^2 = \frac{1}{N^2} X[k] \cdot X[k]^* = \frac{X_{eff,k}^2}{2}, k = 1, 2, \dots \quad (34)$$

Tulos muodostaa signaalien spektrien perustan. Sen mukaisesti esitettäessä reaaliset arvot

$$\frac{1}{N^2} X[k] \cdot X[k]^*$$

indeksin funktiona tulokseksi saadaan ns. kaksipuolinen tehosppektri, joka koostuu signaalin DC-komponentin neliöstä indeksillä 0, perustaajuuden tehollisarvon neliön puolikkaasta indeksillä 1 ja harmonisten taajuuksien tehollisarvojen neliöiden puolikkaista 2:sta ylöspäin. On kuitenkin huomattava, että harmonisten taajuuksien määrä ulottuu vain signaalin ja samalla sen DFT:n pituuden puoliväliin saakka (tarkka määrä riippuu siitä, onko N parillinen vai pariton).

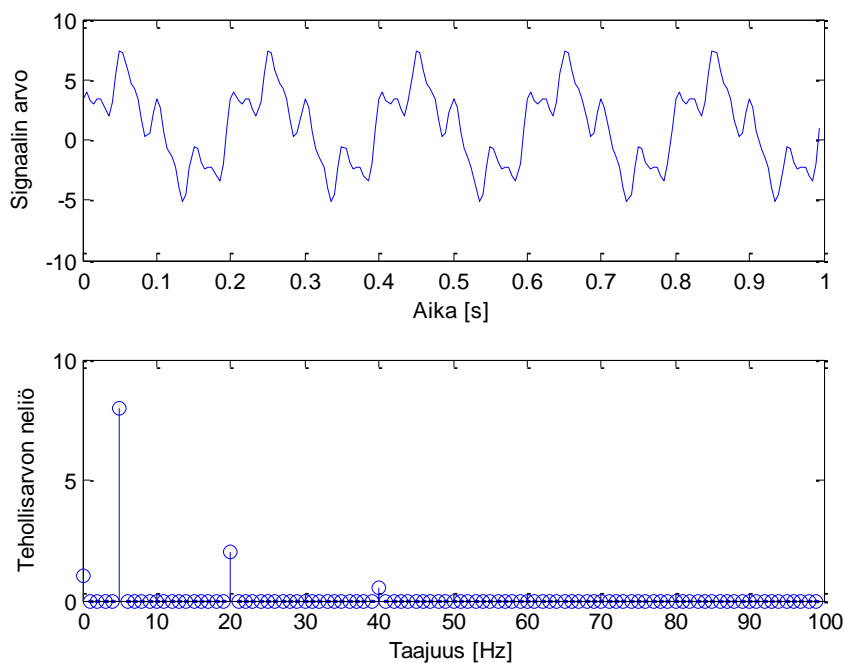
Kuvassa 11 (ylempi kuva) on esitetty signaali, joka koostuu DC-komponentista arvoltaan 1 sekä sinimuotoisista 5, 20 ja 40 Hz komponenteista, jotka ovat vastavasti amplitudiltaan 4, 2 ja 1. Signaalin pituus on 1 sekunti, ja se on näytteistetty 200 Hz taajuudella, joten spektrin taajuusresoluutio on 1 Hz.



Kuva 11. Signaali (ylempi kuva) ja sen kaksipuolinen tehosppektri (alempi kuva)

Alemman kuvan kaksipuolisessa tehosppektrissä taajuudella 0 olevan piikin korkeus on 1 vastaten signaalin DC-komponentin neliötä. Taajuudella 5 Hz olevan piikin korkeus 4 vastaa puolta signaalin 5 Hz taajuuskomponentin tehollisarvon neliöstä ($= \frac{1}{2} \cdot 4^2 / (\sqrt{2})^2$). 20 Hz ja 40 Hz taajuuksilla olevien piikkien korkeus on vastaavasti puolet niihin liittyvien taajuuskomponenttien tehollisarvojen neliöistä. DC:tä lukuun ottamatta toinen puoli tehollisarvojen neliöistä sijaitsee 100 Hz suhteen peilikuvien taajuuksilla. Koska DFT on jaksollinen ja sen itseisarvo on symmetrinen indeksin 0 suhteen, voidaan kaksipuolinen tehosppektri esittää myös muodossa, jossa puolet perustaajuuden ja harmonisten taajuuksien tehollisarvojen neliöistä sijaitsee negatiivisilla taajuuksilla.

Kaksipuolisesta tehosppektristä päästään yksipuoliseen tehosppektriin ottamalla kaksipuolisen spektrin DC-komponentti sellaisenaan ja kertomalla muut komponentit kahdella taajuuteen $f_s/2 - \Delta f$ saakka. Kuvassa 12 on esitetty edellisen kuvan signaali ja sen yksipuolinen tehosppektri.



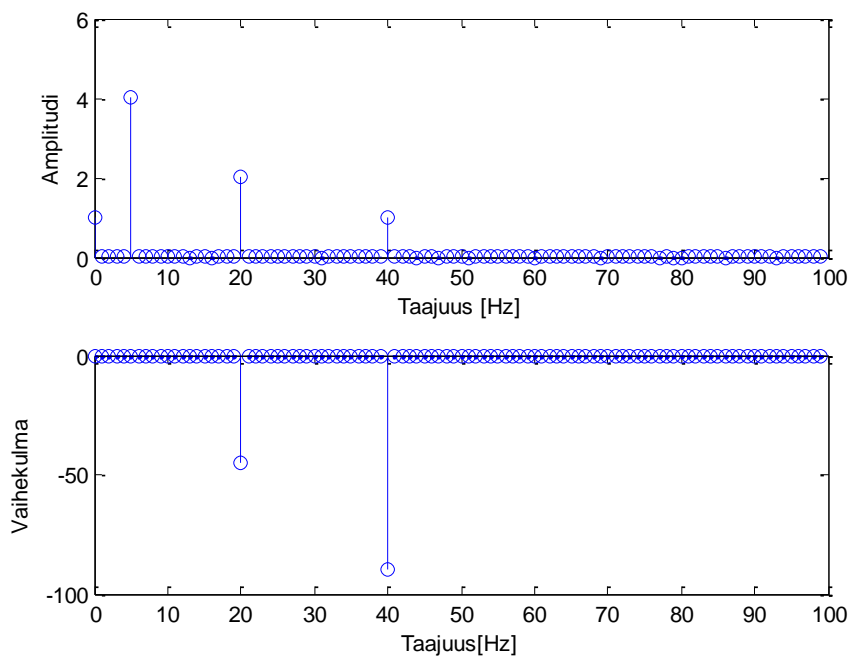
Kuva 12. Signaali ja sen yksipuolinen tehosppektri

Signaalin yksipuolinen amplitudispektri voidaan muodostaa yksipuolisesta tehospektristä ottamalla neliöjuuri sen arvoista ja kertomalla arvot 2:n neliöjuurella lukuun ottamatta DC-komponenttia.

Toinen tapa muodostaa yksipuolinen amplitudispektri on laskea signaalin DC-komponentti $\frac{1}{N}X[0]$ sekä perustaajuuden ja harmonisten taajuuksien amplitudit $\frac{1}{N} \cdot 2|X[k]|$ taajuuteen $f_s/2 - \Delta f$ saakka. Signaalin vaihespektri saadaan yhtälön

$$\theta_k = \tan^{-1} \frac{\text{Im}(FFT(x[n]))}{\text{Re}(FFT(x[n]))} \quad (35)$$

avulla. On huomattava, että vaihekulma tulee muodostaa siten, että se saa arvoja välillä $-\pi \leq \theta_k \leq \pi$. Työkalun tähän tarjoaa esim. MATLAB-ympäristön funktio atan2. Kuvassa 13 on esitetty kuvan 11 signaalin amplitudi- ja vaihespektri.



Kuva 13. Kuvan 11 signaalin amplitudi- ja vaihespektri

5 YHTEENVETO

Tässä raportissa on tarkasteltu jatkuva-aikaisen (analogisen) signaalin esitystapaa ja kuinka siitä näytteistämällä saadaan muodostetuksi digitaalinen signaali, joka koostuu näytejonosta ja näytteistystaajuuteen liittyvästä tiedosta. Signaalien käsittelyn perustan muodostaa tieto niiden spektreistä eli niiden sisältämistä sinimuotoisista komponenteista. Työkalun tähän on tarjonnut tiedonkäsittelykapasiteetin kasvun mahdollistama diskreetin Fourier-muunnoksen (DFT) muodostaminen pitkillekin signaaleille. Koska DFT on yleisessä tapauksessa kompleksinen, raportissa on tarkasteltu kompleksilukuja ja esitetty, kuinka kompleksisista eksponenttifunktioista voidaan muodostaa reaalin signaali kertomalla ne kompleksisilla kertoimilla.

Raportissa on esitetty, kuinka DFT lasketaan sen määritelmään perustuen ja tarkasteltu muunnoksen ominaisuuksia reaalisten signaalien tapauksessa. Kompleksilukujen ominaisuuksien pohjalta on esitetty, kuinka käänteisen DFT:n avulla voidaan päästä alkuperäiseen signaaliin vakio komponentin, perustaajuuden ja sen harmonisten taajuuksien muodossa. Tulosta on hyödynnetty signaalien kaksipuolisen ja yksipuolisen tehospektrin sekä amplitudi- ja vaihespektrin muodostamisessa esimerkkisignaaliin.

LÄHTEET

1. Lathi, B. P. 1992. Linear Systems and Signals. Berkley-Cambridge Press.
2. Jackson, L. B. 1991. Signals, Systems and Transforms. Addison-Wesley Publishing Company.
3. Eureka Math. A story of functions, Lesson 3. PDF-dokumentti. http://greatminds.net/maps/images/math_documents/G12.M3.A.Lesson.3_Teacher_Materials.pdf. Luettu 10.5.2016.
4. National Instruments. The Fundamentals of FFT-Based Signal Analysis and Measurement in LabVIEW and LabWindows/CVI. WWW-dokumentti <http://www.ni.com/white-paper/4278/en/> Jun 8 2009. Luettu 10.5.2016.